

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2020.01.015

有限温度下基于 NJL 模型的 GMOR 关系研究

蔡文华, 王庆武

(四川大学物理学院, 成都 610065)

摘要: 在量子色动力学(QCD)中, Gell-Mann-Oakes-Renner(GMOR)关系式是联系夸克凝聚、介子质量和衰变常数的一个零温下低阶近似的恒等式. 本文根据 QCD 有效理论, 从 Nambu-Jona-Lasinio(NJL)模型出发, 基于双味 NJL 模型和正时正规化方案(PTR), 推导了有限温度下夸克凝聚随温度的变化关系, 以及夸克凝聚时夸克质量随温度的变化关系, 并研究了 GMOR 关系式在此条件下随温度变化的成立情况. 结果表明: 在零温附近, GMOR 等式在误差允许范围内成立; 但随着温度的升高, 超过某一界限后, 等式不再成立, 且等式两边的偏差值越来越大.

关键词: QCD 理论; NJL 模型; 正时正规化方案; GMOR 关系式

中图分类号: O413.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2020)01-0113-05

The study of GMOR relation in the NJL model at finite temperature

CAI Wen-Hua, WANG Qing-Wu

(College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: In quantum chromatic dynamics (QCD) theory, Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR) is a low-order approximate identity which associates with quark condensation, meson mass and pion decay constant at zero temperature. In this paper, according to the QCD efficient theory and the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model, based on the two-flavor NJL model and the Proper Time Regularization (PTR), we derive the temperature dependence of quark condensation and the temperature dependence of quark mass in Quark condensation at finite temperature, and try to study the establishment of GMOR relation under this temperature condition. The results show that near zero temperature, the GMOR equation is valid within the allowable range of error, but with the increase of temperature, beyond a certain limit, the equation is no longer valid, and the deviation between the two sides of the equation is increasing.

Keywords: QCD theory; NJL model; Proper time regularization; GMOR relation

1 引言

众所周知, 作为描述夸克-胶子相互作用的有效理论, 量子色动力学(QCD)是粒子物理标准模型中相当重要的一部分. QCD 理论是研究自然界四大基本相互作用之一——强相互作用的理论. 而

动力学手征对称残缺(DCSB)和夸克颜色禁闭是 QCD 的两个基本特征. 研究 QCD 相图的学者可能会对有限体积和非零夸克化学势条件下的手征非禁闭相变感兴趣. 因为通过这些研究, 我们可以得到对自然和早期宇宙更加深刻的见解. 由于 QCD 复杂的非阿贝尔特征, 人们现在很难对

收稿日期: 2018-11-07

基金项目: 大学生创新训练项目(C2018103206)

作者简介: 蔡文华(1998-), 男, 重庆合川人, 主要研究方向为 QCD 理论及其运用.

通讯作者: 王庆武. E-mail: qw.wang@scu.edu.cn

DCSB 和夸克禁闭有一个全面的理解. 在 QCD 微扰领域中, 即有大量动量传递的过程, 由于其有效耦合常数很小, 因此可以直接以微扰的方法去研究. 然而, 在只有少量动量传递的过程, 耦合常数变得很大并且开始波动. 在这些强耦合的非微扰领域, 我们倾向于使用非微扰的有效理论来研究相关问题, 例如格点 QCD 模型^[1], DSE 模型^[2]等. 本文使用的 NJL 模型^[3]便是研究非微扰问题比较成功的一个理论.

NIL 模型作为一个成功的理论模型, 被广泛用于研究在 QCD 临界点附近的保守电荷涨落. 在 NJL 模型中, 夸克和胶子是基本的自由度, 其所有的作用项都被简化为了四体相互作用. 并且, 它的拉格朗日方程是建立在自然界中已经被观测到 QCD 的基本对称现象之上. 尽管在 NJL 模型中没有夸克禁闭实现的机制, 但它现在仍是研究非微扰 QCD 简单有效的方法. 文献^[4-7]介绍了 NJL 模型最新的一些应用.

