doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.05.021

一类(2+1)维非线性扰动方程的孤立子行波摄动解

冯依虎[1]，陈贤峰[2]，莫嘉琪[3]

(1. 亳州学院电子与信息工程系，亳州 236800；2. 上海交通大学理学院，上海 200240；
3. 安徽师范大学数学计算机科学学院，芜湖 241003)

摘　要：用行波变换和摄动理论研究了一类广义高维扰动破裂孤子方程. 首先，通过行波变换，将高维问题简化为一维方程，其次，讨论了对应典型的破裂方程，并利用非线性方程待定系数投射方法得到了它的孤子精确解. 再利用摄动方法得到了广义非线性扰动破裂方程的孤立子行波渐近解. 最后，举例讨论了用本方法得到的孤立子渐近解的精度，说明了本方法得到的渐近解简单而有效，便于推广到对其它非线性物理模型的求孤立子渐近解. 本文使用的方法具有普遍意义，它还能使用于非线性物理和其他实际问题.

关键词：扰动；精确解；渐近解

中图分类号：O302　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)05-1021-05

The solitary travelling wave perturbation solution to a class of (2+1) dimensions nonlinear disturbed equation

FENG Yi-Hu[1], *CHEN Xian-Feng*[2], *MO Jia-Qi*[3]

(1. Department of electronics and Information Engineering, Bozhou College, Bozhou 236800, China;
2. Collage of Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;
3. School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

Abstract: A class of higher dimensions disturbed breaking solitary equation is studied using the travelling wave transformation and perturbation theory. Firstly, from a travelling wave transformation, the higher dimension problem changes to one dimension problem. Next, the corresponding typical breaking equation is considered, and its exact solitary solution is obtained by using the undetermined coefficients projectile method. Then, using the perturbation method, the solitary travelling wave asymptotic solution to a disturbed breaking equation is found. Finely, it illustrates that, the obtained asymptotic solutions are simple and valid by using this method. And in this paper, the method has a universal significance. It is also used for nonlinear physics and other physical problems.

Keywords: Disturb; Exact solution; Asymptotic solution

1　引　言

非线性方程及其孤波理论在原子－分子学[1]，光学[2]，等离子学[3,4]，量子力学[5-6]，流体力学[7,8]等学科中有重要的应用，是学术界研究的重点之一. 例如在脉冲[9]、扰动[10]、混沌[11]、鸭解[12]、反

收稿日期：2016-03-30

基金项目：国家自然科学基金(41275062,11202106)；安徽省教育厅自然科学重点基金(KJ2015A347)；安徽省高校优秀青年人才支持计划重点项目(gxyqZD2016520).

作者简介：冯依虎(1982－)，男，安徽潜山人，硕士，副教授，主要研究方向为应用数学. E-mail：fengyihubzsz@163.com

通讯作者：莫嘉琪. E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

应扩散[13]、激光[14]等方面许多学者作了一系列的究. 研究孤立子是非线性问题的一个重要方面[15,16]. 近年来，有较多的非线性方程孤立子的求解方法，譬如截断函数法，齐次平衡法，双线性法等[11,12,17,18]. 非线性方程的定性及定量相结合的各种求解方法也不断地出现[19-28]. 作者等也研究了一些非线性孤立子波、大气物理、激光脉冲等问题[13,14,29-40].非线性方程及其孤立子解的一种研究方法是孤立子扰动理论的渐近方法. 它是用扰动理论的近似展开式将非线性孤立子方程转化为较容易求解的问题来求解. 因此摆脱了所依赖的直接方法. 例如对于一类(2+1)维 ZK 方程的非线性波的动力学和孤子解,被有效地应用于非常强的外部磁场中的离子声波，并利用拓展的非标准 Painleve 方法得到了相应方程的三种新的孤子解[18]. 本文的方程是上述研究对象的拓广,并以此来研究解的孤立子行为.

本文是研究一类广义扰动破裂孤立子方程，先用双曲函数待定系数求出无扰动情形下的孤立子精确解，然后结合摄动理论,利用无扰动孤立子精确解来求出在扰动情形下的孤立子行波渐近解. 本方法的优点在于思路直接简明，计算简单,可得到解的较高近似度. 它还有一个优点,就是求出的近似解具有解析性态. 因而该方法不但能进行定量方面的分析,而且还能再继续进行定性方面的分析研究. 此方法使用面广，适用许多非线性问题，具有较广的研究前景.

