

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.024

联合增光子二模圆态的非经典性质

王中结, 台启佳

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

摘要: 理论上研究了联合增光子二模圆态的互相关函数, 亚泊松分布等非经典特性. 数值计算表明激发数和叠加态数对这些特性有明显的影响. 当叠加态数 $N = 2$ 时, 交叉关联函数随单模平均光子数的增大而单调减小, 并且联合增光子二模圆态存在关联效应. 随着叠加态数的增加, 二模光场间的关联效应将减弱. 当叠加数 $N = 2$ 时, 只有当激发数 $s \leq 2$ 时, 且单模平均光子数大于某阈值时, 联合增光子二模圆态才存在亚泊松分布效应.

关键词: 量子光学; 联合增光子双模圆态; 互关联函数; 亚泊松分布

中图分类号: O431 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)02-0353-04

Nonclassical properties of nonlocal coherent photon-added two-mode circular state

WANG Zhong-Jie, TAI Qi-Jia

(College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: We investigate theoretically the nonclassical properties, such as cross correlation function and sub-Poissonian distribution effect, for the nonlocal coherent photon-added two-mode circular state. The results show the superposition number and excitation number have significant effect on these properties. When the superposition number $N = 2$, the value of cross correlation function decreases monotonously with the increasing of the average photon number of single-mode and the nonlocal coherent photon-added two-mode circular state has the cross correlation effect. Increasing the superposition number, the cross correlation effect will be reduced. When the superposition number $N = 2$, sub-Poissonian distribution effect of the nonlocal coherent two-mode photon-added circular state can be observed only when single-mode average photon number is greater than a certain threshold value.

Keywords: Quantum optics; Nonlocal coherent photon-added two-mode circular state; Cross correlation function; Sub-Poissonian distribution

1 引言

在过去的几年中, 增光子量子态已被广泛研究. 这类量子态就是利用光子的产生算符(或逆湮灭算符 a^{-1}) 从左侧作用在一些量子态上而创建出来的^[1-9]. 大部分的工作集中在这些量子态的各种非经典性质的研究, 例如, Dodonov 和 Xin 等人分

别独立地研究了增光子奇偶相干态的非经典效应^[4,5]. 文献[9]研究了增光子奇偶相干态的非经典特性. 他们发现: a^{-1} 不论作用于奇相干态还是偶相干态都不存在振幅压缩效应, 但存在反聚束效应. 上述这些研究也表明这样一个事实, 即通过把玻色产生算符 a^+ 或者玻色湮灭算符的逆算符 a^{-1} 作用到某光场态上可有效改变这个光场态的量子

收稿日期: 2016-08-26

基金项目: 安徽省自然科学基金(090412060)

作者简介: 王中结(1962-), 男, 安徽潜山人, 教授, 主要从事量子光学等方面的研究. E-mail: wuliwzj@mail.ahnu.edu.cn

特性. 增光子量子态的制备目前也已提出了各种方案, 例如, 基于量子光场与原子相互作用的微扰方案^[1] 或用 BBO 晶体和单光子探测器组合方案^[8].

多模纠缠连续变量态在量子通讯中有重要的应用^[10-12]. 近来, 人们对纠缠光源提出了许多改进方案, 例如, 可以通过减去或者添加光子^[13-15] 或通过使用通断光子检测器^[16] 的方式对高斯型光场进行操作, 从而改善光场的纠缠品质. Lee 等人分析了用算符 $(\mu a^+ + \nu a)^s$ 作用到二模压缩真空态后所得到的量子态的纠缠特性, 发现作用后的二模压缩真空态的量子纠缠得到增强^[17]. Xu 等人理论上分析了用算符 $(aa^+)^s$ 作用到压缩真空态后所得到的量子态的非经典特性^[18]. Hu 等人研究了用算符 $(\mu a^+ + \nu b^+)^s$ 作用到二模压缩真空态后所得到的量子态(联合增光子二模压缩真空态)的统计特性^[19], 发现对称的联合增光子二模压缩真空态比单模光子情况下有更强的相关性. 这些结果表明, 通过产生算符和湮灭算符作用于二模压缩真空态, 可以明显影响二模压缩真空态的量子统计特性.

在本文中, 我们将用算符 $(a^+ + b^+)^s$ 作用到二模圆态, 得到所谓的联合增光子二模圆态, 然后分析这个态的量子统计特性, 如互相关函数, 亚泊松分布效应等. 结果表明激发数 s 和叠加态数 N 对这些属性有显著的影响.

