

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.012

基于 Simulink 电路模拟仿真求解 Bagley-Torvik 方程

张德茂, 袁 晓, 高小龙

(四川大学电子信息学院, 成都 610065)

摘 要: 针对定常系数的分数阶 Bagley-Torvik 方程, 提出一种新颖的求解方法——电路模拟仿真法. 该方法的核心思想是利用分抗逼近电路构造微积算子 s^μ ($-1 < \mu < 0$) 去代替分数导数算子 ${}_0D_t^\mu$ ($-1 < \mu < 0$). 将分抗逼近电路阻抗函数转换为 Simulink 中的传输函数模块, 然后运用传输函数模块搭建仿真框图求解分数阶微分方程. 将电路模拟仿真法与传统的数值逼近求解法进行对比, 对比结果表明, 电路模拟仿真法求解结果稳定可靠; 并且可根据仿真框图搭建实际电路对分数阶微分方程进行实时求解.

关键词: 微积算子; 分数导数算子; 分抗逼近电路; 数值逼近求解法

中图分类号: O242.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2019)02-0253-07

Solving bagley-torvik equation based on simulink circuit simulation

ZHANG De-Mao, YUAN-Xiao, GAO Xiao-Long

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: A novel solution method, circuit simulation method, is proposed for the Bagley-Torvik equation with constant coefficient. The core idea of this method is to construct micro-product operator: s^μ ($-1 < \mu < 0$) by the classical fractional approximation circuit to replace the fractional derivative: ${}_0D_t^\mu$ ($-1 < \mu < 0$). The circuit simulation method converts the impedance function of impedance approximation circuit into the transfer function module in Simulink which is then used to build the simulation block diagram to solve the fractional differential equation. Comparing the circuit simulation method with the traditional numerical method, namely the numerical approximation method and the Green's function method. The comparison results show that the solving results of circuit simulation method is stable and reliable, and the actual circuit based on the simulation block diagram can be built to solve the fractional differential equation in real time.

Keywords: Micro-product operator; Fractional derivative operator; Fractional approximation circuit; Numerical approximation method

1 引 言

分数阶微积分模型相比传统的整数阶微积分模型, 能够更加准确地描述和刻画工程领域中许多物理现象. 随着分数阶微积分研究的不断深入和发

展, 其应用领域在不断深入和拓展. 分数阶微分方程作为描述物理现象的重要工具之一, 研究其精确可靠的求解方法一直备受研究人员的青睐. 现有的分数阶微分方程求解方法主要有解析解和数值逼近求解两类, 但它们各有利弊. 电路模拟仿真求解

收稿日期: 2018-04-27

基金项目: 成都市科技计划项目(12DXYB255JH-002); 四川省科技支撑计划资助项目(2013SZ0071)

作者简介: 张德茂(1993-), 男, 湖北阳新人, 硕士生, 研究方向为信号与信息处理. E-mail: 839438936@qq.com

通讯作者: 袁晓. E-mail: yuanxiao@scu.edu.cn

法是利用分抗逼近电路构造微积算子 s^μ ($-1 < \mu < 0$), 然后在 Simulink 仿真平台搭建系统仿真框图求解分数阶微分方程, 相比传统的分数阶微分方程求解方法, 该方法具有求解结果稳定准确, 运算速度快, 实时性高等优点.

2 分数阶 Bagley-Torvik 方程及其数学求解

Bagley-Torvik 方程是一类带有两个导数项的较为典型的分数阶微分方程, 它于 1984 年由 Bagley 和 Torvik 在研究牛顿粘性流体中的刚性板块浸入运动时所提出. 目的是要证明在流体中任何点上引起的剪切应力, 可以直接用流体速度分布的分数阶时间导数来表示.

2.1 Bagley-Torvik 方程

非齐次定常系数 Bagley-Torvik 方程的初值问题为^[3]

$$Ay''(t) + B_0 D_t^\nu y(t) + Cy(t) = f(t) (t > 0, 1 < \nu < 2) \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2)$$

式(1)中, A, B, C 为常数; $f(t)$ 是已知函数(或激励信号); $y(t)$ 为未知的待求函数. 在 Bagley-Torvik 方程考虑的原始问题之中, 取

$$\nu = 3/2, A = 1, B = 1/2, C = 1/2 \quad (3)$$

$$f(t) = \begin{cases} 8, & (0 \leq t \leq 1) \\ 0, & (t > 1) \end{cases} \quad (4)$$

分数阶微分方程的经典求解方法有 Grünwald-Letnikov 数值近似求解法和格林函数求解法(解析解)^[6].

