

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.011

# 隶属函数依赖的时变时滞模糊系统的控制

周坤<sup>1</sup>, 齐淑楠<sup>2</sup>, 李靖<sup>2</sup>, 靳留乾<sup>3</sup>, 蔡继荣<sup>4</sup>, 黄天民<sup>5</sup>

- (1. 中国计量大学机电工程学院, 杭州 310018; 2. 周口师范学院计算机科学与技术学院, 周口 466001;  
3. 重庆邮电大学经济管理学院, 重庆 400065; 4. 重庆工商大学商务策划学院, 重庆 400067;  
5. 西南交通大学数学学院, 成都 611756)

**摘要:** 研究了时变时滞 T-S 模糊系统的稳定性分析和镇定问题. 首先, 构造一个增广 Lyapunov-Krasovskii 函数, 结合自由权矩阵不等式, 以线性矩阵不等式 (LMIs) 形式给出了时滞依赖的稳定性准则. 基于状态空间分割技术, 构造一些由子空间的局部上下确界的凸组合表示的分段隶属函数去近似逼近隶属函数, 充分考虑隶属函数的边界信息, 同时引入松弛矩阵, 进而得到了更为放松的隶属函数依赖的稳定性结果; 其次, 基于前提不匹配技术, 提出了变时滞模糊系统的状态反馈控制器的设计方法, 其隶属函数及模糊规则数目可以自由选取, 从而提高了控制器设计的灵活性; 最后, 给出三个仿真实例证明所提方法的有效性.

**关键词:** 自由权矩阵不等式; 状态空间分割; 分段隶属函数; 隶属函数依赖; 前提不匹配

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2019)-04-0645-09

## Membership-function-dependent control of fuzzy systems with time-varying delays

ZHOU Kun<sup>1</sup>, QI Shu-Nan<sup>2</sup>, LI Jing<sup>2</sup>, JIN Liu-Qian<sup>3</sup>, CAI Ji-Rong<sup>4</sup>, HUANG Tian-Min<sup>5</sup>

- (1. College of Mechanical and Electrical Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China;  
2. School of Computer Science and Technology, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, China;  
3. School of Business and Management, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;  
4. School of Business Planning, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;  
5. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract:** To investigate the stability analysis and stabilization for T-S fuzzy systems with time-varying delays, an augmented Lyapunov-Krasovskii function is first constructed and delay-dependent stability criteria, combining with the free-matrix-based integral inequality, are defined in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Based on the state space decomposition method, some piecewise membership functions, which are locally represented in terms of the convex combinations of the supremum and infimum of some local basis functions, are employed to approximate the membership functions, some relaxed membership-function-dependent stability results are obtained with fully consideration of the boundary information of membership functions and introduction of some slack matrices. Secondly, state feedback controllers for the fuzzy systems with time-varying delays are presented based on the imperfect premise matching technique, in which the membership functions and the number of fuzzy rules are allowed to be designed freely, as a result, the flexibility of controller design is then improved. Finally three numerical

收稿日期: 2018-05-24

基金项目: 重庆市社会科学规划项目(2016BS082); 国家自然科学基金(61473239, 51475391); 重庆市前沿与应用基础研究计划项目(cstc2014jcyjA00050)

作者简介: 周坤(1988-), 男, 博士, 研究方向为模糊控制、时滞系统. E-mail: 13488950521@163.com

通讯作者: 齐淑楠. E-mail: 18215528161@163.com

examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed approaches.

**Keywords:** Free-matrix-based integral inequality; State space decomposition; Piecewise membership functions; Membership-function-dependent; Imperfect premise matching

## 1 引言

模糊控制是一种处理非线性系统行之有效的控制方法. 为了方便对系统的分析, T-S 模糊模型将所考虑的非线性系统描述为若干个线性子系统加权和形式. 在过去的 30 年中, T-S 模糊控制一直是学者研究的热点. 另一方面, 时滞现象广泛地存在于实际的控制系统中<sup>[1]</sup>, 时滞的存在常常会影响到系统的控制性能, 甚至可能导致系统的不稳定. 因此, 克服时滞现象对控制系统性能的影响具有理论和现实意义, 自 Cao 等<sup>[2]</sup>首次将 T-S 模糊模型方法引入到非线性时滞系统的研究之后, 国内外学者对 T-S 模糊时滞系统进行了深入地研究, 并且取得了丰硕的成果<sup>[3-7]</sup>. Su 等<sup>[8]</sup>构造一个合适的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 结合凸组合技术与时滞分割技术, 引入模糊自由权矩阵, 给出了保守性较小的稳定性准则; 基于并行分布补偿(英文全称 PDC)算法, 提出了模糊状态反馈控制器的设计方法. Park 等<sup>[9]</sup>研究了一类时变时滞离散 T-S 模糊系统的稳定性分析与控制器综合问题. 首先, 在柯西-施瓦茨不等式的基础上构造一个新的有限和不等式, 结合一个新的增广 Lyapunov-Krasovskii 函数, 得到了较为宽松的时滞依赖的稳定性结果; 其次, 基于上述稳定性分析, 给出了模糊系统镇定的条件. Tsai 等<sup>[10]</sup>构造了一个新的齐次多项式 Lyapunov-Krasovskii 函数, 结合 Pólya 定理给出了保守性较小的时滞依赖稳定性条件; 再者, 引入适当的松弛矩阵, 提出了基于 PDC 算法的模糊控制器设计方法.

对于 T-S 模糊时滞系统的研究, 上述的成果都是基于隶属函数独立分析法得到的, 即不考虑隶属函数的形状及边界信息, 该方法要求稳定性分析及控制器综合的结果对任何形状的隶属函数都是成立的, 这样得到的结果是相对保守的. 实际上, 隶属函数在 T-S 模糊模型法的分析中起着重要作用. 不同于隶属函数独立分析法, 隶属函数依赖分析法将隶属函数的形状及边界大小信息引入到 T-S 模糊控制的稳定性分析之中, 能有效地降低稳定性分析的保守性. 当前, 隶属函数依赖的 T-S 模糊时滞系统的稳定性结果还很少, 对于 T-S 模糊时

滞系统的研究, 如何充分考虑隶属函数的边界大小和形状信息, 进而得到更为宽松的隶属函数依赖的稳定性结果是值得探究的问题.

