

# 周期调制噪声驱动的具质量涨落的欠阻尼谐振子的随机共振

王传毅<sup>1,2</sup>, 任芮彬<sup>1</sup>, 邓科<sup>1</sup>

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064; 2. 电子信息控制重点实验室, 成都 610064)

**摘要:** 本文研究了周期调制噪声驱动的具有质量涨落的欠阻尼谐振子的随机共振, 其中的振子质量的涨落为对称双态噪声而内噪声为高斯噪声. 通过 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 本文得到了系统稳态响应的一阶矩的解析表达式, 接着利用 Routh-Hurwitz 判据推导了系统响应的一阶矩的稳定性条件, 进而通过数值仿真研究了系统响应的一阶矩与系统各参数间的依赖关系. 仿真结果表明稳态响应振幅与周期输入信号频率、涨落噪声参数及系统固有参数均呈非单调变化关系, 模型出现真实共振、广义随机共振和参数诱导共振等丰富的随机共振现象. 进而, 本文的研究还表明质量涨落噪声和周期信号调制噪声的相互协作将导致系统的一些新的共振效应出现, 比如关于系统稳态响应振幅与驱动频率的双峰共振及关于某些噪声参数的单谷共振行为.

**关键词:** 随机共振; 质量涨落; 周期调制噪声; 稳态响应

**中图分类号:** O29      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2016)06-1183-07

## Stochastic resonance of underdamped harmonic oscillator with random mass driven by periodic modulated noise

WANG Chuan-Yi<sup>1,2</sup>, REN Rui-Bin<sup>1</sup>, DENG Ke<sup>1</sup>

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. Key Laboratory of Electronic and Control, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** In this paper, stochastic resonance of an underdamped harmonic oscillator with random mass and driven by periodic modulated noise is investigated. The fluctuation of oscillator mass is modeled by a dichotomous noise while the internal noise is assumed to be Gaussian. Using the Shapiro-Loginov formula and the Laplace transform technique, exact expressions of first moment of the steady-state response and output of the system are presented. Then some simulations are implemented to study the dependence of long-time behavior of the first moment on variety of the system parameters. It is shown that the output amplitude non-monotonically depends on the signal frequency, the noise parameters and the system parameters, which indicates the occurrences of *bona fide* stochastic resonance, generalized stochastic resonance and parameter-induced stochastic resonance. Furthermore, based on the exact expressions it is demonstrated that interplay of the mass fluctuation and the periodic modulated noise can generate some novel cooperation effects, such as double-peak resonance as well as one-valley resonance.

**Keywords:** Stochastic resonance; Random mass; Periodically modulated noise; Steady-state response

收稿日期: 2015-04-05

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(11401405); 电子信息控制重点实验室基金(JG2013035); 国家自然科学基金青年基金(11301361).

作者简介: 王传毅(1990-), 男, 四川成都人, 硕士研究生, 主要研究不确定性处理的数学. E-mail: wangchuany0126@163.com

通讯作者: 邓科. E-mail: dk@scu.edu.cn

# 1 引言

随机共振现象(stochastic resonance, SR)最早由 Benzi 等<sup>[1]</sup>和 Nicolis<sup>[2]</sup>等在上世纪 80 年代为解释第四季冰川问题而提出,随后逐渐成为动力学领域的研究热点. 早期人们普遍认为非线性性、弱周期信号输入和噪声是系统产生随机共振的三个必要条件. 但越来越多的研究显示线性系统在一定的条件下也会出现随机共振<sup>[3-7]</sup>. 特别地,当线性的简谐振子受到外部乘性噪声作用时,在一定的参数范围内振子表现出丰富的随机共振现象<sup>[4-11]</sup>. 例如,1999 年, Bercichevsky 和 Gitterman<sup>[4]</sup>研究了乘性噪声和加性噪声共同驱动的简谐振子,观察到系统输出的信噪比与乘性噪声的相关时间和外部激励信号的频率均存在非单调的依赖性,随机共振现象出现. 2012 年, Gitterman<sup>[8]</sup>分析了受乘性三态噪声驱动的线性系统,发现在一定的参数取值范围内系统同样存在随机共振现象;2014 年, He 等<sup>[9]</sup>研究了乘性双态噪声和周期调制噪声共同激励下的具记忆阻尼的线性谐振子,发现系统响应出现多峰共振现象.