基于热力学与统计物理的建立和大量实验数据的积累, 目前对一些宏观物质的相变研究已经非常熟练^[8], 但对于核物质的相变来讲还处于摸索前进状态. 这是由于对核物质的认识还有许多不确定的地方, 其中就包括核物质的 QCD 相结构和其高温非零重子化学势下 QCD 相图上相变点的存在性. 尽管对于一些保守量, 例如重子、电荷量和奇异数等的起伏在相对论重子碰撞中能相对比较容易地被检测到, 但仍需构建模型来对实验获得的数据进行解释, 并进一步检验模型的合理性.

在零温条件下, Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR) 关系^[9]在低阶近似下严格成立. 由于夸克真空不能被直接观测, 它常被用来定义零温下的夸克凝聚值. 但当使用各种模型并将其推广到有限温条件下时, GMOR 是否仍然成立并可被利用? 如果不成立, 又由什么原因引起? 这些都是值得研究的问题. 本文内容做如下安排: 第二部分根据 NJL 模型和 PTR 方案推导出有限温度下夸克有效质量随温度变化的关系^[10]; 第三部分会导出 NJL 模型下 π 介子衰变常数和 π 介子质量随温度的变化, 从而研究 GMOR 关系在该方案下的成立曲线. 结论在第四部分.

2 NJL 模型和 PTR 方案

由于本文使用 NJL 模型, 故使用以下拉格朗日密度(本文的所有计算都将在欧式空间进行, 并

且取味 $N_f=2$, 取色 $N_c=3$).

$$L_{NJL} = L_0 + L_I =$$

$$\bar{\psi}(i\gamma_\mu \delta^\mu - \hat{m}_q)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2] \quad (1)$$

式中, 夸克场 $\psi = (\psi_u, \psi_d)^T$; 而质量矩阵 $\hat{m}_q = \text{diag}(m_u, m_d)$. 在严格的同位旋对称下, 取 $m_u = m_d = m$; G 为有效耦合强度. 本文中, G 作为一个常量引入.

尽管 NJL 模型的成功表明在某种程度上如此简单的一个模型也能抓住 QCD 的某些关键要素, 但是, 由于该模型不涉及重整化, 因此需要引入一些表征相互作用截断的动量标度来避免可能的紫外发散以及红外发散. 下面的工作将把正时正规化(proper time regularization)方案的双截断版本(PTR-2)运用于双味 NJL 模型, 并使用传统的方法来修正参数. PTR-2 的关键方程为:

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A} \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A} \quad (2)$$

该式中, $\tau_{UV(IR)} = 1/A_{UV(IR)}^2$, 而 $A_{UV(IR)}$ 是紫外(红外)截断参量.

在方程(1)的平均场近似中, 有效夸克质量 M 通常能通过自洽能隙方程决定:

$$M = m - 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (3)$$

而该式中双夸克凝聚被定义为:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G(p)] \quad (4)$$

其中 $G(p)$ 为带色夸克的传播介质, 它的迹与味、色和狄拉克空间有关. 根据洛伦兹结构解析, 在这种情况下温度和化学势都为 0, 即 $T = \mu = 0$, 因此, $G(p)$ 应为以下形式:

$$G^{-1}(p) = ipA(p^2) + B(p^2) \quad (5)$$

其中, $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 是 p^2 的标量函数. 易得两式的解分别为 $A(p^2) \equiv 1$ 和 $B(p^2) \equiv M$. 代入 PTR-2, 推导得出:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4M}{p^2 + M^2} = \\ &- 24 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau e^{-\tau(p^2 + M^2)} = \\ &- 24M \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau e^{-M^2 \tau} \left[\int_0^\infty \frac{dp}{8\pi^2} p^3 e^{-\tau p^2} \right] = \\ &- \frac{3M}{2\pi^2} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau \frac{e^{-\tau M^2}}{\tau^2} \end{aligned} \quad (6)$$