2.2 Grünwald-Letnikov 数值近似求解法

$$\begin{cases} A \frac{\dot{y}_m - 2\dot{y}_{m-1} + \dot{y}_{m-2}}{h^2} + \frac{B}{h^\nu} \sum_{j=0}^m g_1^{(\nu)}[j] \cdot \dot{y}_{m-j} + C\dot{y}_m = f_m, \\ \dot{y}_m = \dot{y}(mh), f(m) = f(mh), \\ \dot{y}_0 = 0, \dot{y}_1 = 0, \end{cases} \quad (m \geq 2) \quad (11)$$

由此推出一阶逼近数值求解算法如下式.

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = 0, \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_m = \frac{h^2 f_m + A(2\dot{y}_{m-1} - \dot{y}_{m-2}) - Bh^{2-\nu} \sum_{j=1}^m g_1^{(\nu)}[j] \dot{y}_{m-j}}{A + Bh^{2-\nu} + Ch^2}, \end{cases} \quad (12)$$

从而得到方程(1)的一阶逼近数值解 \dot{y}_m 并有

$$\dot{y}_m = y_m + O(h), y_m = y(mh), m \in \mathbf{N} \quad (13)$$

式(13)中, y_m 是真实解.

2.2.2 二阶逼近数值解 方程(1)的二阶逼近数值差分方程^[4]为

对函数(或信号) $f(t)$ 进行分数 ν 阶导数采用 Grünwald-Letnikov 定义

$${}_a D_t^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{h, \rho} f(t), (0 < \nu < \infty) \quad (5)$$

$$\Delta_{h, \rho} f(t) = h^{-\nu} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} g_\rho^{(\nu)}[j] f(t-jh) \quad (6)$$

其中, h 为时间步距(也称采样间隔), 加权系数 $g_\rho^{(\nu)}[j]$ 是 ρ 阶逼近 Grünwald 系数.

一阶逼近 Grünwald 系数 $g_1^{(\nu)}[j]$ 由生成函数 $\varphi_1^\nu(z) = (1-z^{-1})^\nu$ 生成.

$$\begin{cases} \varphi_1^\nu(z) = (1-z^{-1})^\nu = \sum_{j=0}^{\infty} g_1^{(\nu)}[j] z^{-j} \\ g_1^{(\nu)}[j] = (-1)^j \binom{\nu}{j} \end{cases} \quad (7)$$

二阶逼近 Grünwald 系数 $g_2^{(\nu)}[j]$ 由生成函数 $\varphi_2^\nu(z)$ 生成.

$$\varphi_2^\nu(z) = \left(\frac{3}{2} - 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)^\nu = \sum_{j=0}^{\infty} g_2^{(\nu)}[j] z^{-j} \quad (8)$$

并由 $\varphi_2^\nu(z) = \left(\frac{3}{2}\right)^\nu (1-z^{-1})^\nu \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^\nu$ 得

$$g_2^{(\nu)}[j] = \left(\frac{3}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{3}\right)^j g_1^{(\nu)}[j] * g_1^{(\nu)}[j], (j = N) \quad (9)$$

式(9)中, $*$ 为卷积运算符.

采用广义二项式法计算一阶逼近 Grünwald 系数, 计算公式如下.

$$g_1^{(\nu)}[j] = (-1)^j \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-j+1)\Gamma(j+1)}. \quad (10)$$

2.2.1 一阶逼近数值解 用 Grünwald-Letnikov 式(5)和式(6)近似计算二阶导数 $y''(t)$ 与 ν 阶导数 ${}_0 D_t^\nu y(t)$, 方程(1)的一阶逼近数值差分方程^[4]为

$$\begin{cases} \frac{A}{h^2} \sum_{j=0}^m g_2^{(2)}[j] \cdot \ddot{y}_{m-j} + \frac{B}{h^\nu} \sum_{j=0}^m g_2^{(\nu)}[j] \cdot \ddot{y}_{m-j} + C\ddot{y}_m = f_m, \\ \ddot{y}_m = \ddot{y}(mh), f(m) = f(mh), \ddot{y}_0 = 0, \ddot{y}_1 = 0, (m \geq 2) \end{cases} \quad (14)$$