2 二模联合增光子圆态

定义二模联合增光子圆态为

$$|\psi\rangle = N_s^{-1/2} (a^+ + b^+)^s \sum_{k=1}^N |\alpha_k, \alpha_k\rangle \quad (1)$$

式中 N_s 是归一化系数, $|\alpha_k, \alpha_k\rangle = |\alpha e^{i2\pi k/N}\rangle_a \otimes |\alpha e^{i2\pi k/N}\rangle_b$ 是二模相干态, a^+ 和 b^+ 分别是二模光场的产生算符, s 是激发数, N 为相干态的叠加数目. 下面, 我们计算归一化常数 N_s .

$$N_s = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle \alpha_l, \alpha_l | (a + b)^s (a^+ + b^+)^s | \alpha_k, \alpha_k \rangle = 2^s s! \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N e^{-|\alpha_l - \alpha_k|^2} L_s(-2\alpha_l^* \alpha_k) \quad (2)$$

式中 $L_s(-2\alpha_l^* \alpha_k)$ 是 s 阶拉盖尔多项式.

3 交叉关联函数

我们将分析联合增光子相干态的交叉关联特

性. 对于二模连续变量态, 描述二模光场之间的互关联函数定义如下^[18]

$$g_{ab} = \frac{\langle a^+ b^+ ab \rangle}{\langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle} - 1 \quad (3)$$

如果 g_{ab} 大于零, 就表示光场的两个模式是关联的, 反之则表示有反关联效应. 应用公式(3)和有关相干态的知识, 我们容易计算下列量的矩

$$\langle aa^+ \rangle = N_s^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle \alpha_l, \alpha_l | (a + b)^s aa^+ (a^+ + b^+)^s | \alpha_k, \alpha_k \rangle = N_s^{-1} (\frac{1}{2} N_s + \frac{1}{4} N_{s+1}) \quad (4)$$

$$\langle bb^+ \rangle = \langle aa^+ \rangle = N_s^{-1} (\frac{1}{2} N_s + \frac{1}{4} N_{s+1}) \quad (5)$$

$$\langle aa^+ bb^+ \rangle = N_s^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle \alpha_l, \alpha_l | (a + b)^s a b a^+ b^+ (a^+ + b^+)^s | \alpha_k, \alpha_k \rangle = N_s^{-1} (\frac{1}{2} N_s + \frac{1}{16} N_{s+2}) \quad (6)$$

利用光子产生算符和湮灭算符的对易关系和公式(4), (5), (6), 容易求得

$$\langle a^+ b^+ ab \rangle = \langle a b a^+ b^+ \rangle - \langle aa^+ \rangle - \langle bb^+ \rangle + 2 = (\frac{1}{16} \frac{N_{s+2}}{N_s} - \frac{1}{2} \frac{N_{s+1}}{N_s} + \frac{1}{2}) \quad (7)$$

将公式(4), (5), (6), (7)代入公式(3), 可得关联函数精确表达式

$$g_{ab} = (\frac{N_{s+1}}{N_s})^{-2} (\frac{N_{s+2}}{N_s} - 2 \frac{N_{s+1}}{N_s} - 4) - 1 \quad (8)$$

图 1 显示了当 $N = 2$ 时且在不同激发数 s 条件下交叉关联函数随单模平均光子数的变化. 从图 1 中我们可以看出: 交叉关联函数随单模平均光子数的增大而单调减小, 并且不论激发数 s 为何值, 交叉关联函数总是大于零. 这表明联合增光子二模相干态存在关联效应. 随着激发数 s 的增大, 这种关联效应将减弱. 当 $N = 5$ 时, 交叉关联函数随单模平均光子数的变化并非单调地减小(参见图 2). 通过比较图 1 和图 2 可以看出, 随着 N 的增大, 二模光场之间存在关联效应将减弱.

4 亚泊松分布

我们来研究二模联合增光子圆态的反聚束效应. 下面, 针对模式 a 定义曼德尔 Q_a 因子函数^[19]

$$Q_a = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} - \langle a^+ a \rangle \quad (9)$$

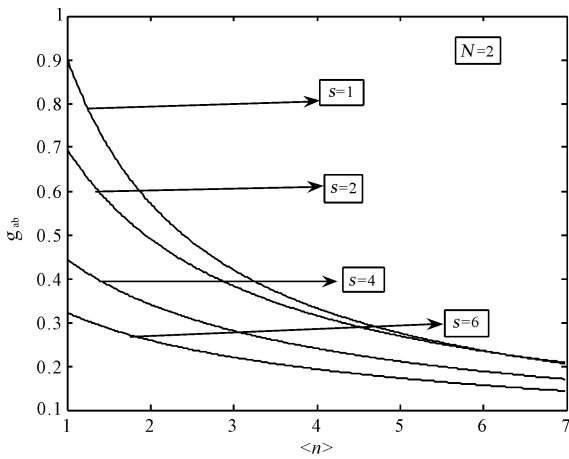


图 1 当 $N = 2$ 时增光子二模圆态的互关联函数与单模平均光子之间的关系曲线

Fig. 1 Relation curve between cross correlation function of the nonlocal photon-added two-mode circular state and average photon number of single mode $\langle n \rangle$ when $N = 2$

