

基于腔 QED 中实现多种量子克隆

薛 丽¹, 任一鸣¹, 姜年权²

(1. 湖北科技学院电子与信息工程学院, 咸宁 437100; 2. 温州大学物理与电子信息工程学院, 温州 325035)

摘要: 在腔 QED 中, 基于原子与腔场的相互作用, 提出了一个通过控制原子与场相互作用的时间实现多种量子克隆的方案. 例如, 对于任意的输入量子态, 可以实现普适的最优量子克隆; 对于赤道输入量子态, 通过参数调控, 可以实现非对称性的 1→2 相位协变克隆和最优的非对称性的经济型的 1→3 相位协变克隆. 在整个克隆过程中, 由于原子与大失谐模式的腔场相互作用, 所以该方案不受腔损和热场的影响.

关键词: 量子信息; 普适量子克隆; 相位量子克隆; 腔 QED;

中图分类号: O431 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)01-0115-04

Realization of the unified quantum cloning machine

XUE Li¹, REN Yi-Ming¹, JIANG Nian-Quan²

(1. School of Electronic and Information Engineering, Hubei University of Science and Technology, Xianning 437100, China;
2. College of Physics and Electric Information, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: Based on cavity QED, we first propose the unified scheme to implement the 1→2 optimal universal quantum cloning machine for arbitrary input state, the asymmetric 1→2 phase-covariant cloning and the 1→3 optimal asymmetric economical phase-covariant quantum cloning machine for the equatorial input state. During the cloning process, due to the interaction of atoms with a highly detuned cavity mode, the scheme is insensitive to the cavity decay and thermal field.

Keywords: Quantum information; Universal quantum cloning; Phase covariant cloning; Cavity QED

1 引言

1982年, Wootters 和 Zurek 证明了量子不可克隆性, 即要对任意一个未知的量子态进行精确的克隆^[1]是不可能实现的. 量子不可克隆性使得量子密码具有比经典密码更安全的保密性^[2]. 由此, 量子克隆激发了众多科学家们的研究兴趣. 由于精确克隆不可能实现, 人们就关注于非完全的量子克隆. 1996年, Buzek 和 Hillery 提出了近似克隆机^[3]; 1998年, 段路明和郭光灿这两位中国科技大学的教授提出了概率克隆方案^[4]. 随着对量子克隆的深入研究, 关于量子克隆实现的具

体方案已经在腔 QED 和量子光学中被提出来^[5,6], 而且在量子光学和核磁共振两个体系中, 实验上也已经得到了实现.

为描述二维空间中的一个未知的纯态 $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\varphi}|1\rangle$, 通常可以由振幅 $\alpha, \beta (\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 并且满足 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$) 和相位 $\varphi (\varphi \in [0, 2\pi))$ 来描述. 若该量子态作为输入态, 根据其所携带的量子态信息, 一般可以将近似克隆机分为三大类: 一类是输入的量子态的信息完全未知的, 即振幅 α, β 和相位 φ 完全未知的量子克隆称为普适量子克隆 (UQCM)^[7]; 第二类是已知振幅 α, β , 相位 φ 未知的量子克隆称为相位克隆 (PCC)^[8]; 第三类是已

知相位 φ , 振幅 α, β 未知的量子克隆称为实量子态克隆^[9]. 若根据克隆后每个克隆态的保真度是否相等, 又可以分为: 对称性克隆和非对称性克隆.

本文主要研究如下所示的一个幺正变换:

$$\begin{aligned} |0\rangle|00\rangle &\rightarrow a|001\rangle + b|010\rangle + c|100\rangle, \\ |1\rangle|00\rangle &\rightarrow a|110\rangle + b|101\rangle + c|011\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, a, b, c 是任意的复数, 三者满足归一化条件 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$, 等式左边的第一个比特表示待克隆态的基矢, 其它两个是初态为 $|0\rangle$ 的空白态.

假设待克隆的量子态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$), 很明显上式描写的就是最优的非对称性的经济型的 $1 \rightarrow 3$ 相位协变克隆(AEPC)^[10-12]. 三份克隆态的最大保真度为

$$F_1 = \frac{1}{2} + ab, F_2 = \frac{1}{2} + ab, F_3 = \frac{1}{2} + bc. \quad (2)$$

若 $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$, 非对称性的经济型的 $1 \rightarrow 3$ 相位协变克隆将会变为对称性的克隆, 且每份克隆态的保真度为 $F = \frac{5}{6}$.