2 扰动孤立子方程

讨论以下一类(2+1)-维广义扰动破裂孤立子方程：

$$u_{xt}+(a_1u_x+a_2u_y+a_3u_t)u_{xy}-a_4u_{xxxy}=\varepsilon f(u), \tag{1}$$

其中，t 为时间变量，x,y 为空间变量，$a_i(i=1,2,3,4)$为参数；$\varepsilon>0$ 为小参数，f 为广义破裂方程的扰动项，并设扰动项 f 为有界的光滑函数. 破裂孤立子方程在理论物理等学科中都有很重要的应用. 这类方程解的孤立子和混沌等行为，可参见文献[8,18].

先作如下行波变换

$$z=k_1x+k_2y+k_3t, \tag{2}$$

这里 $k_i(i=1,2,3)$为常数. 这时方程(1)为

$$k_1k_3u_{zz}+(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_1k_2u_zu_{zz}-a_4k_1^3k_2u_{zzzz}=\varepsilon f(u). \tag{3}$$

方程(3)当 $f=0$ 时的非扰动情形为

$$k_1k_3u_{zz}+(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_1k_2u_zu_{zz}-a_4k_1^4u_{zzzz}=0. \tag{4}$$

设 $w=u_z$,由方程(4)式得

$$k_3w+\frac{1}{2}(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_2w^2-a_4k_1^3w_{zz}=C_1.$$

选取常数 $C_1=0$. 即

$$k_3w+\frac{1}{2}(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_2w^2-a_4k_1^3w_{zz}=0, \tag{5}$$

设非线性方程(5)具有如下形式的解

$$w=A_1\bar{w}+A_2\bar{w}^2+B(1-\bar{w}^2)^{1/2}, \tag{6}$$

其中 A_1,A_2,B 为待定常数，而 $\bar{w}$ 是方程

$$\bar{w}_z=-\bar{w}(1-\bar{w}^2)^{1/2} \tag{7}$$

的解. 不难知道，方程(7)有解为

$$\bar{w}=\operatorname{sech}z. \tag{8}$$

由(6)，(8)式得：

$$w=A_1\operatorname{sech}z+A_2\operatorname{sech}^2z+B\tanh z$$

$$w_z=-A_1\operatorname{sech}z\tanh z-2A_2\operatorname{sech}^2z\tanh z+B\operatorname{sech}^2z$$

$$w_{zz}=A_1\operatorname{sech}z-A_1\operatorname{sech}^3z+4A_2\operatorname{sech}^2z\tanh^2z-2A_2\operatorname{sech}^4z-2B\operatorname{sech}^2z\tanh z$$

将上述诸式代入(5)式

$$k_3(A_1\operatorname{sech}z+A_2\operatorname{sech}^2z+B\tanh z)+\frac{1}{2}(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_2(A_1^2\operatorname{sech}^2z+A_2^2\operatorname{sech}^4z+B^2(1-\operatorname{sech}^2z)+2A_1A_2\operatorname{sech}^3z+2A_1B\operatorname{sech}z\tanh z+2A_2B\operatorname{sech}^2z\tanh z)-a_4k_1^3(A_1\operatorname{sech}z-A_1\operatorname{sech}^3z+4A_2\operatorname{sech}^2z-6A_2\operatorname{sech}^4z-2B\operatorname{sech}^2z\tanh z)=0.$$

合并同类函数项，并令其系数为零，可得到：

$$A_1=B=0,k_3=4a_4k_1^3,A_2=-\frac{12a_4k_1^3}{(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)k_2}.$$

于是由(6),(8)式

$$w=-\frac{12a_4k_1^3l_2\operatorname{sech}^2z}{(a_1k_1+a_2k_2+4a_3a_4k_1^3)k_2}.$$

再由 $w=u_z$,便得到广义非线性扰动破裂方程(4)的一个孤立子精确解：

$$u=-\frac{12a_4k_1^3\tanh z}{(a_1k_1+a_2k_2+4a_3a_4k_1^3)k_2}. \tag{9}$$

取 $a_i=k_1=1(i=1,2,3,4),k_2=-1$,由(9)决

定的破裂方程(4)的一个孤立子解 $u(z)$ 的曲线参见图 1 所示.