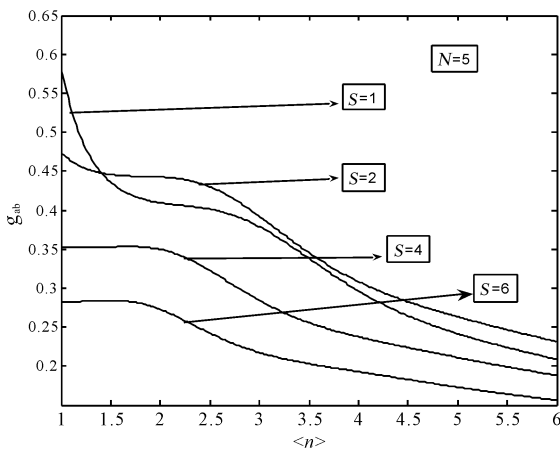


图 2 当 $N = 5$ 时增光子二模圆态的互关联函数与单模平均光子之间的关系曲线

Fig. 2 Relation curve between cross correlation function of the nonlocal photon-added two-mode circular state and average photon number of single mode $\langle n \rangle$ when $N = 5$

若 $Q_a > 1$,我们就说模式 a 光场呈现超泊松分布,若 $Q_a = 1$,我们就说模式 a 光场为泊松分布,若 $Q_a < 1$,我们就说模式 a 光场呈亚泊松分布,具有非经典效应。同样,应用公式(1)和有关相干态的知识,我们容易计算下列量的矩

$$\langle a^2 a^{+2} \rangle = N_s^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \langle \alpha_l, \alpha_l | (a + b)^s a^2 a^{+2} (a^+ + b^+)^s | \alpha_k, \alpha_k \rangle = N_s^{-1} \left(\frac{1}{16} N_{s+2} + \frac{1}{2} N_{s+1} + \frac{1}{2} N_s \right) \quad (10)$$

$$\langle b^2 b^{+2} \rangle = \langle a^2 a^{+2} \rangle \quad (11)$$

利用对易关系 $[a, a^+] = 1$ 和公式(4),可得

$$\begin{aligned} \langle (a^+ a)^2 \rangle &= \langle a^2 a^{+2} \rangle - 3 \langle a a^+ \rangle + 1 = \\ &= N_s^{-1} \left(\frac{1}{16} N_{s+2} - \frac{1}{4} N_{s+1} - \frac{1}{2} N_s \right) + 1 \quad (12) \end{aligned}$$

最后,利用对易关系式和公式(4)和(12),可求得 Q_a 因子函数的精确表达式

$$Q_a = \frac{N_{s+2} - 4N_{s+1} - 7N_s}{4N_{s+1} - 8N_s} - \frac{N_{s+1}}{4N_s} + \frac{1}{2} \quad (13)$$

图 3 显示了当 $N = 2$ 时 Q_a 因子函数在不同激发数条件下随单模平均光子数的变化。从图 3 中我们可以看出:当激发数 $s \leq 2$ 时,单模平均光子数大于某一阈值时 Q_a 因子函数将小于 1。这表明联合增光子二模圆态具有亚泊松分布。随着激发数 s 的增大,这种阈值也随之减小。对于较大的激发数,这种阈值减小到零。另一方面,比较图 1 和图 2 还可以看出,叠加数 N 越大,这种阈值也随之增大。

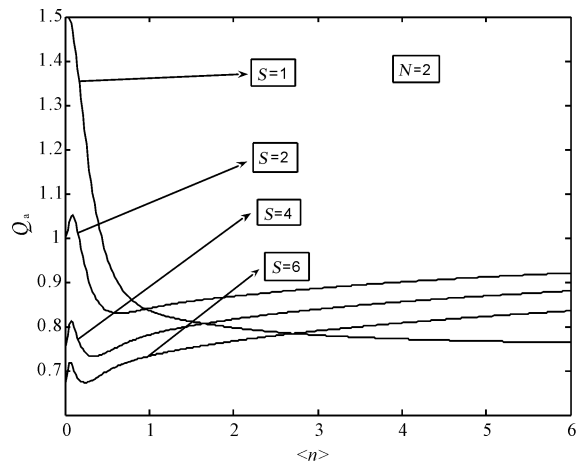


图 3 当 $N = 2$ 时增光子二模圆态的互关联函数与单模平均光子之间的关系曲线

Fig. 3 Relation curve between Q_a function of the nonlocal photon-added two-mode circular state and average photon number of single mode $\langle n \rangle$ when $N = 2$