若 $a = \sqrt{\frac{2}{3}}, b = c = \sqrt{\frac{1}{6}}$, 等式(1)将变成

$$\begin{aligned} |0\rangle|00\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}(|01\rangle + |10\rangle)|0\rangle, \\ |1\rangle|00\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}(|10\rangle + |01\rangle)|1\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

即可以实现任意单比特量子态的最优的 $1 \rightarrow 2$ 普适克隆(UQCM).

若 $a = \sqrt{\frac{1}{2}}, b = p, c = q$ ($p, q \geq 0, p^2 + q^2 = 1$), 即可以实现非对称性的 $1 \rightarrow 2$ 相位协变克隆. 如果 $p = q = \frac{1}{2}$, 最优的非对称性的 $1 \rightarrow 2$ 相位协变克隆将会变成对称性的克隆.

基于以上分析可以看出, 等式(1)所示的是一个神奇的、特殊的、有用的幺正变换, 接下来将探讨如何在腔 QED 系统中具体地实现该幺正变换.

2 实现幺正变换及结果

考虑三能级原子系统, 将原子的基态记为 $|0\rangle$, 两激发态分别记作 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$, 其中能级

$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 与腔场之间可以发生相互作用, 而能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的跃迁频率远失谐于腔场的频率, 所以当原子和腔场相互作用时, 能级 $|2\rangle$ 的量子态将不会发生变化. 除此之外, 能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 与经典场 1 之间可以发生相互作用, 能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 与经典场 2 之间可以发生共振相互作用. 在相互作用的绘景中, 若腔场与原子间没有能量交换, 系统的哈密顿量为^[12]

$$H = \lambda \sum_{i,j=1}^N [|1_j\rangle\langle 1_j| a a^\dagger - |0_j\rangle\langle 0_j| a^\dagger a + (S_i^\dagger S_j^- + S_i^- S_j^\dagger)] (i \neq j), \quad (4)$$

其中, $\lambda = \frac{\delta^2}{2g}$, g 表示腔场和原子间的耦合强度, δ 是原子两能级间的跃迁频率与单模腔场的频率之差; a 和 a^\dagger 是腔场的消灭和产生算符; $S_j^- = |0_j\rangle\langle 1_j|$, $S_j^+ = |1_j\rangle\langle 0_j|$ 分别是原子的下降和上升算符. 若腔场为真空态, 则有效哈密顿量为

$$H = \lambda \sum_{i,j=1}^N [|1_j\rangle\langle 1_j| + (S_i^\dagger S_j^- + S_i^- S_j^\dagger)], \quad (i \neq j), \quad (5)$$

若一个原子被一经典场 1 驱动, 在能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 间共振跃迁, 那么系统的哈密顿量为^[13]

$$H_i = \Omega_{01} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \quad (6)$$

这里, Ω_{01} 是能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的拉比震荡频率. 能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 在该哈密顿作用下, 将发生如下演化

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \cos\theta|0\rangle - i\sin\theta|1\rangle, \\ |1\rangle &\rightarrow -i\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\theta = \Omega_{01}t$. 同理, 如果经典场 2 让能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 发生共振跃迁, 此时系统的哈密顿量可以改成

$$H_i = \Omega_{12} (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|), \quad (8)$$

Ω_{12} 是能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的拉比震荡频率.

为了实现等式(1)中的幺正变换, 本方案中认为能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 用来储存量子信息, 能级 $|2\rangle$ 是一个辅助能级. 现假设原子 1 携带输入信息, 其初态为 $|\Psi_m\rangle = (\alpha|0\rangle + e^{i\varphi}\beta|1\rangle)_1$, 其中 α, β 是振幅参数 ($\alpha, \beta \in R$ 并且 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$), φ 是相位因子 ($\varphi \in [0, 2\pi)$). 另外两个原子初态为 $|0\rangle_2 |3\rangle_3$. 因此, 整个原子系统的初态可以写为 $|\Psi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + e^{i\varphi}\beta|1\rangle)_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3$. 等式(1)中的幺正变换的实现方案如图 1 所示. 图中 C_1, C_2, C_3 和 C_4 是四个真空腔, F_1 和 F_2 表示两个经典

场. 经典场 F_1 可以让原子可以演化成 $|0\rangle \rightarrow \cos\theta|0\rangle - i\sin\theta|1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -i\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$. 而经典场 F_2 能实现能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的共振跃

迁, $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$. 算子 $U(\theta_j)$ 表示的是对 j 原子沿 z 轴旋转 θ_j 角.