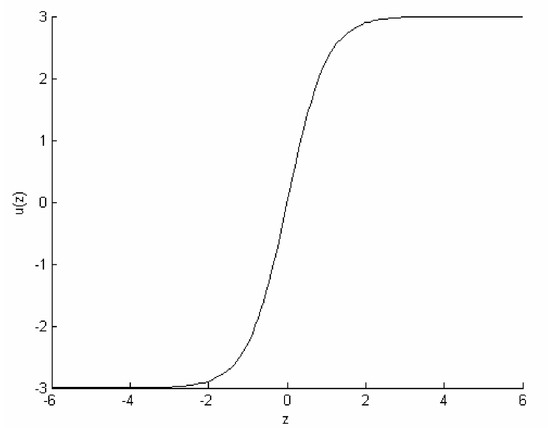

图 1　破裂方程(4)的一个孤子解 $u_0(z)$ 的曲线

Fig. 1　The curve of solitary solution $u_0(z)$ for breaking equation (4)

由(2)式，便得到非扰动破裂方程(4)的一个孤立子行波精确解

$$u(x,y,t) = 3\tanh(x - y + 4t). \tag{10}$$

上式当 $t = 0$ 时的曲面图形参见图 2 所示，当 $y = 0$ 时的曲面图形参见图 3 所示.

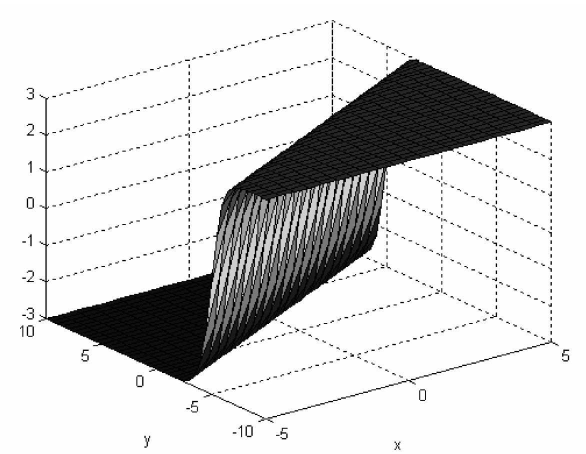

图 2　破裂方程(4)的一个孤子解 $u_0(0,x,y)$ 的曲面

Fig. 2　The surface of solitary solution $u_0(0,x,y)$ for breaking equation (4)

3　扰动孤立子方程渐近解

设非线性广义扰动孤立子方程(3)的渐近解为

$$u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(z)\varepsilon^i. \tag{11}$$

将(11)式代入扰动方程(3)，按 ε 展开方程(3)的非线性项，并合 ε 的同次幂项，且令 ε 的各系数为零. 由 ε^0 的系数为零，得到扰动方程(3)的退化方程(4). 故退化孤立子解为

$$u_0(z) = -\frac{12a_4k_1^2\tanh z}{(a_1k_1 + a_2k_2 + 4a_3a_4k_1^3)k_2}. \tag{12}$$

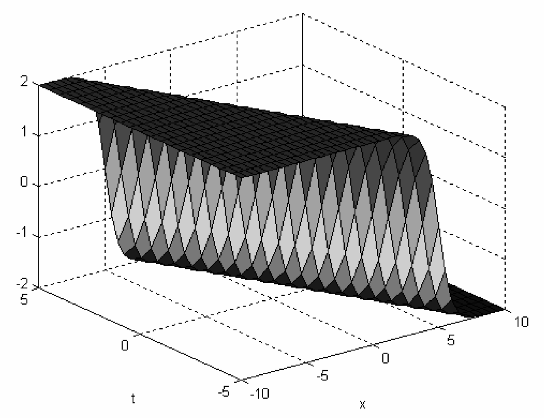

图 3　破裂方程(4)的一个孤子解 $u_0(t,x,0)$ 的曲面

Fig. 3　The surface of solitary solution $u_0(t,x,0)$ for breaking equation (4)