值得注意的是,之前的绝大多数研究中谐振子所受的外部噪声多来自系统阻尼或固有频率的扰动,即外部噪声为阻尼涨落噪声和固有频率涨落噪声,而对振子质量受扰动而出现的外噪声情形则较少研究. 事实上,在很多化学、生物系统中,介质中的某些分子具有一定的吸附力,会随机地吸附在布朗粒子上,从而使得系统的质量存在一定的涨落<sup>[12,13]</sup>. 例如, Luczka<sup>[14]</sup>等人研究了具有随机质量增长的集群扩散现象,并指出集群质心的均方位移的反常行为是一种分簇尺寸的函数. Gitterman<sup>[15]</sup>考虑了具有随机质量的简谐振子的随机共振现象,该模型的实际对应于一种新型布朗运动. 考虑具有质量涨落的系统的动力学行为的一个最为诱人的前景之一是研发一种新型纳米机器共振器,该共振器可以通过吸收和释放周围分子从而增加和减少质量,进而调节系统共振行为<sup>[16]</sup>.

另一方面,在信号测量中,所测得噪声的大小与被测信号的强弱及量程相关. 被测信号强或量程大,则伴随产生的测量噪声相应大. 因而测量噪声与信号之间并不是完全独立的. 在很多实际系统中,诸如光学、射电天文学中的扩展器等,输入信号和外部噪声是乘性作用于系统的<sup>[16-18]</sup>,也就是说噪声被周期信号所调制. 因而本文将考虑具有质

量涨落的谐振子在周期调制噪声作用下的随机共振现象.

## 2 系统模型和稳态响应振幅

### 2.1 系统模型

对于经典的一维欠阻尼简谐振子模型,考虑振子质量随时间具有涨落变化以及受到加性内噪声和周期调制外噪声的驱动作用,我们可以用以下 Langevin 方程来对其运动进行描述:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) \xi(t) + \eta(t) \quad (1)$$

其中  $x(t)$  表示振子位移,  $m$  表示振子的质量,  $\gamma$  表示摩擦系数,  $\omega$  为系统固有频率,  $A_0$  和  $\Omega$  分别为输入信号的振幅和频率.

对于外界环境的涨落导致的质量  $m$  以及输入信号  $A_0 \cos(\Omega t)$  的涨落, 本文将建模为双态噪声  $\xi(t)$ <sup>[20,21]</sup>, 取值为  $\{-M, N\}$ ,  $M, N \geq 0$ ; 特别地, 这里我们假定  $M = N$ , 也就是说, 考虑  $\xi(t)$  为对称双态噪声的情形, 满足如下统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t) \xi(s) \rangle &= \langle \xi(s) \xi(t) \rangle = \sigma \exp[-\lambda |t - s|], \end{aligned}$$

其中,  $\sigma$  为  $\xi(t)$  的噪声强度,  $\lambda$  表示  $\xi(t)$  的相关率,  $\eta(t)$  表示内部热涨落噪声, 在振子方程以加性噪声的形式出现, 我们将其建模为高斯白噪声, 它满足如下统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(t) \eta(s) \rangle &= \langle \eta(s) \eta(t) \rangle = D \delta |t - s|, \end{aligned}$$

其中  $D$  为  $\eta(t)$  的噪声强度. 进一步地, 由于内噪声和外噪声具有不同的起源, 因而本文中假定  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  相互独立, 从而  $\langle \xi(t) \eta(s) \rangle = \langle \eta(s) \xi(t) \rangle = 0$ .

### 2.2 一阶矩和稳态响应振幅

Shapiro-Loginov 公式<sup>[19]</sup>是求解随机微分方程问题最有效手段之一, 尤其是当随机项具有指数型关联函数. 值得说明的是, Shapiro-Loginov 公式已在解决多种物理和工程实际问题中扮演了重要的角色. Shapiro-Loginov 公式的一般形式如下:

$$\langle Z(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \rangle = \left( \frac{d}{dt} + \theta \right)^n \langle Z(t) x(t) \rangle \quad (2)$$

上式中,  $n$  是  $x(t)$  的微分阶数,  $\theta$  是指数关联噪声  $Z(t)$  的相关率.