另处, 当前几乎所有的 T-S 模糊系统的控制器都是基于 PDC 算法设计的. PDC 技术要求模糊控制器与模糊模型拥有相同的隶属函数及模糊规则数目, 这使得控制器设计具有一定的局限性. 尤其是当 T-S 模型的隶属函数非常复杂或者规则数目较大时, PDC 技术可能使模糊控制器的结构复杂化, 甚至导致较高的补偿成本<sup>[11]</sup>. 为了克服 PDC 技术的上述局限性, Lam 等<sup>[12]</sup>提出了前提不匹配技术. 基于前提不匹配技术设计的模糊控制器, 其隶属函数及模糊规则数目可以自由选取. Zhao 等<sup>[13]</sup>构造线性积分模糊 Lyapunov-Krasovskii 函数, 在稳定性分析时, 考虑隶属函数的边界和形状信息, 基于前提不匹配策略, 提出了模糊动态输出反馈  $H_\infty$  控制器的设计方法. Zhao 等<sup>[14]</sup>构造一个新的有限和不等式, 并且证明了一些常见的不等式是其特殊形式, 结合增广 Lyapunov-Krasovskii 函数, 考虑隶属函数的边界信息, 给出了保守性较小的时滞依赖的稳定性准则. 基于前提不匹配技术, 提出了模糊时滞系统的状态反馈控制器设计方法. 但文献[13, 14]提出的前提不匹配的模糊控制器设计方法, 只考虑了隶属函数不匹配的情况, 并未考虑模糊规则数目不相同的情况.

综上所述, 本文研究了变时滞 T-S 模糊系统的稳定性分析和控制器综合问题. 其主要贡献有以下三点: (1) 构造一个含有更多时滞信息的增广 Lyapunov-Krasovskii 函数, 使用自由权矩阵积分不等式处理 Lyapunov-Krasovskii 函数导数中的积分项, 进而给出了时滞依赖的稳定性准则; (2) 为了降低稳定性分析的保守性, 基于状态空间分割技术, 构造一些由于子空间的局部上下确界的凸组合表示的分段隶属函数去近似逼近隶属函数, 充分考虑隶属函数的边界大小与形状信息, 引入合适的松弛矩阵, 得到了更为宽松的隶属函数依赖的稳定性结果; (3) 为了提高控制器设计的自由度, 基于前提不匹配技术, 给出了模糊状态反馈控制器的设计方法, 该模糊控制器的隶属函数和模糊规则数目可以自由选取, 从而增加了控制器设计的灵活性, 有

效地降低了控制器的复杂度. 文中的符号如表 1.

表 1 主要符号表  
Tab. 1 Main symbol table

符号	代表意义
$R^n$	$n$ 维向量空间
$R^{n \times m}$	$n \times m$ 维矩阵空间
$\text{diag}\{\dots\}$	对角矩阵
$P > 0$	矩阵 $P$ 是正定的
$0$	合适维数的零矩阵
$I$	合适维数的单位矩阵
$A^{-1}$	矩阵 $A$ 的逆矩阵
$A^T$	矩阵 $A$ 的转置
$\text{rank}(A)$	矩阵 $A$ 的秩
$*$	矩阵中的对称项
$\text{Sym}\{A\}$	矩阵 $A$ 及其转置的和

## 2 问题描述

### 2.1 模糊模型

考虑如下具有  $p$  个规则数目的 T-S 模糊模型描述的时变时滞系统.

**Rule  $i$ :** if  $\zeta_1(x(t))$  is  $\phi_1^i$  and  $\zeta_2(x(t))$  is  $\phi_2^i$  and  $\dots$  and  $\zeta_\chi(x(t))$  is  $\phi_\chi^i$ , then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{i\alpha}x(t) + A_{di}x(t-h(t)) + B_i u(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h_M, 0] \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\phi_\alpha^i, \alpha = 1, 2, \dots, \chi; i = 1, 2, \dots, p$  是模糊集,  $\phi(t)$  是定义在  $[-h_M, 0]$  上的连续初始函数向量.  $x(t) \in R^n$  是系统状态,  $u(t) \in R^m$  是控制输入,  $A_i, A_{di}, B_i$  是已知的具有合适维数的矩阵. 时滞  $h(t)$  是一个连续有界的可微函数, 满足

$$0 \leq h(t) \leq h_M, \dot{h}(t) \leq \mu \quad (2)$$

通过单点模糊化, 乘积推理, 中心平均反模糊化方法, 得到 T-S 模糊系统(1)的动态模型.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p m_i(x(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t)) + B_i u(t)) \quad (3)$$

其中,  $m_i(x(t)) = \frac{\mu_i(x(t))}{\sum_{i=1}^p \mu_i(x(t))}, \mu_i(x(t)) =$

$\prod_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\phi_\alpha^i}(\zeta_\alpha(x(t)))$ . 这里,  $m_i(x(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^p m_i(x(t)) = 1, \lambda_{\phi_\alpha^i}(\zeta_\alpha(x(t)))$  是  $\zeta_\alpha(x(t))$  对应的隶属函数.

### 2.2 基于前提不匹配技术的模糊控制器

设计如下前提不匹配的具有  $c$  个规则数目的模糊状态反馈控制器:

**Rule  $j$ :** if  $\zeta_1(x(t))$  is  $\phi_1^j$  and  $\zeta_2(x(t))$  is  $\phi_2^j$  and  $\dots$  and  $\zeta_\chi(x(t))$  is  $\phi_\chi^j$ , then

$$u(t) = K_j x(t) \quad (4)$$

整个状态反馈控制律为

$$u(t) = \sum_{j=1}^c h_j(x(t)) K_j x(t) \quad (5)$$

其中,  $K_j$  是待求解的控制增益矩阵.

结合式(3)和(5), 得到闭环系统的紧缩形式.

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t) + A_d(t)x(t-h(t)) \quad (6)$$

本文的目标是得到前提不匹配的状态反馈增益  $K_j$ , 保证闭环系统(6)是渐近稳定的.

### 2.3 预备引理

为得到主要结果, 我们给出如下引理.

