

分数算子的 Charef 有理逼近与 新颖标度方程的奇异性质

谢雨婧, 袁 晓

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

摘要: 根据分数算子的 Charef 有理逼近的单分数幂极点、零点模型, 引入两类新型非正则标度方程——新颖标度方程, 该方程用于表征分数算子的 Charef 有理逼近的极限情形, 并具有物理可实现性. 首先考察新颖标度方程有理函数序列的运算有效性、运算性能, 对比与典型标度方程之间的差异, 发现新颖标度方程有理函数序列的真实解与近似解结果不同, 该方程为标度方程的近似求解法提供了新的思路. 之后结合零极点子系统的运算局域化特征, 定量分析新颖标度方程的运算振荡周期. 最后, 发现复平面内的零极点分布规律与典型标度方程不同, 找出新颖标度方程的奇异特性.

关键词: 分数微积分; 新颖标度方程; Charef 有理逼近; 分数算子; 零极点分布

中图分类号: TP211+5 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.013003

Charef rational approximation of fractional operators and singular properties of novel scale equations

XIE Yu-Jing, YUAN Xiao

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: According to the single-fraction power pole and zero model of the Charef rational approximation of the fraction operator, two new types of non-normal scaling equations—the novel scaling equation are introduced, which are used to characterize the limit cases of the Charef rational approximation of the fraction operator. It is physically realizable. Firstly, we investigate the operational validity and performance of the rational function sequence of the novel scale equation, and compare the difference with the typical scale equation. It is found that the real solution of the rational function sequence of the novel scale equation is different from the approximate solution. This equation provides a new idea for the approximate solution of the scale equation. Then combined with the localization feature of the zero-pole subsystem, the operation oscillation period of the novel scaling equation is quantitatively analyzed. Finally, it is found that the distribution of poles and zeros in the complex plane is different from the typical scaling equation, and the singular characteristics of the novel scaling equation are found.

Keywords: Fractional calculus; Novel scaling equation; Charef rational approximation; Fraction operator; The zero-pole distribution

收稿日期: 2021-01-26

基金项目: “NSAF”联合基金(U1730141)

作者简介: 谢雨婧(1997-), 女, 湖北黄石人, 硕士研究生, 研究方向为信号与信息处理.

通讯作者: 袁晓. E-mail: yuanxiao@scu.edu.com

1 引言

近年来,分数微积分的概念在数学之外,特别是物理、化学、生物、工程等领域的应用激起了人们相当大的关注,并发现使用分数微积分比整数微积分更能精确描述或建模实际的问题^[1]. 分抗元(Fractor,有时人们简称分抗)是一种能实现分数阶积分或微分运算的新电路元件,并使用符号 F 表示,理想 μ 阶分抗元的阻抗(或导纳)为

$$I^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} s^\mu, 0 < |\mu| < 1 \quad (1)$$

式中, $s = \sigma + j\Omega$ 是复频率变量(也称为运算变量); μ 是运算阶; s^μ 称为 μ 阶微积分算子,简称分数算子. 常量 $F^{(\mu)}$ 是分抗元的电路集总特征值,简称分抗值(Fractorance). 分抗元越来越广泛地应用到电路设计中^[2,3],且已形成分数阶电路与系统的研究方向. 由于理想的分抗元件不存在,人们通过对各种分数阶现象与过程的观察,构建了许多在一定频率范围内实现半阶分抗的无源分抗逼近电路. 该电路利用可实现的无源整数阶元件(电阻,电容,电感)构造二端网络,特别是(RC网络)来逼近理想分抗元^[4,5],此类无源网络称为分抗逼近电路. 通过对分数微积分算子、分抗与分抗逼近电路及其运算特征分析^[6,7],可将电路的分数微积分运算性能,通过标度拓展或非正则标度方程拓展至任意阶分数算子的有理逼近^[8,9].

