

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.01.012

标度分形分抗逼近电路的零极点分布规律

施卜椿, 高小龙, 袁 晓

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

摘 要: 针对标度分形分抗逼近电路的结构特点与数学特征, 求解并整理了典型标度分形分抗逼近电路对应的非正则标度方程, 利用传输矩阵算法并借助矩阵实验室(Matlab)精确求解其零极点的值, 发现并验证了零极点的值在电路节数中间段具有线性的分布规律, 列出并整理零极点线性分布公式. 求解并整理了典型分形分抗逼近电路对应的非正则标度方程.

关键词: 标度分形分抗; 零极点分布; 传输矩阵; 非正则标度方程

中图分类号: TP211 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2019)01-0057-08

Zero-pole distribution rules of scaling fractal fractance approximate circuits

SHI Bu-Chun, GAO Xiao-Long, YUAN Xiao

(College of Electronics & Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: For the structural and mathematical features of some scaling fractal fractance approximation circuits, the irregular scaling equations of the typical scaling circuits have been solved and trimmed. Accurate zero-pole values are computed by using the transmission matrix algorithm and the matrix labority. It is found and verified the linear distribution rule for the zero-pole value which locates in the middle of the circuit section. Not only the linear distribution formula of zeros and poles are given, but also the irregular scaling equations corresponding to the typical scaling fractal fractance approximation circuits have been solved and sorted.

Keywords: Scaling fractal fractance; Zero-pole distribution; Transmission matrix; Irregular scaling equation

1 引 言

分抗逼近电路的研究在二十世纪五六十年代已经开始, 随着分数阶微积分理论与应用的快速发展, 近年来成为研究热点, 特别是在忆阻的应用研究中^[1,2]. 早在1959年, Morrison使用四种基本的标准RC元件对构造出了具有分数阶运算特性的Morrison分形分抗逼近电路^[3,4], 1960年, Carlson在研究线性自适应伺服控制系统时, 为实现分数算子, 提出了具有负半阶运算性能的Carlson分形格分抗逼近电路^[5], 二十世纪七十年代, Oldham等

人根据电解分析化学中所发现的新异极谱现象^[6], 提出具有负半阶运算性能的RC分形链分抗逼近电路——Oldham I型分形链分抗逼近电路^[7-12].

近年来发展出的标度拓展理论^[13,14], 对原有半阶分形分抗逼近电路进行标度拓展, 构造出能够实现任意实数阶的标度分形分抗逼近电路, 即将逼近结果从半阶算子 $s^{1/2}$ 扩展到任意阶算子 s^μ ($0 < |\mu| < 1$)^[15,16].

由无源元件构建的分形分抗逼近电路的阻纳函数是一个有理函数, 其零极点在运算平面上的分布情况就完全确定了对应电路的基本性质. 标度分

收稿日期: 2018-01-17

基金项目: 成都市科技计划项目(12DXYB255JH-002); 四川省科技支撑计划(2013SZ0071)

作者简介: 施卜椿(1993-), 男, 江苏启东人, 硕士研究生, 研究方向为信号与信息处理. E-mail: shibuchun101@163.com

通讯作者: 袁晓. E-mail: yuanxiao@scu.edu.com

形分抗逼近电路是一个用来实现任意分数阶运算性能的电路系统,求解其零极点分布是研究与理解此类分抗逼近系统的频域性能、运算性能以及逼近性能等的数学基础.与未标度的分抗逼近电路不同^[3-5],描述标度分形分抗逼近电路的极限阻抗是非正则标度方程,其解析解现阶段还无法利用数学工具精确求出.而解析解的精确表达式与零极点分布是具有密切的内在关系,所以求得零极点分布对于求解非正则标度方程也会有很大的推动.

本文主要解决标度分形分抗逼近电路的零极点的求解,以及通过阶数与标度因子不同取值下的实验发现零极点分布规律.

2 标度分形分抗逼近电路的数学描述——非正则标度方程

2.1 典型标度分形分抗逼近电路

典型标度分形分抗逼近电路主要有分形梯、分形串、分形链和分形格等结构类型(如图 1).图 1 各标度电路中的参量 α 为电阻递进比, β 为电容递进比^[6,11,13-16],变量 s 是运算变量(也称拉普拉斯变量或复频率变量),正整数参量 k 表示电路的规模大小(也即电路的基本节个数).参量 α 与 β 统称为电路的标度特征参量,并称 $\sigma = \alpha\beta$ 为电路的标度因子^[14].