下一步我们将解析求解系统输出响应

$x(t)$  的一阶矩, 将方程(1)两端取均值, 有

$$\langle (m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rangle + \gamma \langle \frac{dx(t)}{dt} \rangle + \langle m\omega^2 x(t) \rangle = 0 \quad (3)$$

化简方程(3)得到

$$m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \langle \xi(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rangle + \gamma \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + m\omega^2 \langle x(t) \rangle = 0, \quad (4)$$

将 Shapiro-Loginov 公式带入到方程(4)中, 可以得到以下方程(5):

$$m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle + \gamma \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + m\omega^2 \langle x(t) \rangle = 0 \quad (5)$$

观察方程(5), 可知除了含有变量  $\langle x(t) \rangle$  之外还含有新的变量  $\langle \xi(t)x(t) \rangle$ , 为了求解方程, 我们还需要另一个包含变量  $\langle x(t) \rangle$  和  $\langle \xi(t)x(t) \rangle$  的等式. 将方程(1)左右两端乘以  $\xi(t)$ , 再将得到的等式两端取均值, 我们可得到:

$$m \langle \xi(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rangle + \sigma \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \gamma \langle \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \rangle +$$

其中

$$\begin{cases} d_{11} = ms^2 + \gamma s + m\omega^2, \\ d_{12} = (s + \lambda)^2, \\ d_{13} = (ms + \gamma)x_1(0) + m\dot{x}_1(0) + (s + 2\lambda)x_2(0) + \dot{x}_2(0), \\ d_{21} = \sigma s^2, \\ d_{22} = m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda) + m\omega^2, \\ d_{23} = \sigma s x_1(0) + \sigma \dot{x}_1(0) + (ms + 2m\lambda + \gamma)x_2(0) + m\dot{x}_2(0), \end{cases}$$

这里  $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$  为相应的初值条件.  $X_i(s)$  表示  $x_i(t)$  的 Laplace 变换, 即

$$X_i(s) = L\{x_i(t)\} \equiv \int_0^\infty x_i(t) e^{-st} dt, i = 1, 2.$$

方程组(9)是一个二元一次方程组, 其解易得如下:

$$\begin{cases} X_1(s) = -\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \sigma A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + \frac{d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \\ X_2(s) = \frac{d_{11}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \sigma A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + \frac{d_{11}d_{23} - d_{21}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \end{cases} \quad (10)$$

对方程组(10)作逆 Laplace 变换, 我们可以得到方程组(8)的通解有以下形式:

$$m\omega^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle = \sigma A_0 \cos(\Omega t) \quad (6)$$

再次应用 Shapiro-Loginov 公式, 有

$$m \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle + \sigma \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \gamma \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle \xi(t)x(t) \rangle + m\omega^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle = \sigma A_0 \cos(\Omega t) \quad (7)$$

为简化表达式, 可令  $\langle x(t) \rangle \equiv x_1, \langle \xi(t)x(t) \rangle \equiv x_2$ , 联立方程(5)和(7), 我们得到了以下关于变量  $x_1$  和  $x_2$  的方程组

$$\begin{cases} \left( m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + m\omega^2 \right) x_1 + \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 x_2 = 0, \\ \sigma \frac{d^2}{dt^2} x_1 + \left( m \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + \gamma \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) + m\omega^2 \right) x_2 = \sigma A_0 \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (8)$$

接下来对方程组(8)作 Laplace 变换<sup>[21]</sup>, 得

$$\begin{cases} d_{11} X_1(s) + d_{12} X_2(s) = d_{13}, \\ d_{21} X_1(s) + d_{22} X_2(s) = \sigma A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + d_{23} \end{cases} \quad (9)$$

$$x_i(t) \equiv A_0 \int_0^t h_{i0}(t-t') \cos(\Omega t') dt' + \sum_{k=1}^4 h_{ik}(t) x_k(0) \quad (11)$$

其中,  $i=1, 2, H_{ik}(s)$  是  $h_{ik}(t)$  的 Laplace 变换.  $H_{ik}(s)$  可以由方程(10)得到. 特别的,  $H_{10}(s)$  和  $H_{20}(s)$  是系统的传递函数,

$$\begin{aligned} H_{10}(s) &= -\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \\ H_{20}(s) &= \frac{d_{11}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \end{aligned} \quad (12)$$

接下来我们考虑解在长时极限下的值, 也就是说系统初始条件对输出响应的影响会逐渐消失, 系统将会逐渐进入一个稳定状态. 这时系统的平均稳态响应由下式给出:

$$\langle x(t) \rangle_{as} \equiv \langle x(t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} = A_0 \int_0^t h_{i0}(t-t') \cos(\Omega t') dt' \tag{13}$$