由此推出二阶逼近数值求解算法

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = 0, \ddot{y}_1 = 0, \\ \ddot{y}_m = \frac{h^2 f_m - A \sum_{j=1}^m g_2^{(2)}[j] \cdot \ddot{y}_{m-j} - B h^{2-\nu} \sum_{j=1}^m g_2^{(\nu)}[j] \cdot \ddot{y}_{m-j}}{A (3/2)^2 + B (3/2)^\nu h^{2-\nu} + C h^2}, m \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

从而得到方程(1)的二阶逼近数值解 \ddot{y}_m 并有

$$\ddot{y}_m = y_m + O(h^2), m \in \mathbf{N} \quad (16)$$

2.3 格林函数求解法——解析解

对于方程(1), 文献[4]对格林函数求解法有详细描述和证明. 采用格林函数求解法得到方程(1)的解析解为

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (17)$$

式中格林函数

$$G_3(t) = \frac{1}{A} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-B}{A}\right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-C}{A}\right)^k \binom{j+k}{k} \frac{t^{2(j+k+1)-\nu j-1}}{\Gamma(2(j+k+1)-\nu j)}. \quad (18)$$

是一个双重无穷级数定义的特殊函数. 在具体数值计算时, 只能采取截短的近似形式如下

$$\tilde{G}_3(t) = \frac{1}{A} \sum_{j=0}^J \left(\frac{-B}{A}\right)^j \sum_{k=0}^K \left(\frac{-C}{A}\right)^k \binom{j+k}{k} \frac{t^{2(j+k+1)-\nu j-1}}{\Gamma(2(j+k+1)-\nu j)} (J, K \in \mathbf{Z}) \quad (19)$$

那么对应的近似解析解 $\tilde{y}(t)$ 为

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \tilde{G}_3(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (20)$$

根据算法公式(12), (15)和(20)用 matlab 编程求解出一阶逼近数值解、二阶逼近数值解和近似解析解, 结果如图 1 所示.

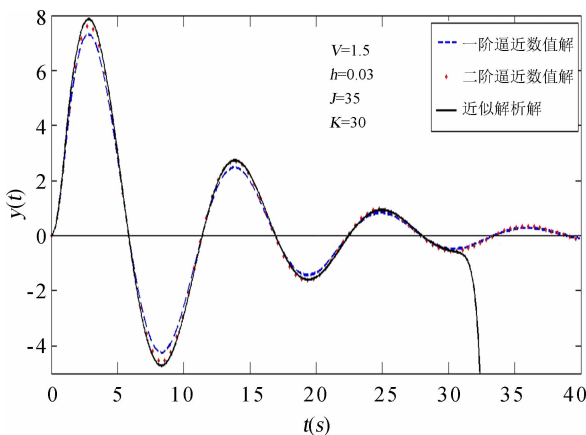


图 1 数值求解与格林函数法求解结果对比图

Fig. 1 Contrast solution result between numerical solution and Green's function method

通过对比这两种经典的分数阶微分方程求解方法, 可得出: (1) 格林函数法在理论上是收敛的,

但其运算结果会跟计算机系统有关, 导致尾部 $As^2 Y(s) + Bs^\nu Y(s) + CY(s) = F(s), (1 < \nu < 2)$. 出现不收敛情况; (2) 数值逼近求解法的运算结果跟时间步距 h 有关, 且需要对求解的微分方程进行近似代换操作.

3 电路模拟仿真求解法

电路模拟仿真法是利用分抗逼近电路构造分数阶微积算子 s^ν 代替分数阶微分方程中的分数导数 ${}_0 D_t^\nu$, 然后在 Simulink 仿真平台搭建分数阶微分方程的系统仿真框图, 从而进行模拟仿真求解分数阶方程. 电路模拟仿真法与数值逼近法相比, 具有求解结果稳定准确, 运算速度快, 实时性等优点.