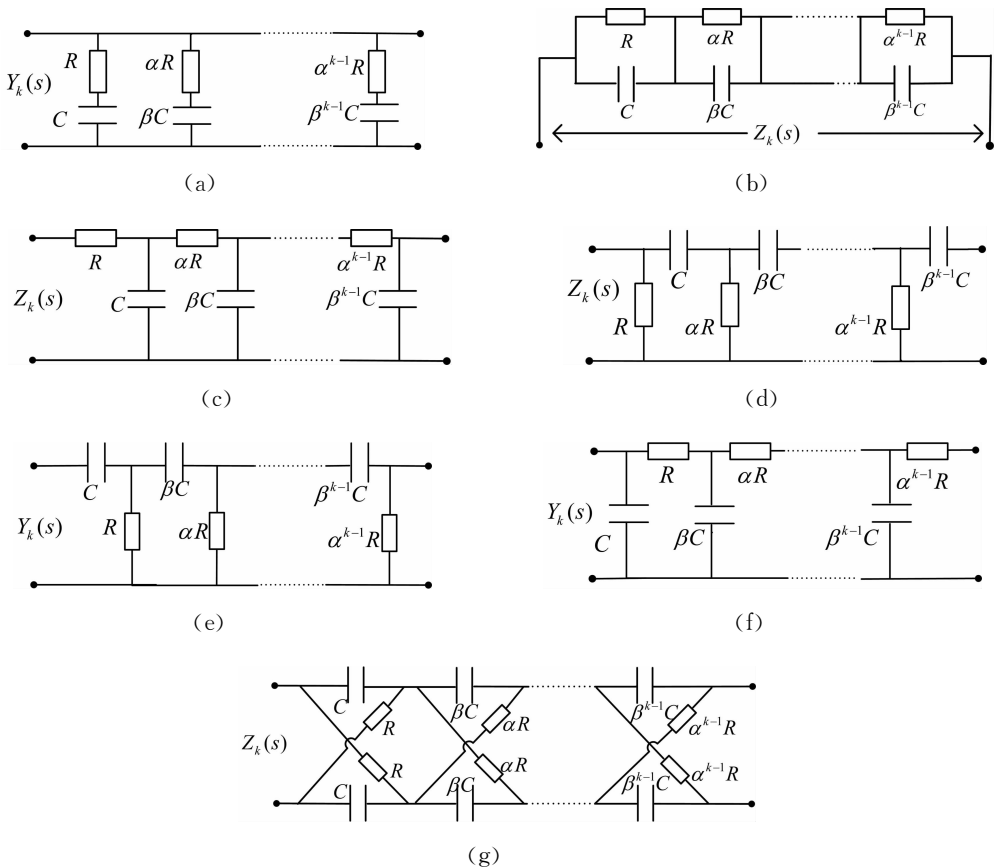


图 1 四类标度分形分抗逼近电路

Fig. 1 Four kinds of scaling fractal fractance approximation circuits

(a) Morrison 分形梯; (b) Morrison 分形串; (c) Liu-Kaplan I 型分形链; (d) Liu-Kaplan II 型分形链; (e) Liu-Kaplan III 型分形链; (f) Liu-Kaplan IV 型分形链; (g) 标度分形格

(a)Morrison fractalladder; (b)Morrison fractal chuan; (c)Liu-Kaplan I type fractal chain; (d) Liu-Kaplan II type fractal chain; (e) Liu-Kaplan III type fractal chain; (f) Liu-Kaplan IV type fractal chain; (g) Fractal lattice.

对于有限规模 k 的分形分抗逼近电路,根据其电路结构特点,它们完全由其输入导纳函数 $Y_k(s)$ 或阻抗函数 $Z_k(s)$ 描述.为了方便,人们将阻抗(impedance)函数、导纳(admittance)函数统称为阻纳函数(immittance)^[11,12].

2.2 阻纳函数的迭代公式与迭代电路

归一化处理可将物理量转化成量纲为 1 的量,且能将所研究的复杂问题简化成数学问题,使问题的表示简单化,也使问题的研究本质化.

考虑 Morrison 分形梯电路(图 1(a)),由于其

并联结构特点, 该电路采用输入导纳函数 $Y_k(s)$ 来描述其结构特点, 如下式(1)所示.

$$Y_k(s) = \frac{1}{Z_k(s)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha^i R + \frac{1}{\beta^i C s}}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (1)$$

对式(1)进行归一化处理, $\omega = RCs$, $y_k(\omega) = RY_k\left(\frac{\omega}{RC}\right)$, 得式(1)的归一化形式.

$$y_k(\omega) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\beta^i \omega}{\sigma^i \omega + 1}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (2)$$

由式(2)画出归一化的 Morrison 分形梯原型电路如图 2(a)所示, 在数学上, 式(2)可等价表示为

$$y_k(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\beta^i (\sigma \omega)}{1+\sigma^i (\sigma \omega)}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (3)$$

即有标度迭代公式为

$$y_k(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega} + \frac{1}{\alpha} y_{k-1}(\sigma \omega), k \in \mathbf{N}^+ \quad (4)$$

故电路基本节数 k 在此处也是迭代次数. 由式(4)得到 Morrison 分形梯电路的等价简化电路——标度迭代电路(图 2(a))与 Hill 标度方程^[3,4].

$$y(\omega) = \frac{1}{1/\omega + 1} + \frac{1}{\alpha} y(\sigma \omega) \quad (5)$$