从信号与系统的角度,  $\langle x(t) \rangle_{as}$  可以考虑成一个线性时不变系统的输出信号, 其输入信号为  $A_0 \cos(\Omega t)$ , 传递函数是  $H_{10}(s)$ . 也就是说输出响应信号具有如下形式<sup>[22]</sup>:

$$\langle x(t) \rangle_{as} = A \cos(\Omega t + \varphi) \tag{14}$$

其中  $A, \varphi$  分别是系统稳态响应输出信号的幅度和相移. 其满足下面关于传递函数  $H_{10}(s)$  的解析表达式:

$$A = A_0 |H_{10}(j\Omega)| = A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}},$$

$$\varphi = \arg(H_{10}(j\Omega)) = \arctan\left(\frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4}\right), \tag{15}$$

其中

$$f_1 = \Omega - \lambda^2,$$

$$f_2 = -2\lambda\Omega,$$

$$f_3 = (m^2\Omega^2 - m^2\omega^2 - \sigma\Omega^2)f_1 - m\gamma\Omega f_2 - \gamma^2\Omega^2 - (m\Omega^2 - m\omega^2)(m\omega^2 + \lambda\gamma),$$

$$f_4 = -\gamma m\Omega f_1 - (m^2\Omega^2 - m^2\omega^2)f_2 + \gamma\Omega(m\omega^2 + \lambda\gamma) - \gamma\Omega(m\Omega^2 - m\omega^2) + 2\sigma\lambda\Omega^3.$$

### 2.3 稳定性条件

稳定性是研究线性系统最重要的问题之一. 在本文中, 若系统响应一阶矩发散, 这意味着该随机系统在长时极限下不能到达一个稳定状态. 为了使得理论结果可以切实地指导实际问题, 在进行计算机仿真前对系统稳定性范围的研究显然是必要的. 最普遍的研究系统稳定性的方法是 Lyapunov 指数判别法<sup>[15]</sup>, 而对于一个线性时不变系统, 系统的稳定的充分必要条件是它的系数特征方程的所有特征根均为负实数, 或具有负的实数部分. 为此将(14)式中已求出的系统传递函数  $H_{10}(s)$  分母部分展开得

$$d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = (ms^2 + \gamma s + m\omega^2)(m(s + \lambda_1)^2 + \gamma(s + \lambda_1) + m\omega^2) - (s + \lambda_1)^2(\sigma_1 s^2),$$

化简得关于  $s$  的四阶特征方程:

$$D(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 s^0 = 0,$$

其中

$$a_4 = m^2 - \sigma^2,$$

$$a_3 = 2m\gamma + 2\gamma(m^2 - \sigma^2),$$

$$a_2 = 2m^2\omega^2 + \gamma^2(m^2 - \sigma^2) + m\gamma^2 + \gamma^2,$$

$$a_1 = m\gamma^3 + 2m\gamma\omega^2 + \gamma^3 + 2m^2\gamma\omega,$$

$$a_0 = m\omega^2(m\gamma^2 + m\omega^2 + \gamma^2) \tag{16}$$

由于粒子在和环境分子发生碰撞过程中其涨落的质量必然为正, 由此可得参数必要条件  $\sigma < m$ , 再结合可控系统经典的 Routh-Hurwitz 判据<sup>[23]</sup>, 可得本文所研究线性谐振子系统的响应一阶矩稳定的条件为:

$$a_4 > 0; a_3 > 0; b_1 = -\frac{1}{a_3} \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0; \text{ 其中}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_3} \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix},$$

计算得

$$a_2 a_3 > a_1 a_4, a_1^2 a_4 + a_3^2 a_0 > a_1 a_2 a_3 \tag{17}$$

值得注意的是, 本文后续的仿真参数选取均建立在上述稳定性条件(17)成立的前提下.

## 3 仿真结果和讨论

上节推导结果显示, 系统稳态响应振幅  $A$  主要由外部驱动频率  $\Omega$ , 振子质量  $m$ , 乘性外噪声的强度  $\sigma$  及相关率  $\lambda$  决定. 在本节中, 我们将会通过数值仿真来直观地讨论  $A$  和这些参数之间的依赖关系和随机共振行为.