许多物理现象,包括某些类型的电噪声、介质中极化阻抗的弛豫行为和音乐的谱密度,表现出与频率有关的分数次幂函数,或等效的对数-对数波德图上的分数斜率,这类过程可称为 $1/f$ 型过程或分形系统^[10],表示为

$$H(s) = \frac{1}{s^\mu} \quad (2)$$

在大多数情况下,系统通常在低频段($0 \leftarrow \Omega < \Omega_c$)处表现出有限的幅值. 因此,一些研究者通过 Pade 近似表示单分数幂极点(Single-Fractional Power Pole)函数,描述分形系统的频率现象^[11]. 文献[12]描述了由无源 R 和 C 恒相元件组成的梯形网络模型来表示(2)的函数. 由此,Charef 等提出描述分形系统的一种由若干零极对级联分支组成的奇异函数方法^[13](又称 Charef 有理逼近),Charef 有理逼近使用适当的有理传递函数来描述分数阶系统. 文献[14]给出了分数 PID 控制器的有理函数和模拟电路实现,通过例子说明了该方法的有效性. 分数算子的 Charef 有理逼近是一种使用比较

广泛的有理逼近方法,在分数阶混沌系统和分数阶控制系统等^[15,16]方面应用较多. Zourmba 等^[17]利用 Charef 逼近方法近似传递函数用于实现小数积分电路单元,该模型比现有模型需要的组件更少,并且供了更高的精度.

本文根据单分数幂极点与单分数幂零点(Single-Fractional Power Zero)模型的奇异传输函数,利用 Charef 有理逼近法的零极点组合逼近,引入两个非正则的标度方程——新颖标度方程来表征 Charef 有理逼近的极限情形. 探究新颖标度方程迭代获得的有理函数序列的运算有效性、运算性能和零极点分布,最后得到与典型标度方程不同的新颖特性.

2 Charef 有理逼近与新颖标度方程

2.1 单分形的奇异结构

μ 阶单分数幂极点与零点系统的传输函数在复频域分别表示为^[11]

$$H_P(s) = \frac{1}{(1+s/p_c)^\mu}, 0 < \mu < 1 \quad (3a)$$

$$H_Z(s) = (1+s/p_c)^\mu, 0 < \mu < 1 \quad (3b)$$

令 $\omega = \tau s$ (称为归一化运算变量),其中 $\tau = 1/p_c$ 为松弛时间常数. 对单分数幂极点传输函数(3a)式与幂零点(3b)传输函数归一化后分别得

$$y_P(\omega) = \frac{1}{(1+\omega)^\mu} \quad (4a)$$

$$y_Z(\omega) = (1+\omega)^\mu \quad (4b)$$

对于无理函数 $y_P(\omega)$ 、 $y_Z(\omega)$,取 $\omega = j \cdot 10^\omega$,其中 $j = \sqrt{-1}$, ω 是频率指数变量,得幅频特征函数

$$\Delta_P(\omega) = \lg |H_P(j \cdot 10^\omega)| = -\mu \lg |1 + j \cdot 10^\omega| \quad (5a)$$

$$\Delta_Z(\omega) = \lg |H_Z(j \cdot 10^\omega)| = \mu \lg |1 + j \cdot 10^\omega| \quad (5b)$$

在 $\omega \rightarrow \pm \infty$ 的极限情况下,幅频特征函数 $\Delta_P(\omega)/\Delta_Z(\omega)$ 分别趋近于两条渐进直线.

$$\Delta_P(\omega) \approx 0 \xrightarrow{\omega < 0} \Delta_P(\omega) \xrightarrow{0 < \omega < \infty} \Delta_P(\omega) \approx -\mu \omega \quad (6a)$$

$$\Delta_Z(\omega) \approx 0 \xrightarrow{\omega < 0} \Delta_Z(\omega) \xrightarrow{0 < \omega < \infty} \Delta_Z(\omega) \approx \mu \omega \quad (6b)$$

根据式(5)和式(6)可知,单分数幂极点无理函数的幅频特征曲线可用两条渐近线近似表示(如图 1 所示).

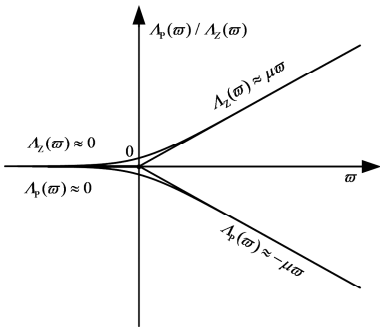


图 1 单分数幂极点与零点传输函数的幅频特征曲线及其渐近线

Fig. 1 Amplitude-frequency characteristic curve and its asymptote of single fractional power pole and zero transfer function