5 结 论

总之,我们理论上分析了联合增光子二模圆态光场的关联函数、亚泊松分布等非经典特性。数值计算表明激发数对这些特性有明显的影响。当叠加数 $N = 2$ 时,交叉关联函数随单模平均光子数的增大而单调减小,而且不论激发数 s 为何值,交叉关联函数总是大于零,即联合增光子二模相干态存在关联效应。增大叠加数 N ,二模光场间的关联效应将减弱。当叠加数 $N = 2$ 时,只有当激发数 s

≤ 2 时,且单模平均光子数大于某一阈值时 Q_a 因子函数将小于 1,即联合增光子二模圆态具有亚泊松分布。

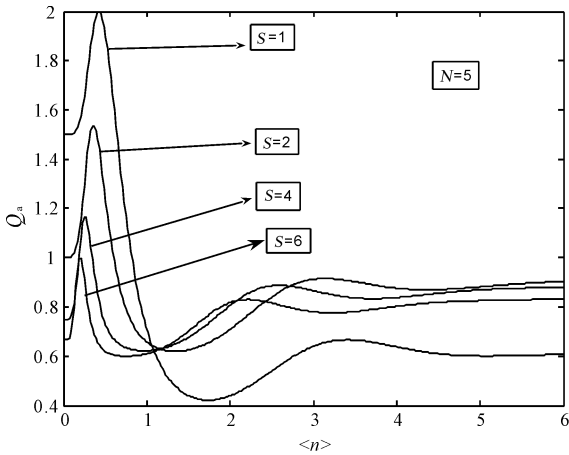


图 4 当 $N = 5$ 时增光子二模圆态的互关联函数与单模平均光子之间的关系曲线

Fig. 4 Relation curve between Q_a function of the nonlocal photon-added two-mode circular state and average photon number of single mode $\langle n \rangle$ when $N = 5$

参考文献:

[1] Agarwal G S, Tara K. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state [J]. Phys Rev A, 1991, 43: 492.
 [2] Roy A K, Mehta C L. Boson inverse operators and associated coherent states [J]. Quantum Semiclass Opt, 1995, 7: 877.
 [3] Mehta C L, Roy A K, Saxena G M. Eigenstates of two-photon annihilation operators [J]. Phys Rev A, 1992, 46: 1565.
 [4] Dodonov V V, Korennoy Y A, Man'ko V I, *et al.* Non-classical properties of states generated by the excitations of even/odd coherent states of light [J]. Quantum Semiclass Opt, 1996, 8: 413.
 [5] Xin Z Z, Duan Y B, Zhang W, *et al.* Excited two-photon coherent state of the radiation field [J]. J Phys B: At Mol Opt, 1996, 29: 4493.

[6] 路洪, 郭光灿. 叠加激发相干态的非经典性质[J]. 物理学报, 1999, 48: 1644.
 [7] 陶孟仙, 路洪, 余卫龙. 增加光子纠缠相干态的统计性质[J]. 物理学报, 2002, 51: 1996.
 [8] Dai Q and Jing H. Photon-added entangled coherent state [J]. Int J Theor Phys, 2008, 47: 2716.
 [9] 杨庆怡, 卫联福, 良恩. 玻色算符的逆算符及其相关的奇偶相干态[J]. 物理学报, 2003, 52: 1390.
 [10] Eisert J, Scheel S, Plenio M B. Distilling Gaussian states with Gaussian operations is impossible [J]. Phys Rev Lett, 2002, 89: 137903.
 [11] Giedke G, Cirac J I. Characterization of Gaussian operations and distillation of Gaussian states [J]. Phys Rev A, 2002, 66: 032316.
 [12] Fiurasek J. Gaussian transformations and distillation of entangled Gaussian states [J]. Phys Rev Lett, 2002, 89: 137904.
 [13] Wenger J, Tualle-Brouiri R, Grangier P. Non-Gaussian statistics from individual pulses of squeezed light [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 153601.
 [14] Kim M S. Recent developments in photon-level operations on travelling light fields [J]. J Phys B, 2008, 41: 133001.
 [15] Hu LY, Fan H Y. Statistical properties of photon-subtracted squeezed vacuum in thermal environment [J]. J Opt Soc Am B, 2008, 25: 1955.
 [16] Olivares S, Paris M G A, Bonifacio R. Teleportation improvement by inconclusive photon subtraction [J]. Phys Rev A, 2003, 67: 032314.
 [17] Lee S Y, Ji S W, Kim H J, *et al.* Enhancing quantum entanglement for continuous variables by a coherent superposition of photon subtraction and addition [J]. Phys Rev A, 2011, 84: 012302.
 [18] Xu X X, Hong C Y, Hu L Y, *et al.* Non-Gaussianity of photon-added-then-subtracted squeezed vacuum state [J]. Optik, 2012, 123: 16.
 [19] Hu L Y, Zhang Z M. Statistical properties of coherent photon-added two-mode squeezed vacuum and its inseparability [J]. J Opt Soc Am B, 2013, 30: 518.