### 3.1 稳态响应振幅关于驱动频率的变化

首先, 图 1 给出了稳态响应振幅  $A$  关于输入信号频率  $\Omega$  的变化曲线, 不难发现系统响应和输入信号频率呈明显的非单调依赖关系, 即出现了真实共振现象 (*bona fide resonance*)<sup>[24]</sup>.

图 1(a) 中, 随着  $\sigma$  取值的增大, 共振峰峰值逐渐降低并且其在横轴上的位置逐渐向左移动. 比较特别的是, 当  $\sigma$  增大到 0.7 左右时, 曲线呈现出较明显的双峰随机共振现象. 随着外噪声强度的增大, 如  $\sigma = 0.9$ , 双峰随机共振逐渐消失, 系统重新回归到最初的单峰随机共振状态, 与此同时峰值也在逐渐降低. 图 1(b) 中, 随着系统阻尼系数  $\gamma$  的增大, 共振峰逐渐降低, 双峰共振转换到单峰共振. 图 1(c) 中, 随着  $\lambda$  的增大, 共振峰先降低再升高, 峰的位置逐渐向右移动.

以上仿真结果表明: 在周期调制噪声作用下, 具有质量涨落的谐振子系统具有丰富的真实共振行为, 其中双峰随机共振的出现和系统阻尼有着密切关联, 而周期调制噪声的统计性质和系统随机共振结构密切相关, 当噪声参数满足一定条件时, 系统将出现双峰随机共振行为.

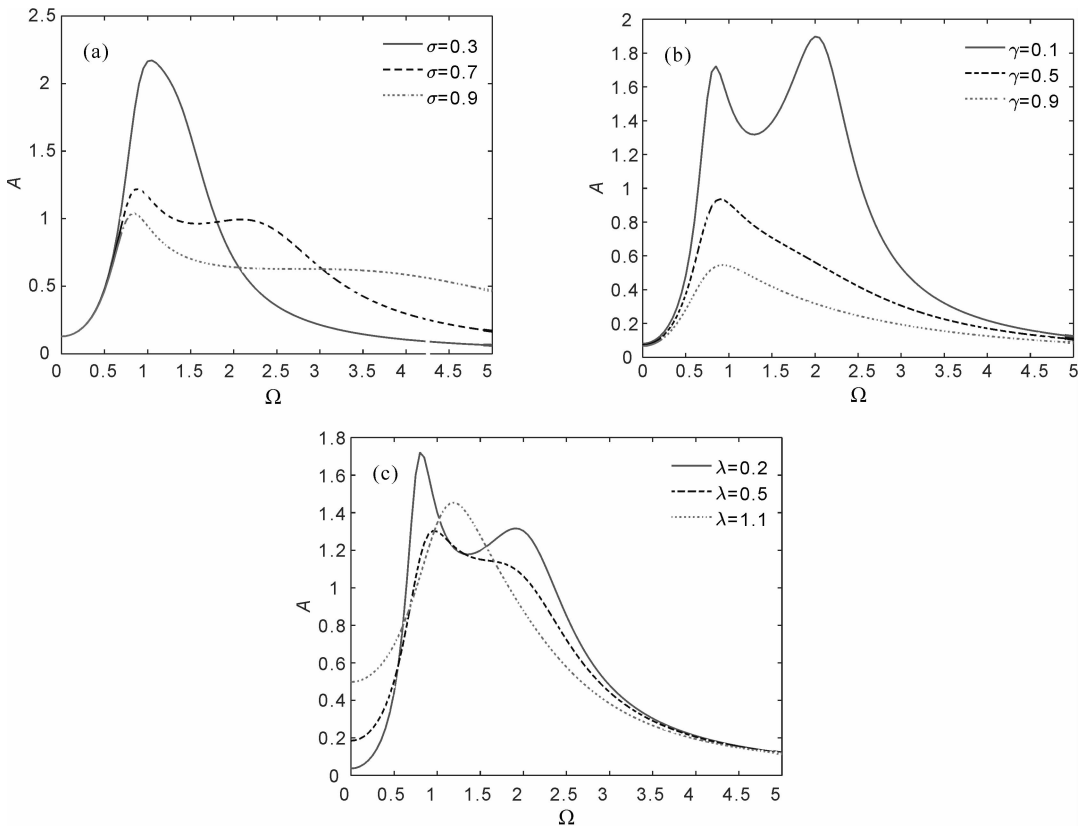


图 1 响应信号振幅  $A$  作为外部驱动力频率  $\Omega$  的函数, 其余参数这里取  $m = 1, \omega = 1, A_0 = 1$ , (a)  $\lambda = 0.4, \gamma = 0.2$ ; (b)  $\sigma = 0.6, \lambda = 0.3$ ; (c)  $\gamma = 0.2, \sigma = 0.6$ .