**引理 1**<sup>[15]</sup> 自由权矩阵积分不等式. 假设  $x$  是连续可微函数:  $[a, b] \rightarrow R^n$ , 对于正定矩阵  $S \in R^{n \times n}, Z_1 \in R^{3n \times 3n}, Z_3 \in R^{3n \times 3n}$  及任意矩阵  $Z_2 \in R^{3n \times 3n}, N_1 \in R^{3n \times n}, N_2 \in R^{3n \times n}$  满足

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & N_1 \\ * & Z_3 & N_2 \\ * & * & S \end{bmatrix} \geq 0$$

有以下不等式成立

$$-\int_a^b \dot{\omega}^T(s) S \dot{\omega}(s) ds \leq \omega^T \Omega \bar{\omega}$$

其中,  $\bar{\omega} = \left[ \omega^T(b) \omega^T(a) \frac{1}{b-a} \int_a^b \omega^T(s) du \right]^T; \Omega = (b-a) \left( Z_1 + \frac{1}{3} Z_3 \right) + \text{Sym}\{N_1 \Pi_1 + N_2 \Pi_2\}; \Pi_1 = e_1 - e_2; \Pi_2 = 2e_3 - e_1 - e_2; e_i = [0_{n \times (i-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (3-i)n}]^T, i = 1, 2, 3.$

**引理 2**<sup>[16]</sup> Finsler 引理. 设  $\zeta \in R^n$  是随机向量,  $\Gamma \in R^{m \times n}$  是对称矩阵,  $B \in R^{m \times n}$  是任意矩阵且  $\text{rank}(B) = r < n, B^\perp \in R^{n \times (n-r)}$  是矩阵  $B$  的右正交补, 满足  $BB^\perp = 0, B^\perp B^{\perp T} > 0$ . 则如下命题是等价的. (1)  $\zeta^T \Gamma \zeta < 0, \forall \zeta \neq 0; B \zeta = 0$ ; (2)  $B^{\perp T} \Gamma B^\perp < 0$ ; (3)  $\exists \kappa \in R: \Gamma - \kappa B^T B < 0$ ; (4)  $\exists R \in R^{m \times m}: \Gamma + RB + B^T R^T < 0$ .

## 3 主要结果

为了充分考虑隶属函数的边界信息, 降低稳定性分析的保守性, 受文献[17]的启发, 我们首先引入状态空间分割技术. 将状态空间  $\Phi$  分成  $t$  个相连的子空间, 分别记为  $\Phi_k, k = 1, 2, \dots, t$ , 满足  $\Phi = \bigcup_{k=1}^t \Phi_k$ . 对于其中一个状态  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_\gamma]^T$ ,

$\in \Phi_k, z_r$  的上下确界分别记为  $\underline{z}_{r_i,k}$  和  $\bar{z}_{r_i,k}, r=1, 2, \dots, \eta, i_r=1, 2$ , 即满足  $\underline{z}_{r_i,k} \leq z_r \leq \bar{z}_{r_i,k}$ . 设状态子空间  $\Phi_k$  的顶点为  $z_{i_1 \dots i_\eta k} = [z_{1i_1 k} \ \dots \ z_{\eta i_\eta k}]$ , 分段隶属函数  $\hat{\omega}(z)$  定义为

$$\hat{\omega}(z) = \sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{r_i,k}(z_r) \hat{\omega}(z_{i_1 \dots i_\eta k}) \quad (7)$$

其中,  $\nu_{r_i,k}(z_r)$  是提前定义的函数且满足: (1) 对所有的  $r, k$  和  $z \in \Phi_k$  有  $0 \leq \nu_{r_i,k}(z_r) \leq 1, \sum_{i_r=1}^2 \nu_{r_i,k}(z_r) = 1$ , 否则,  $\nu_{r_i,k}(z_r) = 0$ ; (2)  $\sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{r_i,k}(z_r) = 1$ .

### 3.1 隶属函数依赖的稳定性分析

**定理 1** 对于给定时滞参数  $h_M > 0$  和  $\mu < 1$ , 时滞  $h(t)$  及其导数满足条件(2), T-S 模糊时滞系统(3)在  $u(t) = 0$  下是渐近稳定的, 如果存在以下对称正定矩阵  $P \in \mathbf{R}^{5n \times 5n}, Q_1, Q_2 \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}, R \in \mathbf{R}^{n \times n}, F_i \in \mathbf{R}^{7n \times 7n}$ , 对称矩阵  $X_1, X_3, Y_1, Y_3 \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$  及任意矩阵  $X_2, Y_2 \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}, N_1, N_2, M_1, M_2 \in \mathbf{R}^{3n \times n}$  对

所有的  $i=1, \dots, p$ , 使如下 LMIs 成立.

$$\Pi_{12} \geq 0 \quad (8)$$

$$\Pi_{13} \geq 0 \quad (9)$$

$$F_i \geq \Delta_i(h_M, \mu) \quad (10)$$

$$F_i \geq \Delta_i(0, \mu) \quad (11)$$

$$\left( \sum_{i=1}^p \hat{m}_i(x_{i_1 \dots i_\eta k}) + \Delta \underline{m}_i \right) \Delta_i(h_M, \mu) + (\Delta \bar{m}_i - \Delta \underline{m}_i) F_i \leq 0,$$

$$F_i \leq 0, \quad \forall i_1, \dots, i_\eta \in \{1, 2\}, k=1, 2, \dots, t \quad (12)$$

$$\left( \sum_{i=1}^p \hat{m}_i(x_{i_1 \dots i_\eta k}) + \Delta \underline{m}_i \right) \Delta_i(0, \mu) + (\Delta \bar{m}_i - \Delta \underline{m}_i) F_i \leq 0,$$

$$F_i \leq 0, \quad \forall i_1, \dots, i_\eta \in \{1, 2\}, k=1, 2, \dots, t \quad (13)$$

其中, 分段隶属函数  $\hat{m}_i(x)$  定义于式(20);  $t$  是状态空间  $\Phi$  的分割数目;  $x_{i_1 i_2 \dots i_\eta k}$  是第  $k$  个子空间的顶点;  $\Delta \bar{m}_i, \Delta \underline{m}_i$  是提前定义的标量, 满足  $\Delta \underline{m}_i \leq \Delta m_i(x) \leq \Delta \bar{m}_i$ , 其他矩阵定义如下.