将(11)式代入扰动方程(3)，按 ε 的幂展开非线性项，则 $\varepsilon^i(i = 1,2,\cdots)$ 的系数为零为

$$k_1k_3u_{izz} + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)k_1k_2(u_{0z}u_{izz} + u_{iz}u_{0zz}) - a_4k_1^4u_{izzzz} = F_i, \tag{13}$$

其中 $F_i(i=1,2,\cdots)$ 为依次已知的函数. 由线性方程(13)，并设初始条件为零. 可逐次求得解 $u_i(z)$ $(i=1,2,\cdots)$. 再将 $u_i(z)(i=0,1,2,\cdots)$ 代入关系式(11)，并考虑到(12)式，我们便得到非线性广义扰动破裂孤立子方程(3)的渐近解 $u(z)$：

$$u(z) = -\frac{12a_4k_1^2\tanh z}{(a_1k_1 + a_2k_2 + 4a_3a_4k_1^3)k_2} + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(z)\varepsilon^i. \tag{14}$$

将行波变换(2)：$z = k_1x + k_2y + k_3t = k_1x + k_2y + 4a_4k_1^2t$ 代入(14)式，便得到(2+1)维广义扰动破裂孤子方程(1)的一个行波渐近解：

$$u(x,y,t) = -\frac{12a_4k_1^2\tanh(k_1x + k_2y + 4a_4k_1^2t)}{(a_1k_1 + a_2k_2 + 4a_3a_4k_1^3)k_2} + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(k_1x + k_2y + 4a_4k_1^3t)\varepsilon^i. \tag{15}$$

再由摄动理论知[23]，上述孤立子行波解(15)具有如下的渐近性态：

$$u(x,y,t) = -\frac{12a_4k_1^2\tanh(k_1x + k_2y + 4a_4k_1^2t)}{(a_1k_1 + a_2k_2 + 4a_3a_4k_1^3)k_2} + \sum_{i=1}^{m} u_i(k_1x + k_2y + 4a_4k_1^2t)\varepsilon^i + O(\varepsilon^{m+1}), 0 < \varepsilon << 1. \tag{16}$$

4 举 例

设(2+1)-维广义非线性扰动破裂孤立子方程(1)中的系数 $a_i=1(i=1,2,3,4)$，且扰动项为 $f=\varepsilon\sin u$，这时由方程(1)为：

$$u_{xt}+(u_x+u_y+u_t)u_{xy}-u_{xxxy}=\varepsilon\sin u, \quad (17)$$

在行波变换(2)下，选取 $k_1=1$，$k_2=-1$，$k_3=4$，并由(10)式，相应的广义非线性扰动破裂方程(3)为

$$u_{zz}-u_z u_{zz}+u_{zzzz}=\varepsilon\sin u. \quad (18)$$

由(12)式，得到广义非线性扰动破裂方程(18)的零次近似孤立子解：

$$u_{0per}(\xi)=3\tanh z. \quad (19)$$

在行波变换：$\xi=x-y+4t$ 下，(2+1)-维非线性破裂孤子方程(17)的零次近似行波解 u_0 波为：

$$u_{0per}(x,y,t)=3\tanh(x-y+4t). \quad (20)$$

由(16)式，可得：

$$4u_{1zz}+u_{1z}u_{1zz}-u_{1zzzz}=\sin u_0. \quad (21)$$

由线性方程(21)在零初始条件下可以得到解 $u_1(z)$. 这时由(13)式，非线性扰动破裂方程(18)的一次近似孤立子解见下(22)：

$$u_{1per}(z)=3\tanh z+\varepsilon u_1(z). \quad (22)$$

上述函数(22)式当 $\varepsilon=0.5$ 时的曲线如图 4 所示.