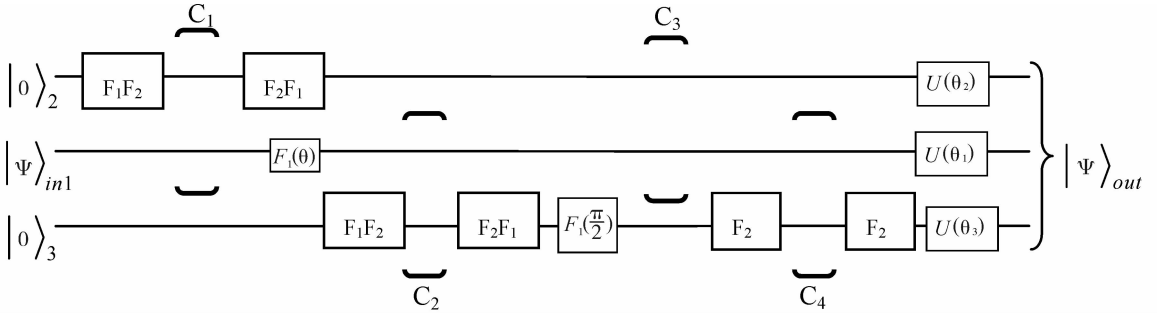


图 1 么正变换的实现方案图
Fig. 1 The schematic diagram of implementing the unitary transformation Eq. (1).

方案具体实现步骤如下:

第一步: 让原子 2 依次穿过两个经典场 F_1 和 F_2 . 通过选择合适的振幅和频率, 经典场 F_1 可以让原子 2 可以演化成 $|0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)_2$, $|1\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|0\rangle + |1\rangle)_2$. 接着让原子 2 和原子 1 同时进入真空腔 C_1 . 此时, 原子与真空腔场相互作用的哈密度量如等式(5)所示, 量子态的演化规律如下:

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |0\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow e^{-i\lambda t} [\cos(\lambda t) |1\rangle_1 |0\rangle_2 - \\ &\quad i\sin(\lambda t) |0\rangle_1 |1\rangle_2], \\ |1\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |0\rangle_1 |2\rangle_2, \\ |1\rangle_1 |2\rangle_2 &\rightarrow e^{-i\lambda t} |1\rangle_1 |2\rangle_2. \end{aligned} \quad (9)$$

当相互作用的时间为 $t_1 = \frac{\pi}{\lambda}$, 量子态 $|0\rangle_1 |0\rangle_2$, $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ 和 $|0\rangle_1 |2\rangle_2$ 没有发生改变, 但是量子态 $|1\rangle_1 |2\rangle_2$ 演化后多了一个相位因子 $e^{-i\pi}$. 原子与腔场相互作用后, 让原子 2 依次通过经典场 F_2 和 F_1 . 这时系统的量子态变为

$$|\varphi_1\rangle = \alpha|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + i\beta e^{i\varphi} |1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3. \quad (10)$$

第二步: 让原子 1 和经典场 $F_1(\theta)$ 相互作用. 系统的量子态将演变成

$$|\varphi_2\rangle = \alpha(\cos\theta|000\rangle - i\sin\theta|100\rangle) + \beta e^{i\varphi}(i\cos\theta|110\rangle + \sin\theta|010\rangle). \quad (11)$$

第三步: 让原子 3 经历类似于第一步中原子 1 经历的过程. 作用后, 三个原子的量子态为:

$$|\varphi_3\rangle = \alpha(\cos\theta|000\rangle + \sin\theta|101\rangle) - \beta e^{i\varphi}(\cos\theta|111\rangle - \sin\theta|010\rangle), \quad (12)$$