把(6)代入能隙方程(3)

$$M = m + \frac{3GM}{\pi^2} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau \frac{e^{-\tau M^2}}{\tau^2} = m + \frac{3GM^3}{\pi^2} [\Gamma(-1, \tau_{UV} M^2) - \Gamma(-1, \tau_{IR} M^2)] \quad (7)$$

由(7)可以得到这个模型的 4 个参数: 裸夸克质量 m , 耦合强度常数 G , 以及两个截断参量 A_{UV} 和 A_{IR} . 因为 A_{IR} 是为了模拟禁闭而被引入的, 它的值应该根据核子半径的实验值进行修正. 本文采用 $A_{IR} = 235$ MeV, 以与半径实验数值 0.84 fm 相匹配^[11].

在有限温情况下, 夸克动量的第四分量用 Matsubara 形式表示, 即 $p \rightarrow p_k = (\vec{p}, \omega_k)$, 其中 $\omega_k = (2k+1)\pi T, k \in \mathbf{Z}$. 在这种形式下夸克凝聚为

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \text{Tr}[G(p_k^2)] = \\ &= -24M \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau e^{-\tau M^2} \left[T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} p^2 e^{-\tau(p^2 + \omega_k^2)} \right] = \\ &= -\frac{3MT}{\pi^{3/2}} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau \frac{e^{-\tau M^2}}{\tau^{3/2}} \theta_2(0, e^{-4\pi^2 \tau T^2}) \end{aligned} \quad (8)$$

将其代入能隙方程, 得到 $M(T)$

$$M = m + \frac{6GMT}{\pi^{3/2}} \int_{\tau_{UV}}^{\tau_{IR}} d\tau \frac{e^{-\tau M^2}}{\tau^{3/2}} \theta_2(0, e^{-4\pi^2 \tau T^2}) \quad (9)$$

根据获得的 $M(T)$ 关系, 可以对不同的 T 给出数值解. 图 1 是根据表 1 所给出的 3 组参数而绘制的 $M(T)$ 图像.

表 1 文中所用的 3 组参数

Tab. 1	The three cases of parameters sets used in this work			
	m/MeV	$G/(\times 10^{-6} \text{MeV}^{-2})$	A_{UV}/MeV	$M(T=0)/\text{MeV}$
Case 1	3.5	2.14	1 300	200
Case 2	5.0	3.26	1 080	216
Case 3	7.0	5.03	907	240

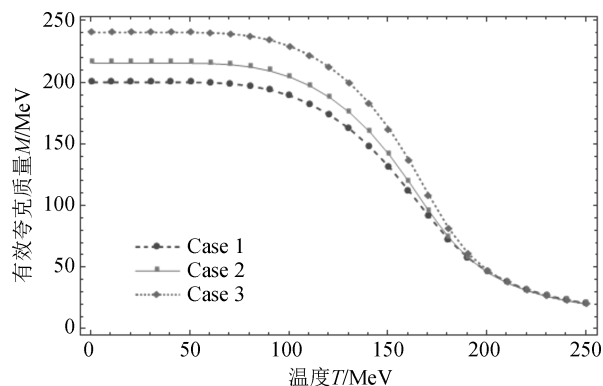


图 1 有效夸克质量随温度的变化关系 $M(T)$

Fig. 1 Effective quark mass M as a function of temperature T

从图 1 可以看出, 曲线很明显地分为 3 段: 低温段 ($0 \sim 50$ MeV)、中温段 ($50 \sim 225$ MeV)、高温段 (> 225 MeV), 其分别代表不同的相, 这与用格点 QCD 模型和其他模型方案所得的结果相一致^[12-13]. 在低温段, 夸克发生手征对称自发破缺, 夸克获得有效质量, 但没有发生相变; 中温段是从夸克凝聚手征自发破缺到手征恢复的过渡, 发生热核相变, 有效质量急剧减小; 在高温段, 手征对称性恢复, 相变完成, 有效质量不再变化, 根据 Nambu-Goldstone 理论, 如果此时 $m=0$, 则夸克有效质量 $M=0$. 在非零化学势下, 可以在中温段定义相变点 (CEP), 而在实验中如何找到这个点成为如今高能物理实验中十分重要的一个课题.