2.2 Charef 有理逼近与零极点对子系统

将式(4a)的无理函数 $y_P(\omega)$ 通过实零极点形式重写为有理逼近函数,并在有限的频率范围内,可以截断为一个有限的迭代次数 k ,使用 $y_{Pk}(\omega)$ 逼近 $y_P(\omega)$.

$$y_{Pk}(\omega) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\tau\omega}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^k \left(1 + \frac{\tau\omega}{p_i}\right)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_P(\omega) \quad (7)$$

有理极限化

第 i 对零极点对 (z_i, p_i) 一次子系统的归一化阻抗函数为

$$E_i(\omega) = \frac{1 + \omega/z_i}{1 + \omega/p_i} \quad (8)$$

$$\begin{cases} z_i = -10^{o_i} \\ p_i = -10^{\chi_i} \end{cases} \quad (9)$$

式(9)中,实数 o_i 表示零点频率指数和实数 χ_i 表示极点频率指数^[18].令极点与零点之比为

$$\alpha = \frac{p_i}{z_i} = 10^{\chi_i - o_i} \Leftrightarrow \lg \alpha = \chi_i - o_i \quad (10)$$

得一次零极点子系统的频域特征函数:

(1) 幅频特征函数

$$\lambda_i(\omega) = \lg \left| \frac{1 + j \cdot 10^{\omega - o_i}}{1 + j \cdot 10^{\omega - \chi_i}} \right| \quad (11a)$$

(2) 相频特征函数

$$\vartheta_i(\omega) = \arctan \left[\frac{\sinh\left(\frac{o_i - \chi_i}{2} \cdot \ln 10\right)}{\cosh((\omega - \zeta_i) \cdot \ln 10)} \right] \quad (11b)$$

(3) 阶频特征函数

$$u_i(\omega) = \frac{\sinh((o_i - \chi_i) \cdot \ln 10)}{\cosh(2(\omega - \zeta_i) \cdot \ln 10) + \cosh((o_i - \chi_i) \cdot \ln 10)} \quad (11c)$$

其中, $\zeta_i = \frac{o_i + \chi_i}{2}$ 是零极点的中心频率指数. 根据上式得到零极点对子系统 $E_i(\omega)$ 频域特征曲线.

图 2a 零极点对子系统函数 $E_i(\omega)$ 的幅频特征曲线可由一条斜率为 -1 和两条水平渐近线组成的 Z 形折线近似表示,是由零点与极点的共同作用导致的.由(10)式可知, $\lg \alpha$ 取值越大,一次子系统的运算特征的带宽越大^[19].子系统函数 $E_i(\omega)$ 的相频特征 $\vartheta_i(\omega)$ 和阶频特征 $u_i(\omega)$ 具有偶对称性和局域化特性图 2b 和 2c,正是这种每个一次子系统都会产生波峰的局域化特性,使得无理函数序列 $y_P(\omega)$ 在频域产生准周期性的运算振荡现象,运算振荡现象是所有一次子系统的集体行为^[20] (3.2 节详细分析).

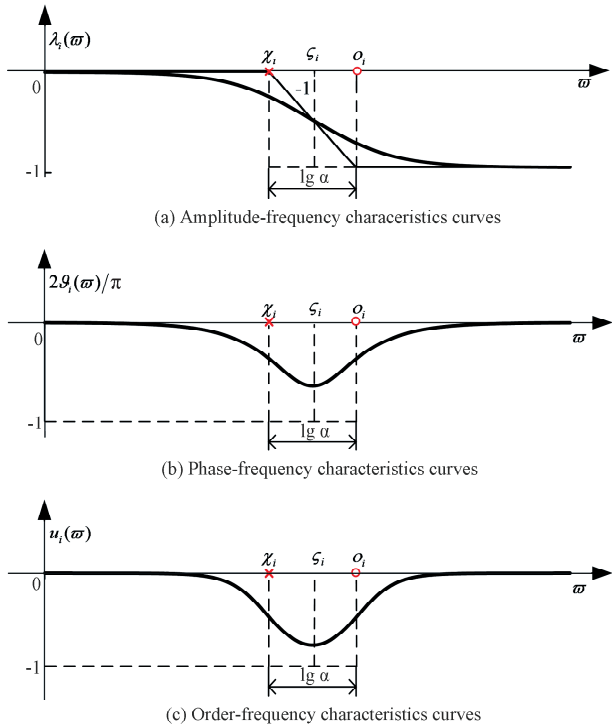


图 2 一次子系统的频域特征曲线

Fig. 2 Frequency domain characteristic curve of the primary subsystem

2.3 Charef 有理逼近过程

根据图 1 描述的单分数幂极点传输函数 $y_P(\omega)$ 的幅频特征曲线在波特图中可用两条渐近线近似表示,以及图 2 描述零极点对子系统函数 $E_i(\omega)$ 的运算特征函数,组合可得子系统逼近幅频曲线的过程如图 3.