3.1 电路模拟仿真求解法的数学原理

Grünwald-Letnikov 分数导数的拉普拉斯变换公式^[4]如下.

$$\begin{aligned} L\{ {}_0 D_t^\nu f(t); s \} &= \\ \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) L\left\{ \frac{t^{-\nu+k}}{\Gamma(-\nu+n+1)}; s \right\} &+ \\ L\left\{ \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+n+1)} \cdot f^{(n+1)}(t); s \right\} & \\ = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) s^{\nu-k-1} + s^{\nu-n-1} \cdot & \\ (s^{n+1} F(s) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) s^{n-k}) & \\ = s^\nu F(s) & \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $n < \nu < n+1$,

$$F(s) = L\{ f(t); s \} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (22)$$

对方程式(1)作单边拉普拉斯变换得方程中微分算子 s^ν 可以分解为

$$s^\nu = s^\mu \cdot s^2, -1 < \mu < 0 \quad (23)$$

算子 s^2 在时域对应二阶微分运算, 而 μ 阶算子 s^μ 可由 μ 阶分抗逼近电路实现. 这在时域对应着运算

$${}_0 D_t^\nu y(t) = {}_0 D_t^\mu [y''(t)], -1 < \mu < 0 \quad (24)$$

从而方程式(22)可转化成

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) &= \frac{1}{A} \{ F(s) - CY(s) - Bs^\nu [s^2 Y(s)] \}, \\ -1 < \mu < 0 & \end{aligned} \quad (25)$$

其对应的时域表达式为

$$y''(t) = \frac{1}{A} \{ f(t) - Cy(t) - B {}_0 D_t^\mu [y''(t)] \},$$

-1 μ <math>< 0</math>

(26) 根据式(25)画电路系统框图,如图 2 所示.

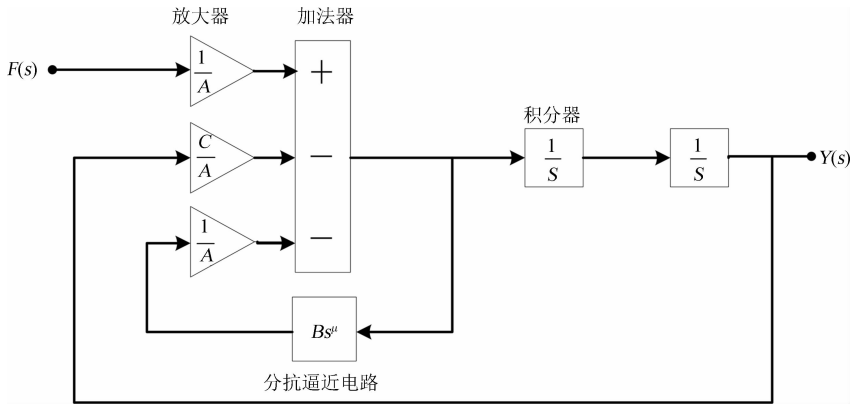


图 2 Bagley-Torvik 方程的电路模拟仿真求解框图
Fig. 2 Circuit simulation simulation block diagram of Bagley-Torvik equation

从图 2 中可以看出该电路模拟系统是一个负反馈系统,反馈系统具有稳定性高误差小的特质,这就保证了电路模拟仿真法求解 Bagley-Torvik 方程结果的稳定可靠性. 根据此原理图搭建的实际物理电路系统,可以实时求解分数阶微分方程.

3.2 微积算子 s^μ 的电路实现——标度分形格分抗逼近电路

实现微积算子 s^μ ($-1 < \mu < 0$) 运算功能的电路元件为分抗元. 其电路符号如图 3 所示.

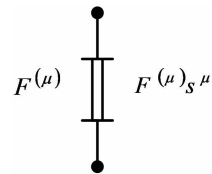


图 3 分抗元符号
Fig. 3 Fractance symbol

分抗逼近电路可在一定条件下实现理想分抗元. 分抗逼近电路的原理描述如图 4 所示.