### 3.2. 稳态响应振幅关于外部噪声强度的变化

图 2 给出了响应振幅  $A$  关于外噪声强度  $\sigma$  的变化曲线, 所有曲线均呈现出明显的单峰随机共振现象, 这表明系统发生了典型的广义随机共振现象. 所谓广义随机共振, 是指系统响应的某些函数随系统的特征参数非单调变换的现象, 也就是说存在最佳参数使得系统响应函数取到最大值.

图 2(a) 中, 随着  $m$  的增大, 共振峰峰值逐渐降低, 其位置向右移动. 图 2(b) 中, 共振峰峰值随着  $\lambda$

的增大, 先降低再升高, 共振峰位置向右移动.

以上结果表明: 具有质量涨落的谐振子系统关于外部噪声强度呈现明显的广义随机共振行为. 振子质量越大, 随机共振现象越不明显, 系统到达共振峰值所需要的外噪声强度越大. 双态噪声相关系数  $\lambda$  的变化对随机共振现象的影响是先抑制后增强. 相关性越大, 系统到达共振峰值所需要的外噪声强度越大.

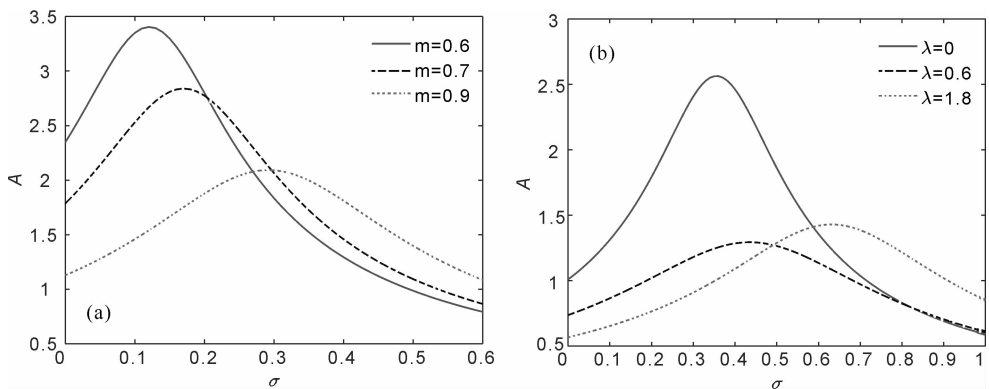


图 2 响应信号振幅  $A$  作为外噪声强度  $\sigma$  的函数, 其余参数取值为  $\gamma = 0.2, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1.6$ , (a)  $\lambda = 0.2$ ; (b)  $m = 1$ .

### 3.3 稳态响应振幅关于双态外噪声相关系数的变化

图 3 给出了稳态响应振幅  $A$  关于双态外噪声相关系数  $\lambda$  的变化曲线,所有曲线均呈单谷随机共振现象. 响应振幅  $A$  首先快速地减小,再随着  $\lambda$  的变大而缓慢增加,但不会超过  $\lambda = 0$  时的值,这表明系统稳态响应的大小非常依赖于参数  $\lambda$ .