假设 Z 形折线(零极点对组合)与幅频特征曲线的渐近线 $-\mu\omega$ 之间的最大误差为 δ (δ 为正数).理论上,可以通过公式 $\delta = \frac{1}{2} \mu(1 - \mu) \lg(\alpha\beta)$ ^[21] 计算出渐进幅频误差. χ_0 是第一个奇点,它的值由指定的渐进幅频误差 δ 决定.

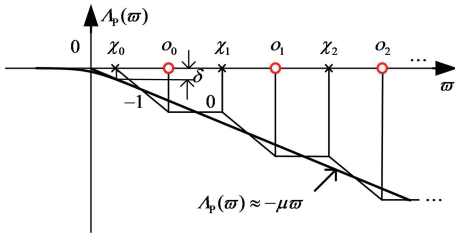


图 3 单分数幂极点传输函数的幅频波特图零极点对逼近
Fig. 3 Amplitude-frequency Bode plot zero-pole pair approximation of single fractional power pole transfer function

2.4 零极点分布关系

递进因数 (Recursive Factors) α, β , 标度因子 (Scaling Factor) σ , 可根据渐进幅频误差 δ 表示.

$$\alpha = 10^{\lceil \delta/10 < 1-\mu \rceil} \quad (12a)$$

$$\beta = 10^{\lceil \delta/10\mu \rceil} \quad (12b)$$

$$\sigma = \alpha\beta = 10^{\lceil \delta/10\mu(1-\mu) \rceil} \quad (12c)$$

当 $0 < \sigma < 1$ 时为反比拓展, 当 $1 < \sigma < \infty$ 时为正比拓展^[10]. 零点和极点频率以递进分布形式确定, 以单分数幂极点的传输函数为例有

$$\frac{z_i}{p_i} = \alpha > 0, \quad i = 0 \sim k-1 \quad (13a)$$

$$\frac{p_i}{z_{i-1}} = \beta > 0, \quad i = 0 \sim k \quad (13b)$$

另外, 极点 p_i 与前一极点 p_{i-1} 的位置比等于零点 z_i 与前一个零点 z_{i-1} 的位置比为

$$\frac{z_i}{z_{i-1}} = \sigma, \quad i = 0 \sim k-1 \quad (14a)$$

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \sigma, \quad i = 0 \sim k \quad (14b)$$

根据上述公式, 可以从第一个极点得到所有的极点和零点, 关系如下.

$$p_i = \sigma^i p_0, \quad i = 0 \sim k \quad (15a)$$

$$z_i = \sigma^i \alpha p_0, \quad i = 0 \sim k-1 \quad (15b)$$

2.5 新颖标度方程

为了用线性时不变的系统模型表示单分数幂极点与单分数幂零点, 需要用有理传递函数来逼近其无理传递函数. 使用 Charef 等人^[14] 给出的近似方法, 在传输函数的幅频曲线图上使用斜率为 $-\mu$ 的直线近似表示, 该渐近线由复平面负实轴上零极点对应的若干条斜率为 -1 和 0 的直线构成. 因此给出近似结果, 单分数幂极点传输函数 $y_P(\omega) = (1+\omega)^{-\mu}$, Charef-I 有理逼近:

$$y_{Pk}(\omega) = \frac{1}{1+\omega/p_k} \prod_{i=0}^{k-1} E_i(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_I(\omega),$$

$$p_0 = \sqrt{\beta} p, \quad p_i = \sigma^i p_0, \quad z_i = \alpha \sigma^i p_0, \quad i \in \mathbb{N}^+ \quad (16a)$$