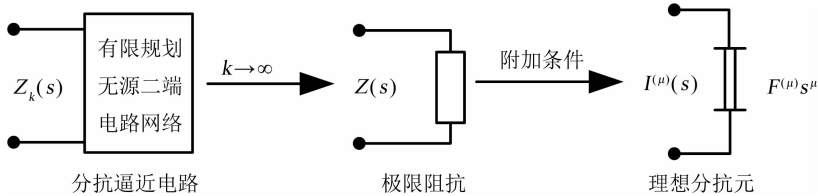


图 4 分抗逼近电路问题图示
Fig. 4 Schematic of fractance approximation circuits

分抗逼近电路的阻抗函数 $Z_k(s)$ 是一个有理函数,其有理阻抗函数序列可以表示如下.

$$Z_k(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_k} \beta_k s^i}{\sum_{i=0}^{d_k} \alpha_k s^i} \quad (27)$$

$$I^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} s^\mu$$

式中 μ ($0 < |\mu| < 1$) 为分抗逼近电路的运算阶数, k 为电路的节数, s 是拉普拉斯复变量(或称运算变量). 随着分抗逼近电路的节数 k 趋于无穷,电路实现理想分抗 $I^{(\mu)}(s)$ [7].

Carlson 标度分形格分抗逼近电路 [8-10] 如图 5 所示.

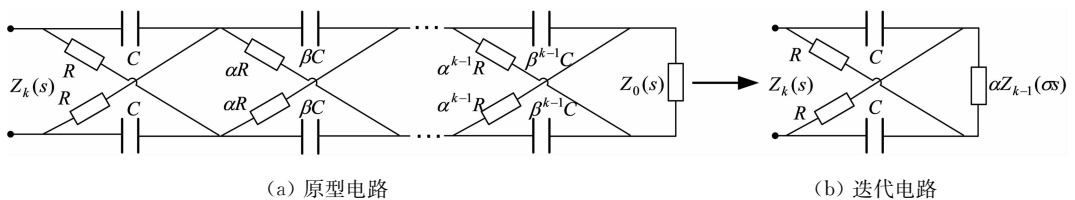


图 5 标度分形格分抗逼近电路
Fig. 5 Scaling fractal lattice fractance approximation circuits

根据图 6(b) 的迭代电路, 可得输入阻抗函数 $Z_k(s)$, 如下式.

$$Z_k(s) = F_{\text{cexp}}(Z_{k-1}(s)) = \frac{2R + (1 + RCs)\lambda Z_{k-1}(\sigma s)}{1 + RCs + 2Cs\lambda Z_{k-1}(\sigma s)}, (k \in \mathbf{Z}^+) \quad (28)$$

式中, k 为分抗电路的节次; α 为电阻递近比 ($\alpha \in \mathbf{R}^+, \alpha \neq 1$); β 为电容递近比 ($\beta \in \mathbf{R}^+, \beta \neq 1$); 标度因子 $\sigma = \alpha \cdot \beta (\sigma > 0, \sigma \neq 1)$; 式中 $F_{\text{cexp}}(x) = \frac{2ab + (a+b)\alpha x}{a + b + 2\alpha x} (x \in \mathbf{R}^+, a = R, b = \frac{1}{Cs})$, 称为 Carlson 标度分形格分抗的迭代函数. Carlson 标度分形格分抗逼近电路的 Liu 氏运算阶^[7] $\mu_{\text{Liu}} = -\lg\alpha / \lg\sigma, \mu_{\text{Liu}} \in (-1, 0)$.

3.3 Simulink 环境设置与系统框图搭建

Matlab 的 Simulink 平台具有强大的功能. Simulink Library Browser 包含有常见的工具箱, 如 DSP System Toolbox, Control System Toolbox, Communications System Toolbox 等^[11]. 每种工具箱内都提供多种运算模块, 使用这些封装模块可以搭建模拟仿真框图求解微分方程. 在运算求解前需要对这些模块参数进行设置.

首先, 设置 Simulink 仿真平台的参数. 在 Simulations-Model Configuration Parameter 里面设置仿真起始时间 0 s, 结束时间 30 s; 最大步长 0.1; Solver 选择 ode45. ode45 表示采用 4 阶~5 阶 Runge-kutta 算法, 它用 4 阶方法提供候选解, 5 阶方法控制误差, 他是一种自适应步长的常微分方程数值解方法^[12].