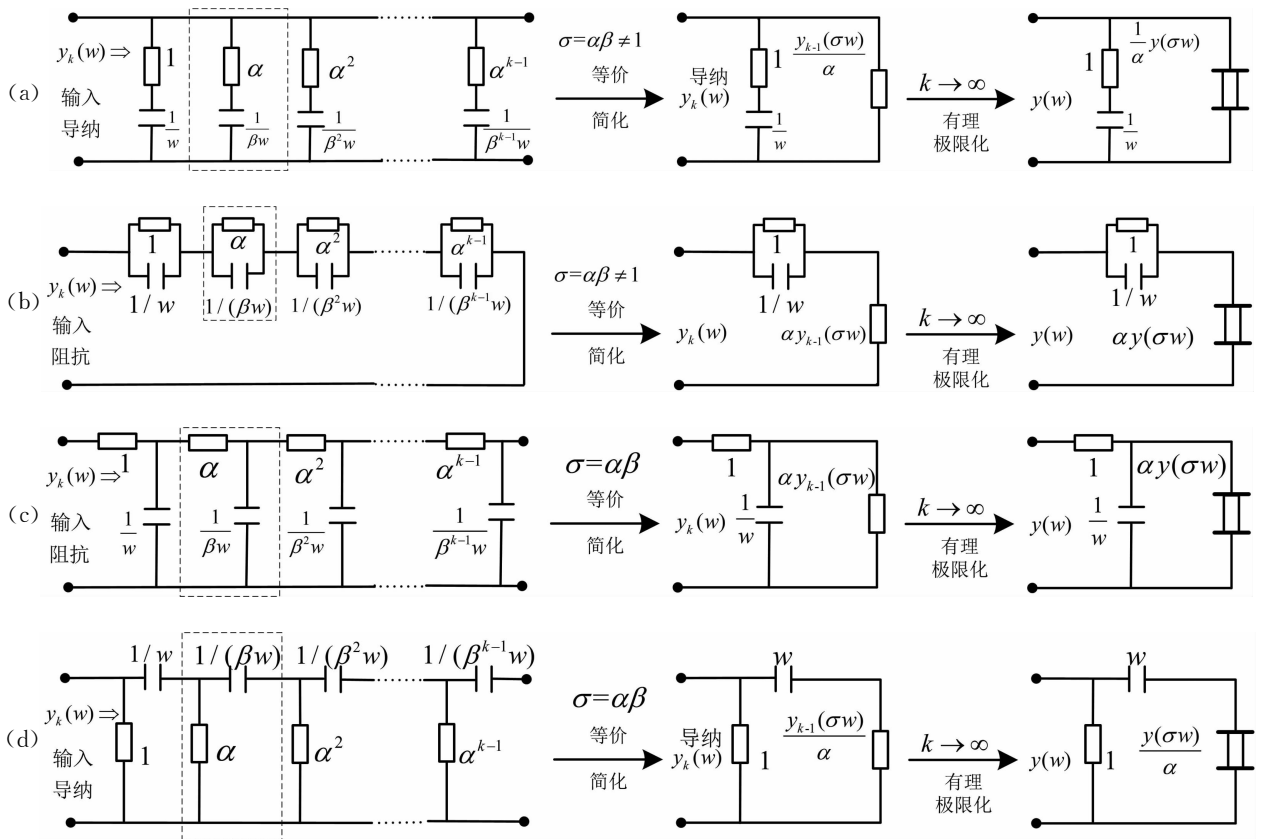
对式(5)近似求解后可得到非正则标度方程^[6,20,21]的解析解的 Liu 氏粗解以及对应的 Liu 氏运算算 μ_{Liu} , 除 Morrison 分形梯电路, 图 2 其他 6

种电路均可写出其归一化阻纳函数的迭代公式及其对应非正则标度方程. 将以上七种标度分形分抗逼近电路的归一化迭代函数以及有理极限化后的非正则标度方程整理如表 1 所示.

表 1 典型标度分形反抗逼近电路的数学描述

Tab. 1 The mathematical descriptions of typical scaling fractal fractance circuits.

分抗类型	阻纳函数	非正则标度方程	有效频段	标度方程类型
Morrison 分形分抗	并联模式	$y(\omega) = \frac{1}{1+1/\omega} + \frac{1}{\alpha} y(\sigma \omega)$	低频有效	Hill 标度方程
	串联模式	$y(\omega) = \frac{1}{1+\omega} + \alpha y(\sigma \omega)$	高频有效	
Liu-Kaplan 分形分抗	I 型	阻抗函数	$y(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega + \frac{1}{\alpha y(\sigma \omega)}}$	低频有效
			$y(\omega) = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha y(\sigma \omega)}}$	高频有效
	II 型	导纳函数	$y(\omega) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\alpha y(\sigma \omega)}}$	高频有效
			$y(\omega) = \omega + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha y(\sigma \omega)}}$	低频有效
Carlson 格型	阻抗函数	$y(\omega) = \frac{2 + (1+\omega)\alpha y(\sigma \omega)}{\omega + 1 + 2\omega\alpha y(\sigma \omega)}$	全频有效	格型标度方程