3 GMOR 关系

在 NJL 模型中, π 介子衰变常数可以通过真空到单 π 和轴向矢量电流矩阵元的 Feynman 图导出, 如图 2 所示.

$$\langle O | J_{5\mu}^i(x) | \pi^j \rangle = i\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^i}{2} \cdot \text{Feynman Diagram} \quad k, j$$

图 2 真空到单 π 跃迁和轴向矢量流矩阵元的 Feynman 图

Fig. 2 Vacuum to one-pion and axial-vector current matrix element, as a Feynman diagram

对图 2 中的过程使用独立正则化方案, 可以推出:

$$f_\pi^2 = -4iN_c M^2 I(0) \quad (10)$$

很多有效模型可以计算介子质量, 比如手征夸克模型, Dyson-Schwinger 方法^[14] 以及弦模型^[15] 等. 在 NJL 模型, 计算 π 介子质量有以下方程

$$m_\pi^2 = -\frac{m}{M} \frac{1}{4iG N_c N_f I(m_\pi^2)} \quad (11)$$

其中

$$I(k^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{[(p + \frac{1}{2}k)^2 - M^2][(p - \frac{1}{2}k)^2 - M^2]} \quad (12)$$

接下来讨论在该方案下的 GMOR 关系随温度的变化. 1968 年, Gell-Mann, Oakes 和 Renner 根据独立正则化方案的流代数结果导出关系式:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -M \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (13)$$

该等式的低阶近似在零温条件下成立, 根据在

NJL 模型中运用正时正则化方案可以导出,在有限温下,该关系式各项都是 T 的函数. 对该关系式进行合理变形:

$$m_{\pi}^2 f_{\pi}^2 + M \langle \bar{\psi} \psi \rangle = 0 \quad (14)$$

为了消除绝对误差对研究上带来的不便,根据百分偏差的定义,令:

$$B(T) = \frac{m_{\pi}^2 f_{\pi}^2 + M \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{m_{\pi}^2 f_{\pi}^2} \quad (15)$$

为了方便对比,将 $M(T)$ 进行归一化处理,定义相对有效夸克质量 $M1(T)$

$$M1(T) = M(T) / M(T=0) \quad (16)$$

依据以上的推导及结果作出 $B(T)$ 和 $M1(T)$ 图像,见图 3. 其中图像上部为 3 组 $M1(T)$ 的关系,图像下部为 3 组 $B(T)$ 的关系.

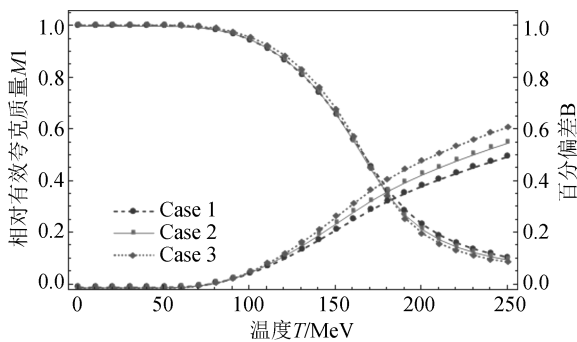


图 3 GMOR 关系式的百分偏差 B 和相对有效夸克质量 $M1$ 随温度 T 的变化关系

Fig. 3 The percentage deviation of GMOR relation B and the relative effective quark mass $M1$ as a function of temperature T

对于 GMOR 关系式,低温条件下,在误差允许范围内,等式成立,但随着温度升高,在大于某一个阈值(50 MeV 附近)时,曲线向上弯曲,说明此时凝聚相对介子和衰变常数乘积降低,等式不再成立. 通过对比 $B(T)$ 和 $M1(T)$,可以看出, $B(T)$ 和 $M1(T)$ 开始出现变化的起始温度几乎相同,说明 GMOR 等式的失效与凝聚变化有关,即与手征破缺恢复有关.