其次, 对输入输出进行设置. 输入接的 Step 函数模块产生阶跃信号, 设置它的初始阶跃时间为 1 s; 仿真初始值为 8; 仿真结束值为 0; 这样就能产生一个与式(2)一样的函数. 为了让示波器显示的图像跟. m 文件画的图像在同一个 figure 内进行描绘, 需要将示波器的参数进行设置, 将示波器的设置参数栏的 history, 将数据保存到 workspace, 设置变量名和保存格式为数组 Array; 这样既可在 m 文件内调用输出结果 $y(t)$, 并可以在 figure 上描绘其图像.

传输函数模块 Transfer Fcn 用于表征传递函数. 具体的传递函数的表达式为^[13]

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (29)$$

式中, $Y(s)$ 、 $X(s)$ 分别为系统输出输入 $y(t)$ 、 $x(t)$

的拉普拉斯变换. 将分抗逼近电路阻抗函数序列的分子、分母系数提取出来代入传输函数模块即可实现分数阶的微积分运算.

按照式(26)搭建分数阶微分方程系统框图如图 6 所示. 图 6 中增益参数 $k_1 = 1/A, k_2 = C/A, k_3 = B/A$.

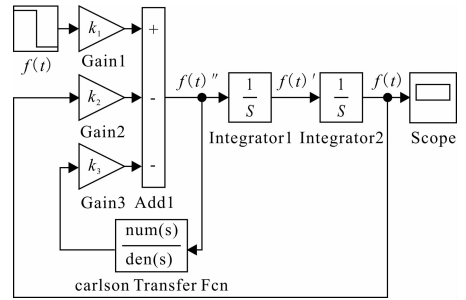


图 6 分数阶微分方程系统仿真图
Fig. 6 Fractional differential equation system simulation diagram

3.4 仿真求解结果与分析

按照图 6 搭建的仿真环境, 设置 Carlson 标度分形格分抗电路的电路参数: $k = 20, \mu = -1/2, \sigma = 9, \lambda = 3$, 将计算出的系数矢量代入传输函数模块中. 格林函数法、Grünwald 数值逼近法与电路模拟仿真求解结果比较如图 7 所示.

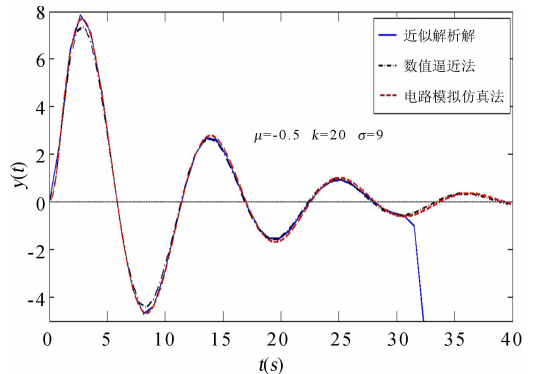


图 7 仿真求解结果比较
Fig. 7 Comparison of simulation results

图 7 为 Bagley-Torvik 方程的三种数值求解方法求解结果比较, 可得如下结论: 电路模拟仿真法能够精确求解定系数分数阶微分方程.

4 任意阶微分方程的求解

方程(1)中微积分阶次 $\nu = 3/2$, 输入函数 $f(t)$ 为方波. 为了探究电路模拟仿真法能够求解任意阶微分方程, 不妨假设微分阶次 $\nu \in (1, 2)$, 输入函数 $f(t)$ 为正弦波、周期三角波和周期方波三种情况,

探究电路模拟仿真法求解任意阶微分方程结果的准确性. 仿真求解结果比较如图 8~图 10. Carlson 标度分形格分抗逼近电路的标度因子 $\sigma=9$, 电路节次 $k=20$.

(1) 方程的微分阶次 $\nu=1.1$, Carlson 标度分形格分抗逼近电路的运算阶 $\mu=-0.9$; 输入函数 (信号) $f(t)$ 为正弦波, 其数字角频率分别取 $\omega=1$ (rad/s), $\omega=2\pi \cdot 10^{-2}$ (rad/s).