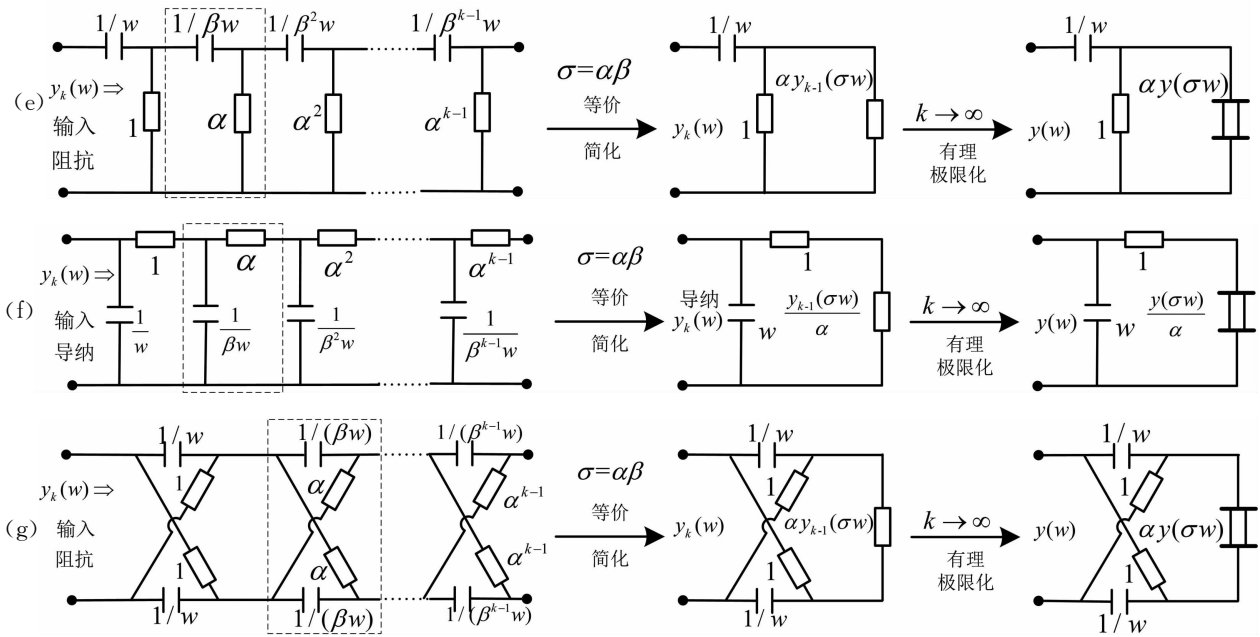


图 2 归一化标度分形阻抗逼近电路及其等价简化电路——标度迭代电路

Fig. 2 Normalized scaling fractal fractance approximation circuits and its equivalent simplified circuit—scaling iterating circuit.

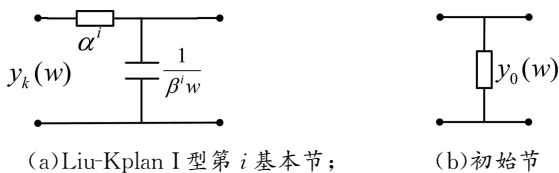
(a) Morrison 并联模式——分形梯电路: $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \sigma = \alpha\beta \neq 1$; (b) Morrison 串联模式——分形串电路: $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \sigma = \alpha\beta \neq 1$; (c) Liou-Kaplan I 型分形链电路: $1 < \alpha, 1 < \beta, 1 < \sigma = \alpha\beta$; (d) Liou-Kaplan II 型分形链电路: $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \sigma = \alpha\beta \leq 1$; (e) Liou-Kaplan III 型分形链电路: $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \sigma = \alpha\beta \leq 1$; (f) Liou-Kaplan IV 型分形链电路: $1 < \alpha, 1 < \beta, 1 < \sigma = \alpha\beta$; (g) 分形格模式——标度分形格电路: $0 < \alpha, 0 < \beta, 0 < \sigma = \alpha\beta$.

(a) Morrison parallel mode—fractal ladder circuit: $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \sigma = \alpha\beta \neq 1$; (b) Morrison serial mode—fractal chain circuit: $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \sigma = \alpha\beta \neq 1$; (c) Liou-Kaplan I type fractal chain circuit: $1 < \alpha, 1 < \beta, 1 < \sigma = \alpha\beta$; (d) Liou-Kaplan II type fractal chain circuit: $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \sigma = \alpha\beta \leq 1$; (e) Liou-Kaplan III type fractal chain circuit: $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \sigma = \alpha\beta \leq 1$; (f) Liou-Kaplan IV type fractal chain circuit: $1 < \alpha, 1 < \beta, 1 < \sigma = \alpha\beta$; (g) fractal lattice mode—scaling fractal lattice circuit: $0 < \alpha, 0 < \beta, 0 < \sigma = \alpha\beta$.

3 求解零极点

3.1 传输矩阵法

本文利用传输矩阵法求解标度分形链和标度分形格电路的零极点. 以标度分形链电路中的 Liou-Kaplan I 型(图 2c)为例, 在求解其传输矩阵时, 可以将其分成两部分, 即基本节与初始节如图 3 所示, i 代表第 i 个基本迭代节^[6].



(a) Liou-Kaplan I 型第 i 基本节; (b) 初始节

图 3 标度分形电路基本迭代节与初始节

Fig. 3 The basic iterating section and initial section of scaling fractal circuit

根据电路理论中传输参量矩阵的求解原理, 可求得 I 型电路的第 i 节传输矩阵, 为

$$\tau_i = \begin{bmatrix} E_i & F_i \\ G_i & H_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^i \omega + 1 & \alpha^i \\ \beta^i \omega & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, 节数 $i=0 \sim k-1$, 故 Liou-Kaplan I 型分形链电路, 其传输矩阵 T_k 由各基本节传输矩阵 τ_i 与初始节 τ_0 累乘得到

$$\tau_i = \begin{bmatrix} A_i(\omega) & B_i(\omega) \\ C_i(\omega) & D_i(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^i \omega + 1 & \alpha^i \\ \beta^i \omega & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$T_k = \prod_{i=0}^{k-1} \tau_i \cdot \tau_0 = \prod_{i=1}^{k-1} \begin{bmatrix} E_i & F_i \\ G_i & H_i \end{bmatrix} \cdot \tau_0 \quad (k \in \mathbf{N}^+) \quad (8)$$

同理可求得 II-IV 型以及标度格型的第 i 节归一化传输矩阵, 将其列于表 2.