单分数幂零点传输函数 $y_Z(\omega) = (1+\omega)^\mu$, Charef-D 有理逼近:

$$y_{Zk}(\omega) = \prod_{i=0}^{k-1} E_i(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_D(\omega),$$

$$z_0 = \sqrt{\beta} z, \quad z_i = \sigma^i z_0, \quad p_i = \alpha \sigma^i z_0, \quad i \in \mathbb{N}^+ \quad (16b)$$

给定一个有理可实现的初始阻抗函数 $y_0(\omega) = N_0(\omega)/D_0(\omega)$, 根据式 (13) 可以构造迭代过程有理函数序列 $\{y_{Ik}(\omega), k \in \mathbb{N}^+\}, \{y_{Dk}(\omega), k \in \mathbb{N}^+\}$, 如下式.

$$y_{Ik}(\omega) = \frac{1+\omega/\alpha}{1+\omega} y_{I,k-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_I(\omega) \quad (17a)$$

$$y_{Dk}(\omega) = \frac{1+\omega}{1+\omega/\alpha} y_{D,k-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_D(\omega) \quad (17b)$$

得到两个非正则的新颖标度方程

$$y_I(\omega) = \frac{1+\omega/\alpha}{1+\omega} y_I\left(\frac{\omega}{\sigma}\right), \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 0 < \sigma \neq 1 \end{cases} \quad (18a)$$

$$y_D(\omega) = \frac{1+\omega}{1+\omega/\alpha} y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right), \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 0 < \sigma \neq 1 \end{cases} \quad (18b)$$

3 新颖标度方程的近似求解与真实解

3.1 近似求解与运算有效性

运算有效性是指非正则的标度方程给定初始迭代函数 $y_0(\omega)$ 的迭代过程

$$y_k(\omega) = F(\alpha y_{k-1}(\sigma\omega)), \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (19)$$

的极限阻抗函数 $y(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(\omega)$ 中是否具有基本的分数算子 ω^μ . 通常使用近似求解的方法, 初步判断新颖标度方程的近似解是否含有分数算子.

两个非正则新颖标度方程, 在高频段可以近似简化为正则标度方程. 对于 I 型新颖标度方程有

$$y_I\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \xrightarrow[\text{低频段}]{0 \leftarrow \frac{|\omega|}{\sigma} \ll 1} y_I(\omega) = \frac{1+\omega/\alpha}{1+\omega} y_I\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \xrightarrow[\text{高频段}]{1 \ll \frac{|\omega|}{\sigma} \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} y_I\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (20)$$

在极端低频条件 $0 \leftarrow |\omega| < 1$ 下, $y_I(\omega) \approx y_I\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$

得到近似解如下式.

$$y_I(\omega) \approx \zeta_I \omega^{\mu_I} \rightarrow \mu_I = 0 \quad (21)$$

近似解不包含分数算子, 因此在低频情况下 I 型新颖标度方程不具有分数阶运算性质. 在极端频率

条件 $1 < |\omega| \rightarrow \infty$ 下, $y_I(\omega) \approx \frac{1}{\alpha} y_I\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$ 得到近似解析解如下式.

$$y_I(\omega) \approx \zeta_I \omega^{\mu_I} \rightarrow \mu_I = -\lg \alpha / \lg \sigma \quad (22)$$

由上式可得, I 型新颖标度方程在高频段具有负分数阶算子.

对于 D 型新颖标度方程有

$$y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^{0 \leftarrow \frac{|\omega|}{\sigma} \ll 1} \underset{\text{低频段}}{y_D(\omega)} = \frac{1+\omega}{1+\omega/\alpha} y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \xrightarrow[\text{高频段}]{1 \ll |\omega| \rightarrow \infty} \alpha y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \quad (23)$$

在极端低频条件 $0 \leftarrow |\omega| < 1$ 下, $y_D(\omega) \approx y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$ 得到近似解如下式.

$$y_D(\omega) \approx \zeta_D \omega^{\mu_D} \rightarrow \mu_D = 0 \quad (24)$$

近似解不包含分数算子, 因此在低频情况下 D 型新颖标度方程不具有分数阶运算性质. 在极端条件 $1 < |\omega| \rightarrow \infty$ 下, $y_D(\omega) \approx \alpha y_D\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$ 得到近似解析解如下式.

$$y_D(\omega) \approx \zeta_D \omega^{\mu_D} \rightarrow \mu_D = \lg \alpha / \lg \sigma \quad (25)$$

由上式可得, D 型新颖标度方程在高频段具有正分数阶算子.