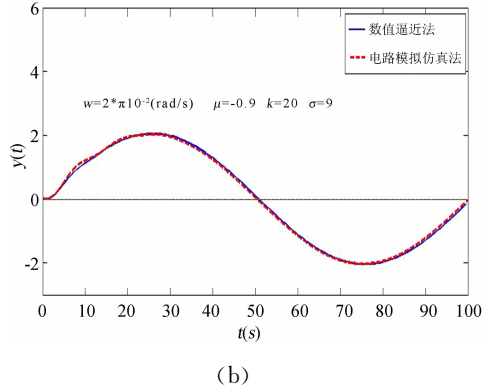
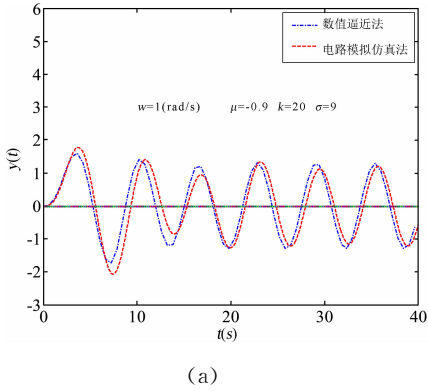


图 8 $\nu=1.1, \mu=-0.9$ 仿真求解结果比较

Fig. 8 $\nu=1.1, \mu=-0.9$ comparison of simulation results

(2) 方程的微分阶次 $\nu=1.4$, Carlson 标度分形格分抗逼近电路的运算阶 $\mu=-0.6$; 输入函数

(信号) $f(t)$ 为周期三角波, 其数字角频率分别取 $\omega=2\pi$ (rad/s), $\omega=2\pi \cdot 10^{-2}$ (rad/s).

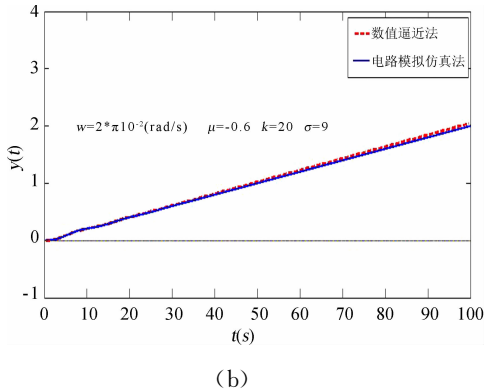
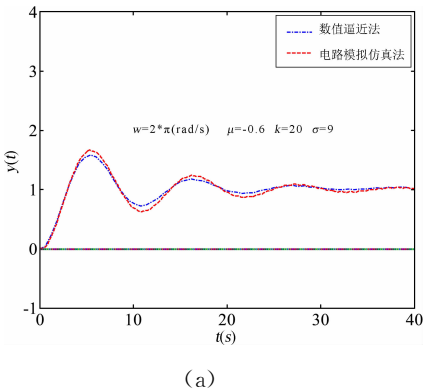


图 9 $\nu=1.4, \mu=-0.6$ 仿真求解结果比较

Fig. 9 $\nu=1.4, \mu=-0.6$ comparison of simulation results

(3) 方程的微分阶次 $\nu=1.7$, Carlson 标度分形格分抗逼近电路的运算阶 $\mu=-0.3$; 输入函数

(信号) $f(t)$ 为周期方波, 其数字角频率分别取 $\omega=2\pi$ (rad/s), $\omega=2\pi \cdot 10^{-2}$ (rad/s).

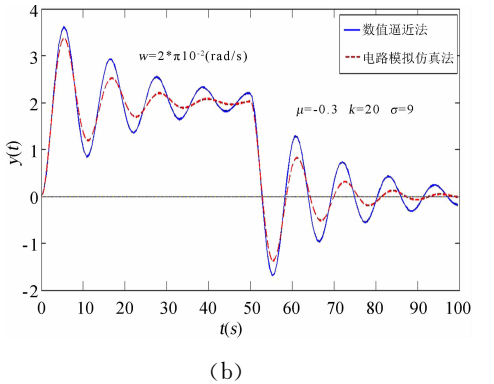
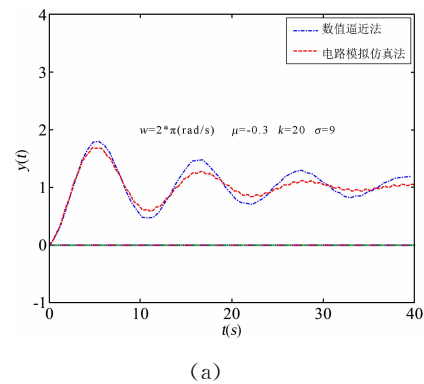