表 2 Liou-Kaplan I-IV 型及标度格型电路第 i 节归一化传输矩阵

Tab. 2 The normalization transmission matrixes of NO. i section for Liou-Kaplan I-IV and scaling lattice circuits

电路类型	E_i	F_i	G_i	H_i
I 型	$1 + \sigma^i \omega$	$\alpha^i R$	$\beta^i \omega / R$	1
Liou-Kaplan II 型	1	$\alpha^i R / \sigma^i \omega$	$1 / \alpha^i R$	$1 + 1 / \sigma^i \omega$
III 型	$1 + 1 / \sigma^i \omega$	$R / \beta^i \omega$	$1 / \alpha^i R$	1
IV 型	1	$\alpha^i R$	$\beta^i \omega / R$	$1 + \sigma^i \omega$
标度格型	$\frac{\sigma^i \omega + 1}{\sigma^i \omega - 1}$	$\frac{2\alpha^i R}{\sigma^i \omega - 1}$	$\frac{2\beta^i C_s}{\sigma^i \omega - 1}$	$\frac{\sigma^i \omega + 1}{\sigma^i \omega - 1}$

在求得总传输矩阵 T_k (式(8))后,

$$T_k = \begin{bmatrix} E_k + F_k \cdot 1/y_0(\omega) & F_k \\ G_k + H_k \cdot 1/y_0(\omega) & H_k \end{bmatrix} \quad (9)$$

利用第一项与第三项的比求得 Liu-Kaplan I 型的输入阻抗函数 $Z_k(s)$ 为

$$y_k(\omega) = \frac{E_k \cdot y_0(\omega) + F_k}{G_k \cdot y_0(\omega) + H_k}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (10)$$

如果 $y_0(\omega) = \frac{n_0(\omega)}{d_0(\omega)}$ 是有理函数, 则

$$y_k(\omega) = \frac{E_k(\omega) \cdot n_0(\omega) + F_k(\omega) \cdot d_0(\omega)}{G_k(\omega) \cdot n_0(\omega) + H_k(\omega) \cdot d_0(\omega)}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (11)$$

也是有理函数

$$y_k(\omega) = \frac{n_k(\omega)}{d_k(\omega)}, k \in \mathbf{N}^+ \quad (12)$$

求得其阻抗函数后利用 matlab 中的 roots 求根函数分别对其分子和分母进行符号运算, 即可求出其零极点。

3.2 标度迭代矩阵法及其初始阻抗的标度调整

利用迭代矩阵法求解未标度分形分抗逼近电路的阻抗函数零极点, 文献[11, 22-24]中已得到验证, 对于标度化的分形分抗逼近电路也可用迭代矩阵法求解. 由表 1 中给出的非正则标度方程, 得到 Liu-Kaplan I 型的归一化阻抗函数序列的迭代算法公式如下式。

$$y_k(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega + \frac{1}{\alpha y_{k-1}(\sigma\omega)}} \quad (13)$$

而归一化阻抗函数 $y_k(\omega)$ 也可写成如下形式。

$$y_k(\omega) = \frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} \quad (14)$$

其中, $N_k(\omega)$ 及 $D_k(\omega)$ 分别为阻抗函数的分子和分母多项式, 代入式(10)可将其整理为

$$\frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} = \frac{D_{k-1}(\sigma\omega) + \alpha\omega N_{k-1}(\sigma\omega) + \alpha N_{k-1}(\sigma\omega)}{D_{k-1}(\sigma\omega) + \alpha\omega N_{k-1}(\sigma\omega)} \quad (15)$$

上式中的分子和分母多项式可作为 2×1 阶矩阵的上下两个元素, 将其改写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} N_k(\omega) \\ D_k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha\omega & 1 \\ \alpha\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k-1}(\sigma\omega) \\ D_{k-1}(\sigma\omega) \end{bmatrix} \\ = \prod_{i=0}^{k-1} r_i \cdot \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k\omega) \\ D_0(\sigma^k\omega) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中

$$r_i = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha\sigma^i\omega & 1 \\ \alpha\sigma^i\omega & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

确定初始阻抗的分子分母大小后, 利用迭代矩阵的累积左乘, 最后得到 k 级迭代电路的分子多项式 $N_k(\omega)$ 和分母多项式 $D_k(\omega)$, 再利用 roots 函数对多项式求根, 得出阻抗函数的零点和极点, 将 Liu-Kaplan I-IV 型及标度 Carlson 格型的标度迭代矩阵整理如表 3 所示。

表 3 Liu-Kaplan I-IV 型及标度格型电路第 i 节标度迭代矩阵

Tab. 3 The scaling iterating matrixes of NO. i for Liu-Kaplan I-IV and scaling lattice circuits.

电路类型	A_i	B_i	C_i	D_i
I 型	$\alpha + \alpha\sigma^i\omega$	1	$\alpha\sigma^i\omega$	1
II 型	$\sigma^i\omega + 1$	$\alpha\sigma^i\omega$	1	$\alpha\sigma^i\omega$
III 型	α	$1 + \alpha\sigma^i\omega$	$\alpha\sigma^i\omega$	$\sigma^i\omega$
IV 型	$1 + \sigma^i\omega$	$\alpha\sigma^i\omega$	1	α
标度格型	$\alpha\sigma^i\omega + \alpha$	2	$2\alpha\sigma^i\omega$	$1 + \sigma^i\omega$

当标度迭代电路的级数 k 发生改变时, 由于初始阻抗 $y_0(\sigma^k\omega)$ 的大小与级数 k 有密切的关系, 因此要对初始阻抗标度 σ^k 进行指数调整, 根据级数 k 的不同取值来调整. 考虑到标度调整, 对比标度迭代矩阵法和传输矩阵法, 优先使用传输矩阵法求解零极点。