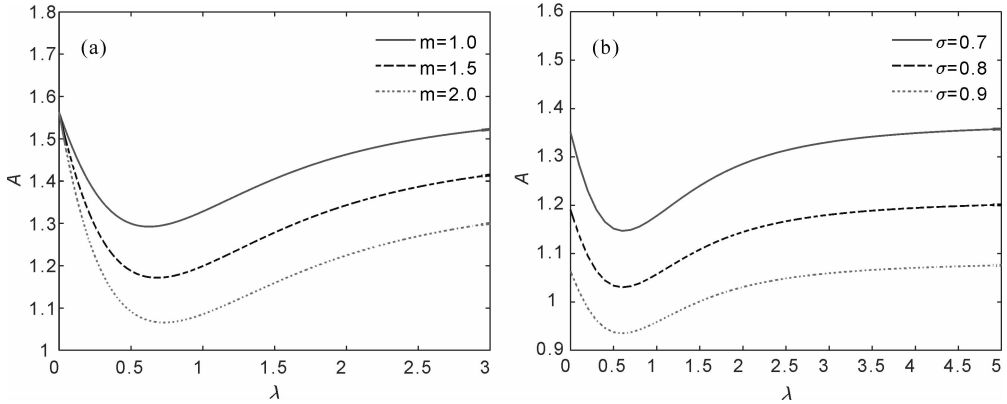


图 3 响应信号振幅  $A$  作为双态外噪声相关率  $\lambda$  的函数,其余参数取值为  $\gamma = 0.2, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1.0$ , (a)  $\sigma = 0.6$ ; (b)  $m = 1$ .

以上仿真结果表明:在周期调制噪声作用下,外噪声相关率  $\lambda$  对系统稳态响应振幅  $A$  具有明显的先抑制后增强的广义随机共振现象,其结构表现为单谷随机共振,具体共振峰高度与噪声强度及振子质量都密切相关. 特别地,噪声相关率  $\lambda$  在  $(0.5, 1)$  之间取值时,对系统的随机共振抑制作用最为明显.

### 3.4 稳态响应振幅关于振子质量的变化

最后,图 4 给出了系统稳态振幅  $A$  关于振子质量  $m$  的变化曲线. 仿真结果表明这种非单调变化现象可以通过用固定的噪声来调制系统参数而实现到达共振峰值. 这也意味着参数诱导的随机共振(PSR)现象<sup>[25]</sup>在本文模型中存在.

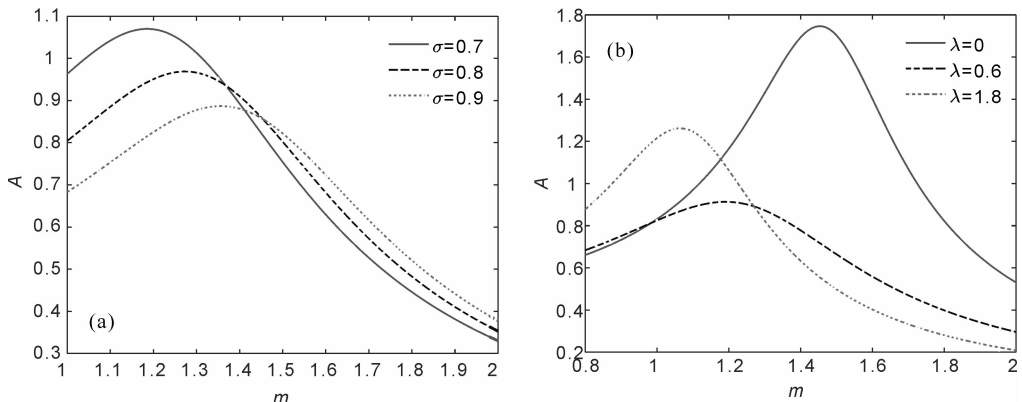


图 4 响应信号振幅  $A$  作为振子质量  $m$  的函数,其余参数取值为  $\gamma = 0.2, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1.6$ , (a)  $\lambda = 0.4$ ; (b)  $\sigma = 0.8$ .

图 3(a)中,随着振子质量  $m$  的增大,曲线逐渐下降,共振峰值所在位置缓慢地向右移动. 图 3(b)中,共振曲线随着  $\sigma$  的增大逐渐下降,共振峰值所在位置几乎没有变化,系统稳态响应振幅  $A$  随  $\lambda$  的继续增大而逐渐平稳.

图 4(a)中,共振峰的高度随着  $\sigma$  的增大而降低,同时共振峰位置向右移动. 图 4(b)中,随着  $\lambda$  取值的增大,共振峰呈现出先下降再升高的趋势,峰值位置向左移动.

上述结果表明:振子质量的变化和系统稳态响应呈明显的随机共振关系. 双态外噪声强度  $\sigma$  的增大在一定程度上对随机共振起抑制作用,而噪声相关率  $\lambda$  的增大对随机共振现象仍然表现为先抑制再增强. 值得注意的是,外部涨落噪声的参数调节相比内部环境参数更加容易控制,这种可由参数诱导的随机共振行为,为研究区分不同质量粒子的粒子分离器提供了一个可行的思路.