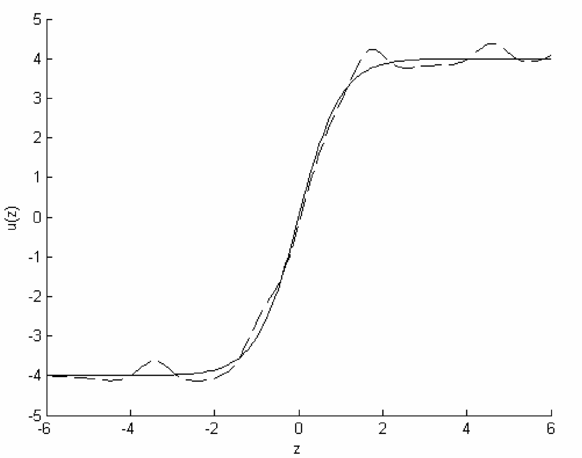

图 4 破裂方程(18)的一个孤子解的零次渐近曲线(实线) $u_{0per}(z)$ 和一次渐近曲线(虚线) $u_{1per}(z)$

Fig. 4 A zero-th order asymptotic curve(real line) of solitary solution and first order asymptotic curve(imaginary line) for breaking equation (18)

由图 4 可知，非线性扰动破裂孤立子方程(21)的一次近似孤立子解 $u_{1per}(z)$ 是对初始孤立子函数 $u_{0per}(z)$ 的一个校正.

用摄动方法得到对应的一次行波孤立子渐近解见下：

$$u_{1per}(x,y,t)=3\tanh(x-y+4t)+\varepsilon u_1(x-y+4t). \quad (23)$$

由摄动理论知[20,21]，对应的(2+1)-维非线性广义扰动破裂孤立子方程(17)的精确解 $u_{exa}(x,y,t)$ 具有一次渐近估计式见下：

$$u_{exa}(x,y,t)=3\tanh(x-y+4t)+\varepsilon u_1(x-y+4t)+O(\varepsilon^2), 0<\varepsilon<<1. \quad (24)$$

还可用上述方法得到(2+1)-维广义扰动破裂孤子方程(17)的行波解 $u_{exa}(x,y,t)$ 精度更高的高次渐近估计式，见下：

$$u_{exa}(x,y,t)=3\tanh(x-y+4t)+\sum_{i=1}^{n}u_i(x-y+4t)+O(\varepsilon^{n+1}),$$
$$n=2,3,\cdots,0<\varepsilon<<1, \quad (25)$$

其中 $u_i(i=1,2,\cdots)$ 依次为对应于线性方程(13)在零初始条件下的行波解，

5 结 论

本文是采用孤立子待定系数投射方法来求得非线性扰动破裂方程的初始近似的孤立子函数 u_0. 然后用摄动方法来得到广义非线性扰动破裂方程的各次渐近解. 它保证了能得到原非线性方程在要求的精度范围的孤立子行波渐近解. 本方法与其它方法，包括用简单的模拟的方法比较，其优点在于论述的思路明确，步骤简单，适用面广，得到的解具有较好的精度. 求出的近似解是解析式. 因而还能进行定量、定性方面的分析研究. 我们还可将本文中得到的渐近解和模拟解相结合的方法应用于理论物理、电路分析、生化问题等其它模型的研究.

参考文献：

[1] 李琴兰，陈浩. 关于修正的一维分子晶体模型的孤子激发[J]. 原子和分子物理学报，2015，32：139.

[2] 陈海军，张耀文. 空间调制作用下 Bessel 型光晶格中物质波孤立子的稳定性 [J]. 物理学报，2014，63：220303.

[3] 欧阳成，姚静荪，石兰芳，等. 一类尘埃等离子体孤波解 [J]. 物理学报，2014，63：110203.

[4] 蔺福军，廖晶晶，朱云. q-非广延分布等离子体中的离子声孤波 [J]. 天文学报，2015，56：17.

[5] 许永红，韩祥临，石兰芳，等. 薛定谔扰动耦合系统孤波的行波近似解法 [J]. 物理学报，2014，63：090304.

[6] 套格图桑，伊丽娜. 广义 Zakharov-Kuzentsov 的类孤子新解 [J]. 量子电子学报，2015，32：290.

[7] 詹华税，袁洪君. 边界退化的对流扩散方程 [J].

吉林大学学报，2015，53：353.

[8] 冯依虎，石兰芳，汪维刚，等. 一类广义非线性强阻尼扰动发展方程的行波解 [J]. 应用数学和力学，2015，36：315.

[9] Parkes E J. Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation [J]. Chaos Soliton Fract，2008，38，154.

[10] Ma S H，Qiang J C，Fang J P. Annihilation solitons and chaotic solitons for the (2+1)-dimensional breaking soliton system [J]. Commun Theor Phys，2007，48：662 .