4 零极点求解结果及分布规律

式(11)阻抗函数的分子和分母均为有理函数, 且满足无缺项^[6]的特点, 故也可将阻抗函数如下式。

$$y_k(\omega) = \frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} = \frac{\prod_{i=1}^k (\omega - z_{ki})}{\prod_{i=1}^k (\omega - p_{ki})} \quad (18)$$

其中, $z_{ki} = -10^{o_{ki}}$, $p_{ki} = -10^{x_{ki}}$ 分别为阻抗函数的第 i 个零点和极点, 而 $10^{o_{ki}}$, $10^{x_{ki}}$ 分别为零点频率和极点频率, 对零、极点频率取对数后得到零、极点频率对应的频率指数 o_{ki} 、 x_{ki} 称为零点频率指数和极点频率指数。

编写 Matlab 程序进行实验求解, 得出 Liu-Kaplan I-IV 型分形链电路、标度分形格电路以及 Morrison 标度分形梯与分形串电路的零极点分布规律. 以 Liu-Kaplan I 型为例, $\mu_{Liu} = -0.1 \sim -0.9$ 间隔为 0.1, 标度因子 $\sigma = 10$, 迭代次数 $k = 10$, 求得零极点的取值, 并画出不同 μ_{Liu} 对应取值时的零极点分布图, 如图 4 所示. 其中, 横坐标 ω 表示零极点的频率指数, 纵坐标表示不同的运算阶 μ_{Liu} 。

观察图 4 中的零极点分布可以得出初步结论：当标度因子 σ 一定，阶数 μ_{Liu} 取不同值时，在中间段，其零点的值几乎不变，而极点的值随阶数 μ_{Liu}

的增加而等间隔增加. 如图 5 的坐标图表示了零极点的数值大小和电路级数 i 之间的关系.

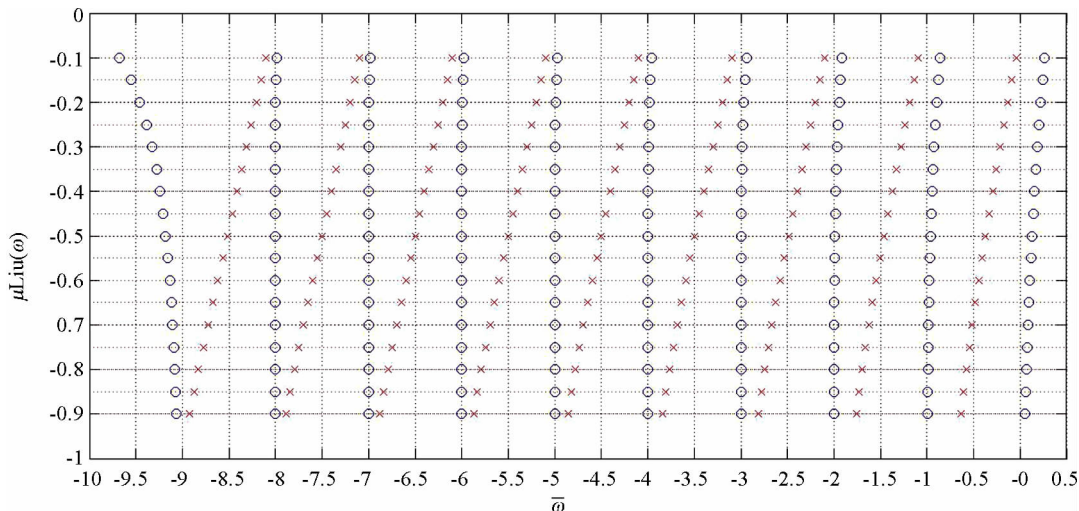


图 4 Liu-Kaplan I 型分形链电路不同 μ_{Liu} 下零极点值分布图: $\sigma=10, k=10$

Fig. 4 The zero-pole distribution figure with different μ_{Liu} for Liu-Kaplan I fractal chain circuit.

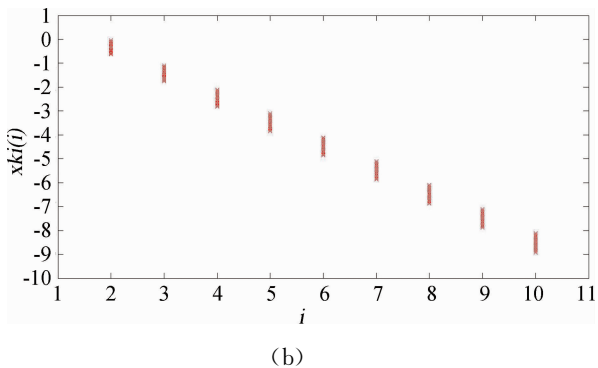
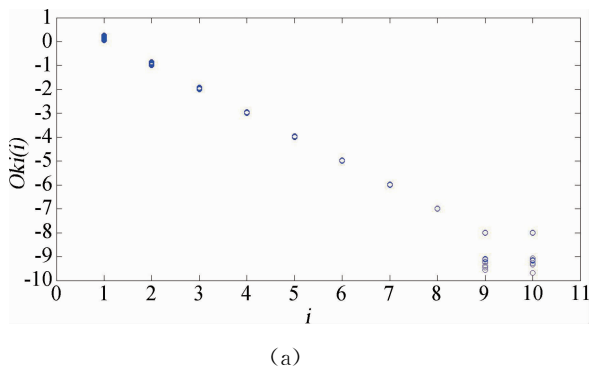


图 5 Liu-Kaplan I 型分形链零极点频率指数中间段与节号 i 间线性关系图

Fig. 5 The linear relation figure between the middle part of zero-pole frequency exponent and its section number i for Liu-Kaplan I fractal chain circuits.