图 10 $\nu=1.7, \mu=-0.3$ 仿真求解结果比较

Fig. 10 $\nu=1.7, \mu=-0.3$ comparison of simulation results

根据图 8~图 10 的求解结果比较,可以得到如下结论:(1)电路模拟仿真法能够求解任意分数阶微分方程;(2)输入函数的频率对电路模拟仿真法的求解结果有很大影响;(3)不同运算阶 μ , 电路模拟仿真法能准确运算的输入函数频率范围不同。

电路模拟仿真法对输入函数的频率有限定的根本原因在于 Carlson 标度分形格分抗逼近电路在逼近任意分数阶算子时是有逼近带宽限制的,不同运算阶有不同的理想逼近带宽. 文献[9]中深入探究了标度因子与逼近带宽之间的关系,对扩展逼近带宽有详细介绍。

5 结 论

本文首先介绍了 Grünwald 数值逼近求解法和格林函数法,然后详细阐述电路模拟仿真求解法,并对 Bagley-Torvik 方程进行求解,其求解结果跟传统的数值法相比具有较高的准确性. 对 Bagley-Torvik 方程的输入函数和微积分阶次 ν 进行更换后,求解结果表明电路模拟仿真法能够求解任意分数阶的微分方程,并具有稳定可靠的运算性能. 分数阶微积分能够帮助研究者更加具体更加逼真的描述和刻画现实世界的一些变化现象. 相信通过研究者的不断努力,必定会在分数阶微积分领域取得更大的突破和进展。

参考文献:

- [1] 李姗姗, 赵春娜, 关永. 分数阶微积分定义的一致性在 HOLA 中的验证 [J]. 计算机科学, 2016, 43: 23
- [2] 张滑, 刘春风. 分数阶微分方程解法研究 [M]. 唐山: 华北理工大学, 2015.
- [3] Bagley R L, Torvik P J. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials [J]. J Appl Mech, 1984, 51: 294
- [4] Podlubny I. An introduction to fractional derivation, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications [M]. New York: Acaswmic Press, 2015.
- [5] Lubich C. Discretized fractional calculus [J]. S I

- AMJ Math Anal, 1986, 17: 704
- [6] 陈彩龙, 韩晓玲. 分数常微分方程多点边值问题的上下解法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 43.
- [7] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [8] Carlson GE. Simulation of the fractional derivative operator [square root of] s and the fractional integral operator 1 [divided by the square root of] s [J]. Carlos A Brebbia, 2011, 2011: 149.
- [9] 何秋燕. 标度分形格分抗 [D]. 成都: 四川大学, 2017.
- [10] Pu Y F, Yuan X, Yu B. Analog circuit implementation of fractional-order memristor: arbitrary-order lattice scaling fracmemristor [J]. IEEE Trans Circ Syst, 2018, 99: 1.
- [11] 李颖, 薛海斌, 朱伯立, 等. Simulink 动态系统建模与仿真 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009.
- [12] 郭菊喜. 四阶 Runge-Kutta 格式及五阶 Runge-Kutta 格式的证明 [J]. 乐山师范学院学报, 2016, 31: 8.
- [13] 李献, 骆志伟. 精通 MATLAB/Simulink 系统仿真 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [14] 孙志忠, 高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [15] 袁晓, 张红雨, 虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计 [J]. 电子学报, 2004, 32: 1658
- [16] 袁子, 袁晓. 规则 RC 分形分抗逼近电路的零极点分布 [J]. 电子学报, 2017, 45: 2511.
- [17] 袁晓, 冯国英. Oldham 分形链分抗与新型 Liu-Kaplan 标度方程 [C]//中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术论文集. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [18] 袁晓, 冯国英. 粗糙界面电极的电路建模与新型 Liu-Kaplan 标度方程 [C]//中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术论文集. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [19] 余波, 何秋燕, 袁晓. 任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程 [J]. 物理学报, 2018, 67: 070202-1.

引用本文格式:

中文: 张德茂, 袁晓, 高小龙. 基于 Simulink 电路模拟仿真求解 Bagley-Torvik 方程 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 253.

英文: Zhang D M, Yuan X, Gao X L. Solving bagley-torvik equation based on simulink circuit simulation [J]. J Sichuan Univ; Nat Sci Ed, 2019, 56: 253.