$$\begin{aligned} \Delta_i(h(t), \dot{h}(t)) = & \text{Sym}\{\Pi_1^T P \Pi_{2i}\} + \Pi_{3i}^T Q_1 \Pi_{3i} - \Pi_4^T Q_2 \Pi_4 + (1 - \dot{h}(t)) \Pi_5^T (Q_2 - Q_1) \Pi_5 + h_M U_i^T R U_i + \\ & h(t) \Pi_6^T \left( X_1 + \frac{1}{3} X_3 \right) \Pi_6 + \text{Sym}\{\Pi_6^T N_1 \Pi_7 + \Pi_6^T N_2 \Pi_8\} + (h_M - h(t)) \Pi_9^T \left( Y_1 + \frac{1}{3} Y_3 \right) \Pi_9 + \\ & \text{Sym}\{\Pi_9^T M_1 \Pi_{10} + \Pi_9^T M_2 \Pi_{11}\} \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = [e_1^T \ e_3^T \ e_2^T \ h(t)e_6^T \ (h_M - h(t))e_7^T]^T;$$

$$\Pi_{2i} = [U_i^T \ e_5^T \ (1 - \dot{h}(t))e_6^T \ e_1^T - (1 - \dot{h}(t))e_6^T \ (1 - \dot{h}(t))e_2^T - e_2^T]^T,$$

$$\Pi_{3i} = [U_i^T \ e_1^T]^T; \Pi_4 = [e_5^T \ e_3^T]^T; \Pi_5 = [e_4^T \ e_2^T]^T; \Pi_6 = [e_1^T \ e_2^T \ e_6^T]^T,$$

$$\Pi_7 = e_1 - e_2; \Pi_8 = 2e_6 - e_1 - e_2; \Pi_9 = [e_2^T \ e_3^T \ e_7^T]^T; \Pi_{10} = e_2 - e_3,$$

$$\Pi_{11} = 2e_7 - e_2 - e_3, U_i = A_i e_1 + A_{di} e_2;$$

$$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & N_1 \\ * & X_3 & N_2 \\ * & * & R \end{bmatrix}; \Pi_{13} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & M_1 \\ * & Y_3 & M_2 \\ * & * & R \end{bmatrix}, e_i = [0_{n \times (i-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (7-i)n}], i=1, 2, \dots, 7$$

证明 构造增广 Lyapunov-Krasovskii 函数.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (14)$$

其中,  $V_1(t) = \eta_1^T(t) P \eta_1(t); V_2(t) = \int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(s)$

$$Q_1 \eta_2(s) ds + \int_{t-h_M}^{t-h(t)} \eta_2^T(s) Q_2 \eta_2(s) ds; V_3(t) = \int_{t-h_M}^t$$

$$\dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds du$$

这里,  $\eta_1(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h) \ x^T(t-h(t))$

$$\int_{t-h(t)}^t x^T(s) ds \ \int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s) ds]^T;$$

$$\eta_2(t) = [\dot{x}^T(t) \ x^T(t)]^T$$

对式(14)求导可得

$$\dot{V}_1(t) = \sum_{i=1}^p m_i(x(t)) \xi^T(t) \text{Sym}\{\Pi_1^T P \Pi_{2i}\} \xi(t) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \sum_{i=1}^p m_i(x(t)) \xi^T(t) (\Pi_{3i}^T Q_1 \Pi_{3i} - \Pi_4^T Q_2 \Pi_4 + \\ & (1 - \dot{h}(t)) \Pi_5^T (Q_2 - Q_1) \Pi_5) \xi(t) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\dot{V}_3(t) \leq h_M \sum_{i=1}^p m_i(x(t)) \xi^T(t) U_i^T R U_i \xi(t) -$$

$$\int_{t-h_M}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \quad (17)$$

其中,  $\xi(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h(t)) \ x^T(t-h) \ \dot{x}^T(t-h(t)) \ \dot{x}^T(t-h)]^T$

$$\frac{1}{h_M-h(t)} \int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds \Big]^T$$

运用引理 1 对式(17)中的积分项进行处理可得

$$-\int_{t-h_M}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds = -\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds -$$

$$\int_{t-h_M}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq \sum_{i=1}^p m_i(x(t))\xi^T(t)\{h(t)\Pi_6^T$$

$$\left(X_1 + \frac{1}{3}X_3\right)\Pi_6 +$$

$$\text{Sym}\{\Pi_6^T N_1 \Pi_7 + \Pi_6^T N_2 \Pi_8\} +$$

$$(h_M-h(t))\Pi_9^T \left(Y_1 + \frac{1}{3}Y_3\right)\Pi_9 +$$

$$\text{Sym}\{\Pi_9^T M_1 \Pi_{10} + \Pi_9^T M_2 \Pi_{11}\}\xi(t) \quad (18)$$

由式(15) ~ (18), 可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^p m_i(x(t))\xi^T(t)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) \quad (19)$$

为了降低稳定性分析的保守性, 根据式(7), 定义如下分段隶属函数

$$\hat{m}_i(x) = \sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_{\eta}=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{n_i, k}(x_r) \hat{m}_i(x_{i_1 \dots i_{\eta}}) \quad (20)$$

设  $\Delta m_i(x) = m_i(x) - \hat{m}_i(x)$ ,  $\Delta m_i(x)$  的上下确界分别定义为  $\Delta \bar{m}_i$  和  $\Delta \underline{m}_i$ , 即满足  $\Delta \underline{m}_i \leq \Delta m_i(x) \leq \Delta \bar{m}_i$ . 引入松弛矩阵  $0 \leq F_i = F_i^T \in R^{7n \times 7n}$ , 且满足  $F_i \geq \Delta_i(h(t), \dot{h}(t))$ , 由式(19)得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \hat{m}_i(x(t))\xi^T(t)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) + \sum_{i=1}^p \Delta m_i(x(t))\xi^T(t)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) = \\ &\sum_{i=1}^p (\hat{m}_i(x(t)) + \Delta \underline{m}_i)\xi^T(t)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p (\Delta m_i(x(t)) - \Delta \underline{m}_i)\xi^T(t)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^p \xi^T(t)((\hat{m}_i(x(t)) + \Delta \underline{m}_i)\Delta_i(h(t), \dot{h}(t)) + (\Delta \bar{m}_i - \Delta \underline{m}_i)F_i)\xi(t) \end{aligned} \quad (21)$$

将  $\hat{m}_i(x)$  按式(20)在式(21)中展开得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_{\eta}=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{n_i, k}(x_r)\xi^T(t) \times$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^p \hat{m}_i(x_{i_1 \dots i_{\eta}}) + \Delta \underline{m}_i\right)_i \times$$

$$\Delta_i(h(t), \dot{h}(t)) + (\Delta \bar{m}_i - \Delta \underline{m}_i)F_i\right)\xi(t)$$

如果 LMIs(8) ~ (13) 成立, 则有  $\dot{V}(t) < 0$ , 此时系统(3)是全局渐近稳定的, 证明完毕.

### 3.2 前提不匹配的控制器设计

在定理 1 稳定性分析的基础上, 本小节给出前提不匹配的模糊状态反馈控制器的设计方法.