(a) 零点频率指数 O_{ki} 与节号 i 线性关系图; (b) 极点频率指数 x_{ki} 与节号 i 线性关系图

(a) The linear relation figure between zero-pole frequency exponent and section number i for Liu-Kaplan I fractal chain circuits; (b) The linear relation figure between zero-pole frequency exponent and section number i for Liu-Kaplan I fractal chain circuits

综合图 4 和图 5 可以发现，无论运算阶 μ_{Liu} 如何变化，其零极点的数值分布与节号 i 之间的线性关系段的斜率是不变的. 因此在这个结论之下就要研究其斜率的大小具体是和什么有关，由于标度分形抗逼近电路的参数中标度因子 σ 和运算阶 μ_{Liu} 存在以下关系^[6,25].

$$\mu_{Liu} = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma} \tag{19}$$

令运算阶 μ_{Liu} 一定，标度因子 σ 取不同的值，求得结果观察其斜率是否有变化，如图 6 所示，标度因子 σ 的取值分别为 3.9811、6.3096、10、15.

8489、25.1189、39.8107，对应着标度因子对数化 $\lg \sigma$ 的取值为 0.6、0.8、1、1.2、1.4、1.6 标度分形分抗逼近电路的节数 k 均取 20 节.

在标度因子 σ 取不同值的情况下，零点、极点频率指数中间段的分布都遵循线性关系，也就是零极点的值与节号 i 之间呈线性关系，但随着 σ 的改变其线性关系对应的斜率也随之改变. 故此很自然地就想到，此斜率与标度因子 σ 有关. 经过对标度因子取大量不同值的实验尝试，验证了此猜想的准确性，且无论是零点还是极点，其斜率就是标度因子的对数化 $\lg \sigma$.

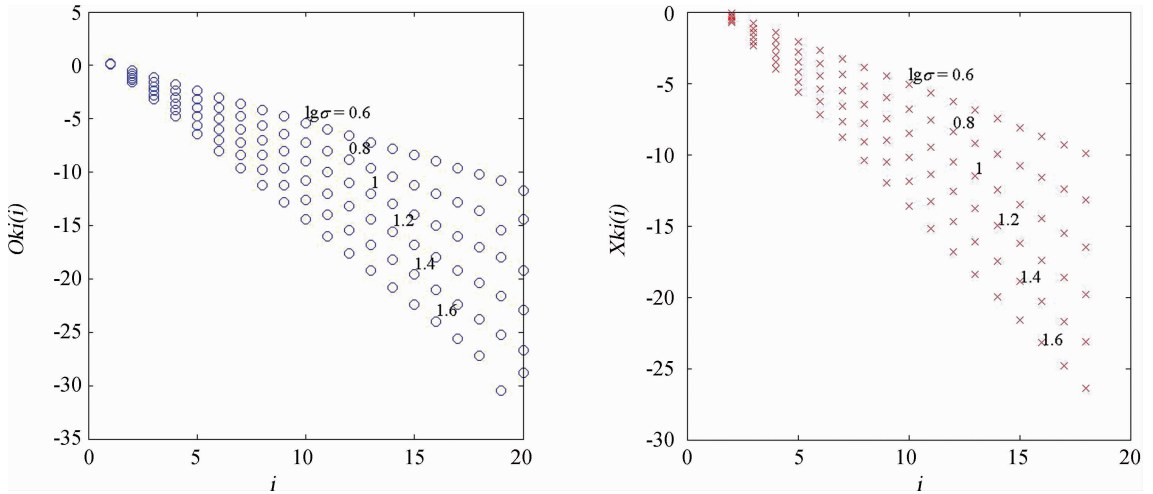


图 6 不同标度因子 σ 下零极点频率指数分布图

Fig. 6 The frequency exponent distribution figure in different scaling factor σ .

由图 4 中间段的零点频率指数与极点频率指数相距的具体相同且为 $\lg\sigma$, 发现对于不同 σ 的取值, 其斜率恰好是 $\lg\sigma$, 而且针对于不同的电阻递进比 α 与电容递进比 β 的取值, 直线与纵轴的交点即截距也是一定的, 在 $\lg\alpha$, $\lg\sigma$ 及 $\lg\beta$ 三者之间取值. 按照上述直线斜率及纵轴上的截距, 将标度分形链、标度分形格标度分形串以及标度分形梯的零极点线性分布规律的近似表达式整理如表 4.

表 4 零极点近似线性分布规律

Tab. 4 The approximate linear distribution rules of zero and pole.

电路类型	开路 ($N_0=1, D_0=0$)	短路 ($N_0=0, D_0=1$)	为 1 ($N_0=1, D_0=1$)
Liu-Kaplun 分形链	I 型 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\beta$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\alpha$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\alpha$
	II 型 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\alpha$
	III 型 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$
	VI 型 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$
	标度分形格 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\beta$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$
	标度分形串 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\alpha$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$
标度分形梯 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\alpha$	短路 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i - \lg\beta$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i$	为 1 $o_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\alpha$ $x_{ki} \approx -\lg\sigma \cdot i + \lg\beta$	

在 3.1 节中提到的标度分形链与标度分形格电路的总的传输矩阵 T_k 是由各基本节传输矩阵乘积再左乘初始节传输矩阵 τ_i 得到. 因此当初始阻抗取不同的值时会对零极点的截距的大小有影

响. 本文重点研究了初始阻抗取开路、短路以及为 1 时的关系.