## 4 总 结

综上所述,周期调制噪声驱动下具有质量涨落的欠阻尼线性谐振子的随机共振行为有以下特点:

(1)理论分析和仿真结果表明真实的随机共振、广义随机共振、参数诱导的随机共振在适当的参数设定下均在该模型中发生。(2)质量涨落和周期信号调制噪声的相互作用可以产生出一系列丰富非平衡合作现象,如对外力驱动频率的双峰共振和对噪声相关率的单谷共振,这实际上可以为解释实际物理、化学、生物学实验中某些欠扩散现象提供可能更为真实的理论依据。

### 参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. *J Phys A*, 1981, 14: 453.
- [2] Nicolis C. Stochastic aspects of climatic transitions response to a periodic forcing [J]. *Tellus*, 1982, 34: 1.
- [3] Li J H, Han Y X. Phenomenon of stochastic resonance caused by multiplicative asymmetric dichotomous noise [J]. *Phys Rev E*, 2006, 74: 51115.
- [4] Berdichevsky V, Gitterman M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise [J]. *Phys Rev E*, 1999, 60: 1494
- [5] 宁丽娟,徐伟. 信号调制下分段噪声驱动的线性系统的随机共振[J]. *物理学报*, 2009, 58: 2889.
- [6] Laas K, Mankin R, Rekker A. Constructive influence of noise flatness and friction on the resonant behavior of a harmonic oscillator with fluctuating frequency [J]. *Phys Rev E*, 2009, 79: 51128.
- [7] Li D S, Li J H. Effect of correlation of two dichotomous noises on stochastic resonance [J]. *Commun Theor Phys*, 2010, 53: 298.
- [8] Gitterman M. Oscillator with random trichotomous mass [J]. *Physica A*, 2012, 391: 5343.
- [9] He G T, Tian Y, Luo M K. Stochastic resonance in an underdamped fractional oscillator with signal-modulated noise [J]. *J Stat Mech*, 2014, 5: 05018.
- [10] Gitterman M, Klyatskin V I. Brownian motion with adhesion; harmonic oscillator with fluctuating mass [J]. *Phys Rev E*, 2010, 81: 051139.
- [11] Gitterman M. Oscillator with random trichotomous mass [J]. *Physica A*, 2012, 391: 5343.
- [12] Blum J, Wurm G, Kempf S, Poppe T. Growth and form of planetary seedlings: results from a micro-gravity aggregation experiment [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2426.
- [13] Perez A T, Saville D, Soria C. Modeling the electrophoretic deposition of colloidal particles [J]. *Europhys Lett*, 2001, 55: 425.
- [14] Luczka J, Hänggi P, Gądomski A. Diffusion of clusters with randomly growing masses [J]. *Phys Rev E*, 1995, 51: 5762.
- [15] Gitterman M. Stochastic oscillator with random mass: New type of Brownian motion [J]. *Physica A*, 2014, 395: 11-21.
- [16] Portman J, Khasin M, Shaw S W, *et al.* The spectrum of an oscillator with fluctuating mass and nanomechanical mass sensing [C]//APS March Meeting 2010. American Physical Society, 2010.
- [17] Dykman M I, Luchinsky D G, McClintock P V E, *et al.* Stochastic resonance for periodically modulated noise intensity [J]. *Phys Rev A*, 1992, 46: R1713.
- [18] 屠浙,彭皓,王飞,等. 色噪声参激和周期调制噪声外激联合驱动的分数量阶线性振子的共振行为[J]. *物理学报*, 2013, 62: 030502.
- [19] Shapiro J E, Logunov V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations [J]. *Physica A*, 1978, 91: 563.
- [20] Bena I, Broeck C V D, Kawai R, *et al.* Nonlinear response with dichotomous noise [J]. *Phys Rev E*, 2002, 66: 045603.
- [21] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. *Signals and Systems* [M]. 2nd ed. New York: Prentice Hall Inc, 1997.
- [22] Kubo R, Toda M, Hashitsume N. *Statistical physics II, nonequilibrium statistical mechanics* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [23] Gopal, M. *Control Systems; Principles and design* [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [24] Gammaitoni L, Marchesoni F, Santucci S. Stochastic Resonance as a Bona Fide resonance [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, 74: 1052.
- [25] Xu B H, Li J I, Zheng J Y. Parameter-induced aperiodic stochastic resonance in the presence of multiplicative noise and additive noise [J]. *Physica A*, 2004, 343:156.