**定理 2** 对于给定时滞参数  $h_M > 0, \mu < 1$  及调整参数  $\epsilon$ , 时滞  $h(t)$  及其导数满足条件(2), T-S 模糊时滞系统(6)是渐近稳定的, 如果存在以下对称正定矩阵  $\tilde{P} \in R^{5n \times 5n}, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 \in R^{2n \times 2n}, \tilde{R} \in R^{n \times n}, \tilde{F}_{ij} \in R^{8n \times 8n}$ , 对称矩阵  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_3, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_3 \in R^{3n \times 3n}$  及任意矩阵  $\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2 \in R^{3n \times 3n}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 \in R^{3n \times n}$  对所有的  $i=1, \dots, p, j=1, \dots, c$  使如下 LMIs 成立:

$$\tilde{\Pi}_{12} \geq 0 \quad (22)$$

$$\tilde{\Pi}_{13} \geq 0 \quad (23)$$

$$\tilde{F}_{ij} \geq \tilde{\Delta}_{ij}(h_M, \mu) \quad (24)$$

$$\tilde{F}_{ij} \geq \tilde{\Delta}_{ij}(0, \mu) \quad (25)$$

$$\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \hat{\vartheta}_{ij}(x_{i_1 \dots i_{\eta}}) + \Delta \underline{\vartheta}_{ij}\right)\tilde{\Delta}_{ij}(h_M, \mu) +$$

$$(\Delta \bar{\vartheta}_{ij} - \Delta \underline{\vartheta}_{ij})\tilde{F}_{ij} \leq 0,$$

$$\forall i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}, k=1, 2, \dots, t \quad (26)$$

$$\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \hat{\vartheta}_{ij}(x_{i_1 \dots i_{\eta}}) + \Delta \underline{\vartheta}_{ij}\right)\tilde{\Delta}_{ij}(0, \mu) + (\Delta \bar{\vartheta}_{ij} -$$

$$\Delta \underline{\vartheta}_{ij})\tilde{F}_{ij} \leq 0,$$

$$\forall i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}, k=1, 2, \dots, t \quad (27)$$

此时, 控制器增益为:  $K_j = G_j X^{-1}, j=1, 2, \dots, c$ . 其中, 分段隶属函数  $\hat{\vartheta}_{ij}(x)$  定义于式(34);  $\Delta \bar{\vartheta}_{ij}, \Delta \underline{\vartheta}_{ij}$  是提前定义的标量, 满足  $\Delta \underline{\vartheta}_{ij} \leq \Delta \vartheta_{ij}(x) \leq \Delta \bar{\vartheta}_{ij}$ ; 其他矩阵定义如下.

$$\tilde{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) = \text{Sym}\{\tilde{\Pi}_1^T \tilde{P} \tilde{\Pi}_2\} + \tilde{\Pi}_3^T \tilde{Q}_1 \tilde{\Pi}_3 -$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\Pi}_4^T \tilde{Q}_2 \tilde{\Pi}_4 + (1-h(t)) \tilde{\Pi}_5^T (\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1) \tilde{\Pi}_5 + \\ & h_M \tilde{e}_8^T \tilde{R} \tilde{e}_8 + h(t) \tilde{\Pi}_6^T \left( \tilde{X}_1 + \frac{1}{3} \tilde{X}_3 \right) \tilde{\Pi}_6 + \\ & \text{Sym} \{ \tilde{\Pi}_6^T \tilde{N}_1 \tilde{\Pi}_7 + \tilde{\Pi}_6^T \tilde{N}_2 \tilde{\Pi}_8 \} + (h_M - h(t)) \\ & \tilde{\Pi}_9^T \left( \tilde{Y}_1 + \frac{1}{3} \tilde{Y}_3 \right) \tilde{\Pi}_9 + \\ & \text{Sym} \{ \tilde{\Pi}_9^T \tilde{M}_1 \tilde{\Pi}_{10} + \tilde{\Pi}_9^T \tilde{M}_2 \tilde{\Pi}_{11} \} + \\ & \text{Sym} \{ (\tilde{e}_1^T + \epsilon \tilde{e}_8^T) (A_i X \tilde{e}_1 + B_i G_j \tilde{e}_1 + A_{di} X \tilde{e}_2 - \\ & X \tilde{e}_8) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 &= [\tilde{e}_1^T \quad \tilde{e}_3^T \quad \tilde{e}_2^T \quad h(t) \tilde{e}_6^T \quad (h_M - h(t)) \tilde{e}_7^T]^T, \\ \tilde{\Pi}_2 &= [\tilde{e}_8^T \quad \tilde{e}_5^T \quad (1-h(t)) \tilde{e}_6^T \quad \tilde{e}_1^T - (1-h(t)) \tilde{e}_6^T \\ & (1-h(t)) \tilde{e}_2^T - \tilde{e}_2^T]^T, \\ \tilde{\Pi}_3 &= [\tilde{e}_8^T \quad \tilde{e}_1^T]^T, \quad \tilde{\Pi}_4 = [\tilde{e}_5^T \quad \tilde{e}_3^T]^T, \\ \tilde{\Pi}_5 &= [\tilde{e}_4^T \quad \tilde{e}_2^T]^T, \quad \tilde{\Pi}_6 = [\tilde{e}_1^T \quad \tilde{e}_2^T \quad \tilde{e}_6^T]^T, \\ \tilde{\Pi}_7 &= \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2, \quad \tilde{\Pi}_8 = 2 \tilde{e}_6 - \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2, \\ \tilde{\Pi}_9 &= [\tilde{e}_2^T \quad \tilde{e}_3^T \quad \tilde{e}_7^T]^T, \quad \tilde{\Pi}_{10} = \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3, \\ \tilde{\Pi}_{11} &= 2 \tilde{e}_7 - \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3, \\ \tilde{\Pi}_{12} &= \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \tilde{N}_1 \\ * & \tilde{X}_3 & \tilde{N}_2 \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Pi}_{13} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 & \tilde{Y}_2 & \tilde{M}_1 \\ * & \tilde{Y}_3 & \tilde{M}_2 \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{e}_i = [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (8-i)n}], i=1, 2, \dots, 8$$

证明 定义矩阵:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t) &= [x^T(t) \quad x^T(t-h(t)) \quad x^T(t-h) \quad \dot{x}^T(t-h(t)) \\ & \dot{x}^T(t-h) \quad \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x^T(s) ds \\ & \frac{1}{h_M - h(t)} \int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s) ds \dot{x}^T(t)]^T \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Psi(t) = [A(t) + B(t)K(t) \quad A_d(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -I] \quad (29)$$

在定理 1 证明的基础上,由式(19)和式(28)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{\xi}^T(t) \\ & \bar{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) \tilde{\xi}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