5 结 论

利用电路传输矩阵以及阻抗函数解析解作为求解标度分形链、标度分形格、标分形串以及标度分形梯电路零极点的求解算法, 通过改变分数阶的阶数 μ 以及标度参量 α , β 和 σ 的大小来改变不同的情形. 借助 Matlab 中相关函数及工具进行大量的求解, 发现并验证了标度拓展情况下分形链及分形格电路的零极点分布规律, 为后续的有关分形抗逼近电路零极点分布规律的研究提供了基础. 所得到的零极点的分布规律在级数 i 取值在中间段时规律很符合, 在两端处, 即 i 取值较小和很大时零极点的数值不是很严格的符合此线性关系, 从图 4 可以看出, 当阶数 μ 变大时, 两端的零点间距离越大, 这也是在后续工作中需要更深入研究的问题. 除本文所提到的两种分形抗逼近电路, 还有其他的如 Sierociuk 链分形抗逼近电路, Haba-Koch 分形线分形抗电路^[12]等, 针对于这些分形抗逼近系统中, 有关于零极点分布规律的研究还有很多可以去做的工作.

参考文献:

[1] Pu Y F, Yuan X. Fracmemristor: Fractional-order memristor [J]. IEEE Access, 2017, 4: 1872.

[2] Pu Y F, Yuan X, Yu B. Analog circuit implementation of fractional-order memristor: Arbitrary-order Lattice Scaling fracmemristor [J]. IEEE Trans CASI, 2018, 65: 2903.

[3] Morrison R. RC constant-argument driving-point admit-

- tances [J]. IEEE Trans Circuit Theory, 1959, 9: 310.
- [4] Hill R M, Dissado L A, Nigmatullin R R. Invariant behavior classes for the response of simple fractal circuits [J]. J Phys Condens Matter, 1991, 3: 9773.
- [5] Carlson G E. Simulation of the fractional derivative operator $[\sqrt{s}]$ and the fractional integral operator $1/\sqrt{s}$ [D]. Manhattan: KansasState University, 1960.
- [6] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [7] Oldham K B. Semiintegral electroanalysis Analog implementation [J]. Anal Chem, 1973, 45: 39.
- [8] Grenness M, Oldham K B. Semiintegral electroanalysis theory and verification [J]. Anal Chem, 1972, 44: 1121.
- [9] Goto M, Oldham K B. Semiintegral electroanalysis. Shapes of neopolarograms [J]. Anal Chem, 1973, 45: 2043.
- [10] Oldham K B, Zoski C G. Analogue instrumentation for processing polarographic data [J]. J Electronanal Chem, 1983, 157: 27.
- [11] 袁子, 袁晓. 规则 RC 分形分抗逼近电路的零极点分布 [J]. 电子学报, 2017, 45: 2511.
- [12] 余波, 何秋燕, 袁晓, 等. 分抗的 F 特征逼近性能分析原理与应用 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 301.
- [13] 袁晓, 冯国英. 粗糙界面电极的电路建模与 Liu-Kaplan 标度方程 [C]. 2015 年中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会论文集. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [14] 袁晓, 冯国英. Oldham 分形链分抗类与新型 Liu-Kaplan 标度方程 [C]. 2015 年中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会论文集. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [15] 何秋燕, 袁晓. Carlson 迭代与任意分数微积分算子的有理逼近 [J]. 物理学报, 2016, 65: 25.
- [16] He Q Y, Yu B, Yuan X. Carlson iterating rational approximation and performance analysis of fractional operator with arbitrary order [J]. Chin Phys B, 2017, 26: 040202.
- [17] Roy S D, Shnoi B A. Distributed and lumped RC realization of a constant argument impedance [J]. J Franklin Inst, 1966, 282: 318.
- [18] Dutta R S C. On the realization of a constant-argument immittance of fractional operator [J]. IEEE Trans Circuit Theory, 1967, 14: 264.
- [19] Roy S D. Constant argument immittance realization by a distributed RC network [J]. IEEE Trans CAS, 1974, 21: 655.
- [20] Liu S H. Fractal aspects of the ac response of rough interface [J]. Phys Rev Lett, 1985, 55: 529.
- [21] 余波, 何秋燕, 袁晓. 任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程 [J]. 物理学报, 2018, 67: 070202.
- [22] 易舟, 袁晓, 陶磊, 等. Oldham RC 链分抗逼近电路零极点精确求解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 1255.
- [23] 易舟, 袁晓. 分形分抗逼近电路零极点的数值求解与验证 [J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2017, 15: 98.
- [24] 何秋燕. 标度分型格分抗 [D]. 成都: 四川大学, 2017.
- [25] Kaplan T, Gray L J. Effect of disorder on a fractal model for the ac response of a rough interface [J]. Phys Rev B, 1985, 55: 529.

引用本文格式:

中文: 施卜椿, 高小龙, 袁晓. 标度分形分抗逼近电路的零极点分布规律 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 57.

英文: Shi B C, Gao X L, Yuan X. Zero-pole distribution rules of scaling fractal fractance approximate circuits [J]. Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 57.