第四步: 让原子 1 和经典场 $F_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 作用后,

量子态将发生如下转变: $|0\rangle \rightarrow -i|1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -i|0\rangle$. 此时, 系统量子态为:

$$|\varphi_4\rangle = \alpha(\cos\theta|001\rangle + \sin\theta|100\rangle) - \beta e^{i\varphi}(\cos\theta|110\rangle - \sin\theta|011\rangle), \quad (13)$$

需要说明的是这里忽略了一个整体相位因子 $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

第五步: 原子 1 和 2 同时进入腔 C_3 . 经过时间 t_2 相互作用后, 系统的量子态为

$$\begin{aligned} |\varphi_5\rangle = &\alpha[\cos\theta|001\rangle + e^{-i\lambda t_2} \sin\theta(\cos\lambda t_2 |100\rangle - \\ & i\sin\lambda t_2 |010\rangle)] - \beta e^{i\varphi}[e^{-i2\lambda t_2} \cos\theta|110\rangle - \\ & e^{-i\lambda t_2} \sin\theta(\cos\lambda t_2 |011\rangle - i\sin\lambda t_2 |101\rangle)], \end{aligned} \quad (14)$$

比较等式(14)和等式(1)发现, 两者的量子态形式相同, 除了相位因子稍有不同. 于是对原子 1, 2 和 3 沿 z 轴进行旋转操作, 它们的旋转角度分别为 θ_1, θ_2 和 θ_3 . 对应的旋转算符可表示为

$$U_j = \exp[(-i\theta_j)(|1_j\rangle\langle 1_j| - |0_j\rangle\langle 0_j|)]. \quad (15)$$

比较等式(14)和等式(1)发现, 为了消除相位因子的差异, θ_1, θ_2 和 θ_3 需要满足以下条件

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &= -\lambda t_2 - \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \\ \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &= -\lambda t_2 - \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3, \\ \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &= -2\lambda t_2 - \pi - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3, \\ \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &= -\lambda t_2 - \pi + \theta_1 - \theta_2 - \theta_3, \\ \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &= -\lambda t_2 - \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3. \end{aligned} \quad (16)$$

基于矩阵理论分析发现方程组(16)无解. 因此, 需要做进一步处理.

第六步: 让经典场 F_2 作用在原子 3 上. 接着让原子 1 和 3 同时进入真空腔 C_4 . 原子和腔场相互作用 $t_3 = \frac{\pi}{\lambda}$ 后, 继而让经典场 F_2 再次作用在原子 3

上. 最后我们得到整个原子系统的量子态为

$$|\varphi_6\rangle = \alpha[\cos\theta|001\rangle + e^{-i\lambda t_2}\sin\theta(\cos\lambda t_2|100\rangle - i\sin\lambda t_2|010\rangle)] - \beta e^{i\varphi}[e^{-i2\lambda t_2}\cos\theta|110\rangle + e^{-i\lambda t_2}\sin\theta(\cos\lambda t_2|011\rangle + i\sin\lambda t_2|101\rangle)], \quad (17)$$

计算发现, 若取 $\theta_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda t_2}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda t_2}{2}, \theta_3$

$= -\frac{\pi}{4}$, 系统的整体相位因子为 $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3$, 若将

其忽略, 原子系统量子态将变为

$$|\varphi_7\rangle = \alpha(\cos\theta|001\rangle + \sin\theta\sin\lambda t_2|010\rangle + \sin\theta\cos\lambda t_2|100\rangle) + \beta e^{i\varphi}(\cos\theta|110\rangle + \sin\theta\sin\lambda t_2|101\rangle + \sin\theta\cos\lambda t_2|011\rangle), \quad (18)$$

令 $a = \cos\theta, b = \sin\theta\sin\lambda t_2, c = \sin\theta\cos\lambda t_2$, 等式(18)将改写成

$$|\varphi_7\rangle = \alpha(a|001\rangle + b|010\rangle + c|100\rangle) + \beta e^{i\varphi}(a|110\rangle + b|101\rangle + c|011\rangle). \quad (19)$$

至此, 已经实现了等式(1)所示的么正变换. 这也就意味着通过控制原子与腔场相互作用的时间, 它可以实现任意的输入量子态的普适的最优量子克隆, 赤道输入量子态的非对称性的 $1 \rightarrow 2$ 相位协变克隆和最优的非对称性的经济型的 $1 \rightarrow 3$ 相位协变克隆.