其中,  $\bar{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) = \text{Sym} \{ \tilde{\Pi}_1^T P \tilde{\Pi}_2 \} + \tilde{\Pi}_3^T Q_1 \tilde{\Pi}_3 - \tilde{\Pi}_4^T Q_2 \tilde{\Pi}_4 + (1-h(t)) \tilde{\Pi}_5^T (Q_2 - Q_1) \tilde{\Pi}_5 + h_M \tilde{e}_8^T R \tilde{e}_8 + h(t) \tilde{\Pi}_6^T (X_1 + \frac{1}{3} X_3) \tilde{\Pi}_6 + \text{Sym} \{ \tilde{\Pi}_6^T N_1 \tilde{\Pi}_7 + \tilde{\Pi}_6^T N_2 \tilde{\Pi}_8 \} + (h_M - h(t)) \tilde{\Pi}_9^T (Y_1 + \frac{1}{3} Y_3) \tilde{\Pi}_9 + \text{Sym} \{ \tilde{\Pi}_9^T M_1 \tilde{\Pi}_{10} + \tilde{\Pi}_9^T M_2 \tilde{\Pi}_{11} \}$

由式(28)和(29)得  $\Psi(t) \tilde{\xi}(t) = 0$ , 运用引理 2 的命

题(1)和(4),闭环系统(6)是渐近稳定的,如果存在矩阵  $\Gamma \in \mathbf{R}^{8n \times 8n}$  满足下式.

$$\bar{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) + \Gamma \Psi(t) + \Psi^T(t) \Gamma^T < 0 \quad (31)$$

设矩阵

$$\begin{aligned} \Gamma &= [X^{-T} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \epsilon X^{-T}]^T \\ \eta &= \text{diag}(XXXXXXXXXX) \end{aligned}$$

其中,  $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是任意可逆矩阵;  $\epsilon$  是调整参数. 在式(31)的左右两边分别乘以  $\eta^T$  及其转置得

$$\begin{aligned} \eta^T (\bar{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) + \Gamma \Psi(t) + \Psi^T(t) \Gamma^T) \eta = \\ \tilde{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) \end{aligned} \quad (32)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \text{diag}^T(XXXXXX) P \text{diag}(XXXXXX), \\ \tilde{Q}_1 &= X^T Q_1 X, \quad \tilde{Q}_2 = X^T Q_2 X, \quad \tilde{R} = X^T R X, \quad G_j = K_j X, \\ \tilde{X}_1 &= \text{diag}^T(XXX) X_1 \text{diag}(XXX), \\ \tilde{X}_3 &= \text{diag}^T(XXX) X_3 \text{diag}(XXX), \\ \tilde{Y}_1 &= \text{diag}^T(XXX) Y_1 \text{diag}(XXX), \\ \tilde{Y}_3 &= \text{diag}^T(XXX) Y_3 \text{diag}(XXX), \\ \tilde{N}_1 &= \text{diag}^T(XXX) N_1 X, \quad \tilde{N}_2 = \text{diag}^T(XXX) N_2 X, \\ \tilde{M}_1 &= \text{diag}^T(XXX) M_1 X, \quad \tilde{M}_2 = \text{diag}^T(XXX) M_2 X. \end{aligned}$$

由式(32)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{\xi}^T(t) \\ & \tilde{\Delta}_{ij}(h(t), \dot{h}(t)) \tilde{\xi}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

设  $\vartheta_{ij}(x(t)) = m_i(x(t)) h_j(x(t))$ , 基于状态空间分割技术,定义分段隶属函数

$$\hat{\vartheta}_{ij}(x) = \sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^\eta \nu_{n_i, k}(x_r) \vartheta_{ij}(x_{i_1} \dots x_{i_\eta}) \quad (34)$$

同时,引入松弛矩阵  $0 \leq \tilde{F}_{ij} = \tilde{F}_{ij}^T \in \mathbf{R}^{8n \times 8n}$ , 接下来的证明类似于定理 1, 在此就不再赘述.

如果 LMIs(22) ~ (27) 成立, 则有  $\dot{V}(t) < 0$ , 此时闭环系统(6)是全局渐近稳定的, 证明完毕.

### 4 仿真验证

例 1 考虑文献[18, 19]给出的具有两个规则数目的标称 T-S 模糊时变时滞系统(3).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(x(t)) (A_r x(t) + A_{di} x(t-h(t))) \quad (35)$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.1 & 0.1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.1 \\ -0.8 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ -0.2 & -1.1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1.1 & -1.2 \end{bmatrix}$$

选择如下的隶属函数:

$$\begin{cases} m_1(x_1) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x_1}{2}\right)}, \\ m_2(x_1) = 1 - m_1(x_1) \end{cases} \quad (36)$$

由式(36)知,隶属函数  $m_i(x_1), i=1,2$  依赖于状态  $x_1$ . 根据式(7),定义分段隶属函数  $\hat{m}_i(x_1)$

$= \sum_{k=1}^t \sum_{i_1=1}^2 v_{1i_1k}(x_1) \hat{m}_i(x_{i_1k})$ , 现将状态空间  $x_1(t) \in [-10, 10]$  分成  $t=20$  个子空间, 其中第  $k$  个子空间为  $(k-11) \leq x_1 \leq (k-10), k=1, 2, \dots, 20$ , 取  $v_{11k}(x_1) = 1 - \frac{x_1 - x_{2k}}{x_{1k} - x_{2k}}$  和  $v_{12k}(x_1) = 1 - v_{11k}(x_1)$ , 其中,  $x_{1k} = (k-11), x_{2k} = (k-10)$ . 由分段隶属函数的定义, 可以得到  $\Delta m_i$  的最大和最小值为  $\Delta \underline{m}_1 = \Delta \underline{m}_2 = -2.9834 \times 10^{-3}, \Delta \bar{m}_1 = \Delta \bar{m}_2 = 2.9834 \times 10^{-3}$ .

运用定理 1 计算出在不同的  $\mu$  值下保证系统(35)渐近稳定的最大允许时滞  $h_M$ , 如表 2 所示, 由本文定理 1 求出的时滞上界大于由文献[18,19]所得时滞上界, 这说明本文定理 1 给出的隶属函数依赖的稳定性准则具有较小的保守性.

同时, 在表 2 的最后一列给出了表明每种方法计算复杂度的所需变量个数, 由表 2 可以看到, 本文需要的变量个数比文献[18]的变量个数多, 但是相较于文献[18], 本文具有更小的保守性. 此外, 本文所需的变量个数比文献[19]的变量个数少, 且比文献[19]具有较小的保守性, 说明本文提出的方法在保证具有较小保守性的同时很好地兼顾了计算复杂度的问题.