4 结 论

本文基于双味 NJL 模型,采用了正时正规化方案(PTR),推导了有限温下夸克凝聚随温度的变化,以及夸克凝聚时夸克质量随温度的变化,并研究了 GMOR 关系式在此条件下随温度变化的成立情况. 结果表明,在零温附近,GMOR 等式在误差允许范围内成立,但随着温度的升高,超过某一界限(50 MeV 附近)后,等式不再成立,且等式

两边的偏差值越来越大. 这是因为我们把关系式中涉及的有效耦合强度 G 视为常量,但更加深入的研究表明,我们似乎没有足够的证据这么做. 因此有足够的理由怀疑,在有限温条件下继续把有效耦合强度 G 视为常数并不合理,但至于 G 与什么因素有关且关系如何,还需要进一步研究和讨论. 一些学者的最新研究表示 G 可能与温度有关,并试图探究两者之间的关系. 另外,在有限温有限密下可能存在多解,即南部解和维格纳解共存. 本文研究的只是南部解. 研究多解情况下 GMOR 关系的成立情况,也非常有意义,这对在高能实验中寻找相变点具有重要的指导作用.

参考文献:

- [1] Endrodi G. Critical point in the QCD phase diagram for extremely strong background magnetic fields [J]. JHEP, 2015, 1507: 173.
- [2] Tandy P C. DSE perspective on QCD modeling, distribution amplitudes, and form factors [J]. Few Body Syst, 2014, 55: 357.
- [3] Klevansky S P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics [J]. Rev Mod Phys, 1992, 64: 649.
- [4] Andersen J O, Kyllingstad L T. Pion condensation in a two-flavour NJL model: the role of charge neutrality [J]. J Phys G: Nucl Part Phys, 2010, 37: 015003.
- [5] Lenzi C H, Schneider A S, Providencia C, et al. Compact stars with a quark core within the Nambu-Jona-Lasinio(NJL) model [J]. Phys Rev C, 2010, 82: 015809.
- [6] Abuki H, Baym H, Hatsuda T, et al. Nambu-Jona-Lasinio model of dense three-flavor matter with axial anomaly: the low temperature critical point and BES-BCS diquark crossover [J]. Phys Rev D, 2010, 81: 125010.
- [7] Chernodub M N. Spontaneous electromagnetic superconductivity of vacuum in a strong magnetic field: evidence from the Nambu-Jona-Lasinio model [J]. Phys Rev Lett, 2011, 106: 142003.
- [8] 韩旭, 王平平, 李丹, 等. GaN 相变及热力学性质的理论研究 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 1036.
- [9] Bali G S, Bruckmann F, Constantinou M, et al. Magnetic susceptibility of QCD at zero and finite temperature from the lattice [J]. Phys Rev D, 2012, 86: 094512.

- [10] Cui Z F, Du Y L, Zong H S. The two-flavor NJL model with two-cutoff proper time regularization [J]. *Int J Mod Phys Conf Ser*, 2014, 29: 1460232.
- [11] Beringer J, Arguin J F, Barneet R M, *et al.* Review of particle physics(RPP)[J]. *Phys Rev D*, 2012, 86: 010001.
- [12] Halasz M A, Jackson A D, Shrock R E, *et al.* Phase diagram of QCD[J]. *Phys Rev D*, 1998, 58: 096007.
- [13] Aoki Y, Endrodi G, Fodor Z, *et al.* The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics [J]. *Nature*, 2006, 443: 675.
- [14] Bashir A, Chang L, Liu Y X, *et al.* Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger equation QCD [J]. *Commun Theor Phys*, 2012, 58: 79.
- [15] 王庆武, 宋元军. D 介子谱的弦模型计算[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2012, 49: 0373.

引用本文格式:

中文: 蔡文华, 王庆武. 有限温度下基于 NJL 模型的 GMOR 关系研究[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2020, 57: 113.

英文: Cai W H, Wang Q W. The study of GMOR relation in the NJL model at finite temperature [J]. *J Sichuan Univ; Nat Sci Ed*, 2020, 57: 113.