在整个过程中, 它忽略了原子的自发辐射的影响. 基于目前的腔 QED 技术, 对于主量子数为 49, 50, 51 的里德伯原子, 它们的辐射时间大约是 $T_r = 3 \times 10^{-2} \text{ s}$. 假设每个里德伯原子与腔场的耦合强度都为 $g_0 = 2\pi \times 24 \text{ kHz}$ ^[14], 那么克隆所需要的时间大约是 $t = \frac{3\pi}{\lambda} + t_2 = \frac{6\pi\delta}{g^2} + t_2$. 可以通过对参数 δ 和时间 t_2 的合适的选择, 让总时间 t 远远小于原子的辐射时间 $T_r = 30 \text{ ms}$ ^[15]. 最重要的是, 这个克隆过程是在大失谐相互作用的模型进行的, 所以腔损和热场对方案是没有影响的, 进一步保证了实验的可行性.

3 结 语

在腔 QED 中, 让原子依次与腔场和经典场的相互作用, 通过控制原子与腔场的作用时间, 实现了等式(1)所示的通用的么正变换. 这意味着一个多用途的量子克隆机的实现. 也就是说它分别实现任意的输入量子态的普适的最优量子克隆, 赤道输入量子态的非对称性的 $1 \rightarrow 2$ 相位协变克隆和最优的非对称性的经济型的 $1 \rightarrow 3$ 相位协变克隆. 由于克隆所需要的时间远小于原子辐射时间,

所以它在实验上是一个可行的量子克隆方案. 鉴于当前量子信息学的发展和实验技术的进步, 量子通信也逐步地应用于实际生活中, 因此, 本方案在未来的量子通信中应具有一定的应用价值.

参考文献:

- [1] Wootters W K, Zurek W H. A single quantum cannot be cloned [J]. Nature, 1982, 299: 802.
- [2] 杨光, 聂敏, 杨武军. SIP 协议量子身份认证与密钥协商方案[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 87.
- [3] Duzek V, Hillery M. Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem [J]. Phys Rev A, 1996, 54: 1844.
- [4] Duan L M, Guo G C. A Probabilistic cloning machine for replicating two nonorthogonal state [J]. Phys Lett A, 1998, 243: 261.
- [5] Wu T, Fang B L, Ye L. Quantum cloning machines and their implementation in physical systems [J]. Chin Phys B, 2013, 22: 110311.
- [6] Fan H, Wang Y N, Jing L, Yue J D, Shi H D, Zhang Y L, Mu L Z. Quantum cloning machines and the applications [J]. Phys Rep, 2014, 544: 241.
- [7] Duzek V, Hillery M. Universal optimal cloning of arbitrary quantum states: from qubits to quantum registers [J]. Phys Rev Lett, 1998, 81: 5003.
- [8] Ariano G M D, Macchiavello C. Optimal phase-covariant cloning for qubits and qutrits [J]. Phys Rev A, 2003, 67: 042306.
- [9] Navez P, Cerf N J. Cloning a real d-dimensional quantum state on the edge of the no-signaling condition [J]. Phys Rev A, 2003, 68: 032313.
- [10] 张蕾, 强稳朝. 基于腔 QED 制备 W 纠缠态 [J]. 原子与分子物理学报, 2015, 32: 115.
- [11] 罗岸, 刘小娟, 彭朝晖, 等. 逻辑门操作腔内多光子过程中原子最大相干性恢复 [J]. 原子与分子物理学报, 2016, 33: 21.
- [12] Zou X B, Li K, Guo G C. Linear optical scheme for implementing the universal and phase-covariant quantum cloning machines [J]. Phys Lett A, 2007, 366: 36.
- [13] Hagley E, Maitre X, Nogues G, et al. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms [J]. Phys Rev Lett, 1997, 79: 1.
- [14] Huang X H, Lin G W, Ye M Y. Realization of a singlet state via adiabatic evolution of dark eigenstates [J]. Opt Commun, 2008, 281: 4545.
- [15] Rauschenbeutel A, Nogues G, Osnaghi S et al. Step-by-step engineered multiparticle entanglement [J]. Science, 2000, 288: 2024.