表 2 不同的  $\mu$  值对应的最大允许时滞  $h_M(t=20)$

Tab. 2 Maximum allowable delay  $h_M$  for different  $\mu(t=20)$

方法	$\mu=0$	$\mu=0.1$	$\mu=0.5$	变量个数
文献[18]	4.42	3.42	2.02	$51.5n^2 + 9.5n$
文献[19]	5.5826	4.2044	2.0685	$209n^2 + 8n$
定理 1	5.5826	4.3763	2.2547	$114n^2 + 18n$

**例 2** 考虑文献[19]给出的具有两个规则数目的标称 T-S 模糊时变时滞系统(3).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(x(t))(A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t))) \quad (37)$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}$$

模糊模型的隶属函数选择同例 1, 类似例 1, 取状态空间的分割数目  $t=20$ , 计算得到  $\Delta m_i$  的最大和最小值为  $\Delta \underline{m}_1 = \Delta \underline{m}_2 = -2.9834 \times 10^{-3}, \Delta \bar{m}_1 = \Delta \bar{m}_2 = 2.9834 \times 10^{-3}$ .

采用该算例与文献[19, 20]提出的方法比较, 类似例 1 的对比思路, 首先, 在不同的  $\mu$  值下, 计算出各文献保证 T-S 模糊时变时滞系统(37)渐近稳定的最大允许时滞  $h_M$ , 进而说明本文给出的结果在减少保守性方面的有效性. 如表 3 所示, 当  $t=20$  时, 在不同的  $\mu$  值下, 由定理 1 得到的保证 T-S 模糊时变时滞系统(37)渐近稳定的最大允许时滞都大于上述文献给出的结果, 这说明本文给出的隶属函数依赖的稳定性准则比文献[19, 20]提出的方法具有更小的保守性. 其中“—”表示不存在.

表 3 不同的  $\mu$  值对应的最大允许时滞  $h_M(t=20)$

Tab. 3 Maximum allowable delay  $h_M$  for different  $\mu(t=20)$

方法	$\mu=0$	$\mu=0.1$	$\mu \geq 1$	变量个数
文献[19]	2.5932	2.3268	—	$209n^2 + 8n$
文献[20]	6.93	6.42	2.49	$61n^2 + 14n$
定理 1	13.5728	13.2639	—	$114n^2 + 18n$

**例 3** 考虑文献[21]给出的非线性时滞系统: 搅拌反应釜 (CSTR) 系统. CSTR 系统由以下具有三个规则数目的 T-S 模糊模型(3)描述:

**Rule 1:** if  $x_2(t)$  is 0.8862, then

$$\dot{\delta x}(t) = A_1 \delta x(t) + A_{d1} \delta x(t-h(t)) + B_1 \delta u(t)$$

**Rule 2:** if  $x_2(t)$  is 2.7520, then

$$\dot{\delta x}(t) = A_2 \delta x(t) + A_{d2} \delta x(t-h(t)) + B_2 \delta u(t)$$

**Rule 3:** if  $x_2(t)$  is 4.7052, then

$$\dot{\delta x}(t) = A_3 \delta x(t) + A_{d3} \delta x(t-h(t)) + B_3 \delta u(t)$$

其中,  $(x_d, u_d)$  是一个期望操作点,  $\delta x(t) = x(t) - x_d, \delta x(t-h(t)) = x(t-h(t)) - x_d, \delta u(t) = u(t) - u_d$ , 此外, 系统矩阵定义如下.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4274 & 0.0757 \\ -1.4189 & -0.9442 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.0508 & 0.3958 \\ -6.4066 & 1.6168 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4.5279 & 0.3167 \\ -26.2228 & 0.9837 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = A_{d2} = A_{d3} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

隶属函数选择同文献[21].

$$m_1(x_2) =$$

$$\begin{cases} 1, & \text{if } x_2 \leq 0.8862 \\ 1 - \frac{x_2 - 0.8862}{2.7520 - 0.8862}, & \text{if } 0.8862 < x_2 < 2.752 \\ 0, & \text{if } x_2 \geq 2.752 \end{cases}$$

$$m_2(x_2) = \begin{cases} 1 - m_1, & \text{if } x_2 \leq 2.752 \\ 1 - m_3, & \text{if } x_2 \geq 2.752 \end{cases}$$

$$m_3(x_2) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{if } x_2 \leq 2.752 \\ \frac{x_2 - 2.7520}{4.7052 - 2.7520}, & \text{if } 2.752 < x_2 < 4.7052 \\ 1, & \text{if } x_2 \geq 4.7052 \end{cases}$$

基于前提不匹配策略,设计如下具有两个模糊规则数目的状态反馈控制器.

**Rule 1:** if  $x_2(t)$  is  $\phi_1^1$ , then  $u(t) = K_1 x(t)$

**Rule 2:** if  $x_2(t)$  is  $\phi_1^2$ , then  $u(t) = K_2 x(t)$

模糊控制器的隶属函数选择如下.

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x_1}{2}\right)}, h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$$

类似于例 1,首先计算出当  $t = 20$  时的  $\Delta\vartheta_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$  的最大和最小值,如表 4 所示.

表 4 当  $t = 20$  时,  $\Delta\vartheta_{ij}$  的最值

Tab. 4 The minimum and maximum of  $\Delta\vartheta_{ij}$  with  $t = 20$

$\Delta\vartheta_{ij}$ 的最小值	$\Delta\vartheta_{ij}$ 的最大值
$\Delta\vartheta_{11} = -7.2807 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{11} = 3.3904 \times 10^{-2}$
$\Delta\vartheta_{12} = -2.6882 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{12} = 1.9769 \times 10^{-2}$
$\Delta\vartheta_{21} = -9.2973 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{21} = 1.5290 \times 10^{-1}$
$\Delta\vartheta_{22} = -2.0264 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{22} = 4.2013 \times 10^{-3}$
$\Delta\vartheta_{31} = -7.7856 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{31} = 9.4768 \times 10^{-2}$
$\Delta\vartheta_{32} = -1.7372 \times 10^{-2}$	$\Delta\bar{\vartheta}_{32} = 1.0884 \times 10^{-3}$

特别地,取  $h_M = 4, \mu = 0.2, \epsilon = 0.35$ ,基于定理 2,使用 Matlab LMIs 工具箱解得反馈增益.  $K_1 = [13.6823 \quad -3.0428]$ ;  $K_2 = [6.5371 \quad -1.9753]$ .