[11] 雷军，马松华，方建平. (2+1)维破裂孤子方程的多方孤子解及其混沌行为[J]. 物理学报，2011，60：050302.

[12] 徐云，张建峡，徐霞，等. Canard 轨迹原理 [J]. 物理学报，2008，57：4029.

[13] Mo J Q. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems [J]，Sci China Ser A，1989，32：1306.

[14] Mo J Q. Homotopiv mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier [J]. Sci China Ser G，2009，59：1007.

[15] McPhaden M J，Zhang D. Slowdown of the meridional overturning circulation in the upper Pacific Ocean [J]. Nature，2002，415：603.

[16] Gu D F，Philander S G H. Interdecadal climate fluctuations that depend on exchanges between the tropics and extratropics [J]. Science，1997，275：805.

[17] 套格图桑，斯仁道尔吉. 构造变系数非线性发展方程精确解的一种方法 [J]. 物理学报，2009，58：2121.

[18] 杨征，马松华，方建平. (2+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的精确解和孤子结构 [J]. 物理学报，2011，60：040508.

[19] Chang K W，Howes F A. Nonlinear Singular perturbation phenomena：theory and applications [M]. Berlin：Spring-Verlag，1984.

[20] de Jager E M，Jiang F R. The theory of singular perturbation [M]. Amsterdam：North-Holland Publishing Co，1996.

[21] Barbu L，Morosanu G. Singularly perturbed boundary-value problems [M]. Basel：Birkhauserm Verlag AG，2007.

[22] Martinez S，Wolanski N A. A singular perturbation problem for a quasi-linear operator satisfying the natural condition of Lieberman[J]. SIAM J Math Anal，2009，41：318.

[23] Kellogg R B，Kopteva N. A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain [J]. J Differ Equ，2010，248：184.

[24] Tian C R，Zhu P. Existence and asymptotic behavior of solutions for quasilinear parabolic systems [J]. Acta Appl Math，2012，121：157.

[25] Skrynnikov Y. Solving initial value problem by matching asymptotic expansions [J]. SIAM J Appl Math，2012，72：405.

[26] Samusenko P F. Asymptotic integration of degenerate singularly perturbed systems of parabolic partial differential equations [J]. J Math Sci，2013，189：834.

[27] 高婷，韩晓玲. 三阶无穷多点边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：45.

[28] 孔凡超，鲁世平. Rayleigh 型时滞平均曲率方程周期解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：19.

[29] Mo J Q. Approximate solution of homotopic mapping to solitary wave for generalized nomlinear KdV system [J]. Chin Phys Lett，2009，26：010204.

[30] Mo J Q. Generalized Variational iteration solution of soliton for disturbed KdV equation[J]. Commun Theor Phys，2010，53：440.

[31] 莫嘉琪，陈贤峰. 一类广义非线性扰动色散方程孤立波的近似解[J]. 物理学报，2010，50：1403.

[32] Mo J Q，Lin S R. The homotopic mapping solution for the solitary wave for a generalized nonlinear evolution equation [J]. Chin Phys B，2009，18：3628.

[33] Mo J Q. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. Commun Theor Phys，2011，55：387.

[34] Mo J Q，Chen X F. Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation [J]. Chin Phys B，2010，19：100203.

[35] Mo J Q. A singularly perturbed reaction diffusion problem forthe nonlinear boundary condition with two parameters [J]. Chin Phys B，2010，18：010203.

[36] 莫嘉琪. 一类非线性扰动发展方程的广义迭代解 [J]. 物理学报，2011，60：020202.

[37] Feng Y H，Mo J Q. The shock asymptotic solution for nonlinear elliptic equation with two parameters [J]. Math Appl，2015，27：579.

[38] Feng Y H，Liu S D. Spike layer solutions of some quadratic singular perturbation problems with high-order turning points [J]. Math Appl，2014，27：50.

[39] 冯依虎，石兰芳，汪维刚，等. 一类广义非线性强阻尼扰动发展方程的行波解 [J]. 应用数学和力学，2015，36：315.

[40] 冯依虎，石兰芳，汪维刚，等. 一类大气尘埃等离子体扩散模型研究[J]. 应用数学和力学，2015，36：639.