取初始值为  $\varphi(0) = [0.8 \quad -1.6]^T, h(t) = 2 + 2 \sin(0.1t)$ ,仿真得到闭环系统的状态响应曲线如图 1 所示,从图 1 可以看出闭环系统是渐近稳定的,说明了本文定理 2 的控制器设计的有效性.

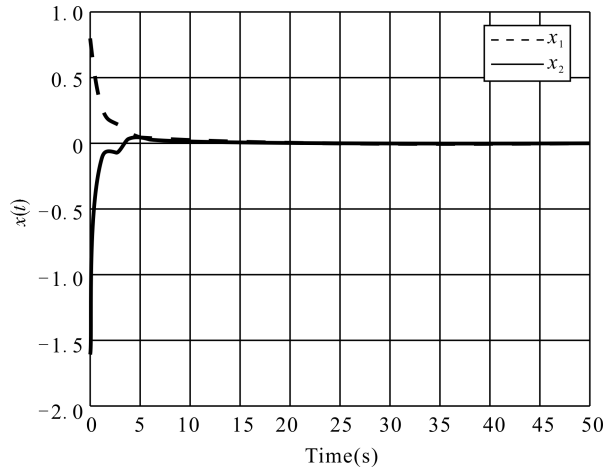


图 1 闭环系统状态响应  
Fig. 1 State responses of the closed-loop system

文献[21]也研究了例 2 中的 CSTR 系统,并且给出了基于 PDC 技术的模糊状态反馈控制器设计方法,其模糊控制器要求与模糊模型拥有相同的隶属函数和规则数目.而本文定理 2 提出的前提不匹配控制器的隶属函数和规则数目可以自由选取.通过为模糊控制器选择较为简单的隶属函数和较少的规则数,能有效地降低控制器的设计复杂度和执行难度,提高了控制器设计的自由度和灵活性.

## 5 结 论

本文针对一类 T-S 模糊变时滞系统,研究了稳定与镇定问题.首先,结合增广 Lyapunov-Krasovskii 函数、自由权矩阵不等式及状态空间分割技术,定义分段隶属函数,充分考虑隶属函数的边界大小和形状信息,引入合适的松弛矩阵,得到了保守性较小的隶属函数依赖的稳定性条件;其次,基于前提不匹配策略,提出了模糊状态反馈控制器的设计方法;最后,仿真实例证明了本文结论的有效性.

### 参考文献:

[1] 曾德强,石勇国,张瑞梅,等.具有双输入时滞的网络控制系统稳定性的改进结果[J].四川大学学报:自然科学版,2018,55:462.  
[2] Cao Y Y, Frank P M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. Fuzzy Set Syst, 2001, 124: 213.  
[3] Wei Y L, Qiu J B, Karimi H R. Fuzzy-affine-model-based memory filter design of nonlinear systems with time-varying delay[J]. IEEE T Fuzzy Syst,



- 2018, 26: 504.
- [4] Choi H D, Ahn C K, Shi P, *et al.* Dynamic output-feedback dissipative control for T-S fuzzy systems with time-varying input delay and output constraints [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2017, 25: 511.
- [5] Wang L K, Lam H K. Local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2018, 26: 397.
- [6] Li M, Shu F, Liu D Y, *et al.* Robust  $H^\infty$  control of T-S fuzzy systems with input time-varying delays: a delay partitioning method [J]. *Appl Math Comput*, 2018, 321: 209.
- [7] Tan J Y, Dian S Y, Zhao T. Further studies on stability and stabilization of T-S fuzzy systems with time-varying delays via fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional method [J]. *Asian J Control*, 2018, 20: 1.
- [8] Su X J, Zhou H Y, Song Y D. An optimal divisioning technique to stabilization synthesis of T-S fuzzy delayed systems [J]. *IEEE T Cybernetics*, 2017, 47: 1147.
- [9] Park M J, Kwon O M. Stability and stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with time-varying delay via Cauchy-Schwartz-Based summation inequality [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2017, 25: 128.
- [10] Tsai S H, Chen Y A, Lo J C. A novel stabilization condition for a class of T-S fuzzy time-delay systems [J]. *Neurocomputing*, 2016, 175: 223.
- [11] Wang C J, Zhou S S, Kong Y Y. State feedback control of interval type-2 T-S model based uncertain stochastic systems with unmatched premises [J]. *Neurocomputing*, 2016, 173: 1082.
- [12] Lam H K, Narimani M. Stability analysis and performance design for fuzzy-model-based control system under imperfect premise matching [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2009, 17: 949.
- [13] Zhao T, Dian S Y. Fuzzy dynamic output feedback  $H^\infty$  control for continuous-time T-S fuzzy systems under imperfect premise matching [J]. *ISA Trans*, 2017, 70: 248.
- [14] Zhao T, Dian S Y. State feedback control for interval type-2 fuzzy systems with time-varying delay and unreliable communication links [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2018, 26: 951.
- [15] Zeng H B, He Y, Wu M, *et al.* Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay [J]. *IEEE T Automat Contr*, 2015, 60: 2768.
- [16] Chen Y, Zheng W X. Exponential  $H^\infty$  filtering for stochastic Markovian jump systems with time delays [J]. *Int J Robust Nonl In*, 2014, 24: 625.
- [17] Xie W B, Lim C C, Zhang J, *et al.* New approaches to observer design and stability analysis for T-S fuzzy system with multiplicative noise [J]. *J Franklin I*, 2017, 354: 887.
- [18] Lian Z, He Y, Zhang C K, *et al.* Further robust stability analysis for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality [J]. *Inform Sci*, 2017, 409: 139.
- [19] Kwon O M, Park M J, Park J H, *et al.* Stability and stabilization of T-S fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals [J]. *Inform Sci*, 2016, 372: 1.
- [20] Chen H, Zhong S M, Li M, *et al.* Stability criteria for T-S fuzzy systems with interval time-varying delays and nonlinear perturbations based on geometric progression delay partitioning method [J]. *ISA Trans*, 2016, 63: 69.
- [21] Teng L, Wang Y Y, Cai W J, *et al.* Fuzzy model predictive control of discrete systems with time-varying delay and disturbances [J]. *IEEE T Fuzzy Syst*, 2018, 26: 1192.

#### 引用本文格式:

中文: 周坤, 齐淑楠, 李靖, 等. 隶属函数依赖的时变时滞模糊系统的控制 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2019, 56: 645.

英文: Zhou K, Qi S N, Li J, *et al.* Membership-function-dependent control of fuzzy systems with time-varying delays [J]. *J Sichuan Univ; Nat Sci Ed*, 2019, 56: 645.