从数学角度分析, 新颖标度方程迭代生成的有理函数序列 $y_I(\omega)$ 的运算阶都应在高频段有效, 且 I 型新颖标度方程迭代生成的有理函数序列 $y_I(\omega)$ 的有效运算阶是负任意分数阶, D 型新颖标度方程迭代生成的有理函数序列 $y_D(\omega)$ 的有效运算阶是正任意分数阶. 典型标度方程反比拓展 $0 < \sigma < 1$ 都在高频段有效, 正比拓展 $0 < \sigma < 1$ 都在低频段有效^[22]. 但两种新颖标度方程的运算有效频段与标度因子 σ 是正比或反比拓展无关, 这与常规拓展标度方程的运算有效性不同, 正是新颖标度方程新颖

性质的体现.

3.2 新颖标度方程的真实解与运算振荡现象

近似求解可从理论上判断标度方程的运算有效性, 真实解可验证近似求解的准确性, 有利于直观分析运算性能和逼近性能^[23]. 由半阶有效的分抗逼近电路拓展得到的具有可构造任意分数阶运算性能的标度化分抗逼近电路特征. 以 I 型新颖标度方程为例, 给定初始阻抗为 $y_{I0}(\omega) = 1$, 迭代求得有理阻抗函数序列如下式.

$$y_{I1}(\omega) = \frac{1+\omega/\alpha}{1+\omega} \quad (26a)$$

$$y_{I2}(\omega) = \frac{1+\omega/\alpha}{1+\omega} \cdot \frac{1+\omega/(\sigma\alpha)}{1+\omega/\sigma} \quad (26b)$$

...

$$y_{Ik}(\omega) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+\omega/(\alpha\sigma^i)}{1+\omega/\sigma^i} = \frac{N_k(\omega)}{D_k(\omega)} \quad (26c)$$

给定合适的标度因子 σ , 使用 Matlab 求解式(26) 可得有理阻抗函数序列 $\{y_{Ik}(\omega), k \in \mathbb{N}^+\}$, 对应的运算特征曲线如图 4 所示.

D 型新颖标度方程的有理阻抗函数序列

$$y_{Dk}(\omega) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+\omega/\sigma^i}{1+\omega/(\alpha\sigma^i)} \quad (27)$$

对应的阶频特征曲线与相频特征曲线如图 6.

观察图 4、图 5 和图 6, 新颖标度方程迭代生成有理逼近函数存在运算振荡现象^[24], 存在固定的振荡周期如下.

$$W = |\lg \sigma|, \sigma \neq 1 \quad (28)$$

由于单分数幂极点与零点系统由若干个零极点一次子系统组成, 每个零极点子系统 $E_i(\omega)$ 都会产生局域化的波峰图(如图 2b 和 2c), 导致有理函数 $y_{Ik}(\omega)$ 、 $y_{Dk}(\omega)$ 在频域产生了准周期的振荡现象. 阶频特征振荡的幅度与标度因子 σ 和分数算子 μ 有关.

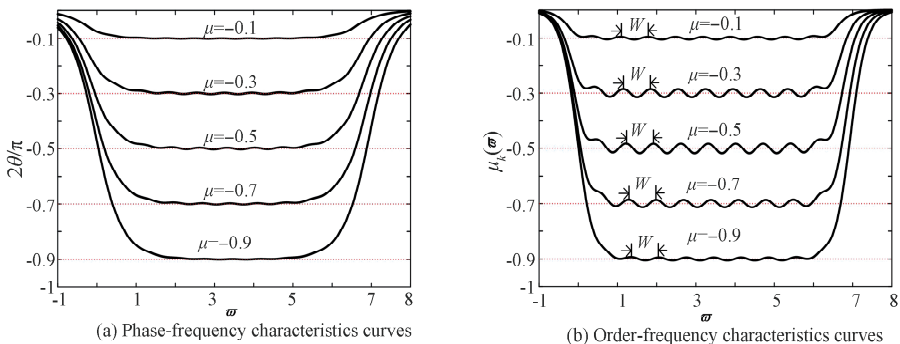


图 4 正比拓展时 I 型新颖标度方程运算性能 ($\sigma = 5, k = 10$)

Fig. 4 Operational performance of I-type novel scale equation with proportional expansion ($\sigma = 5, k = 10$)

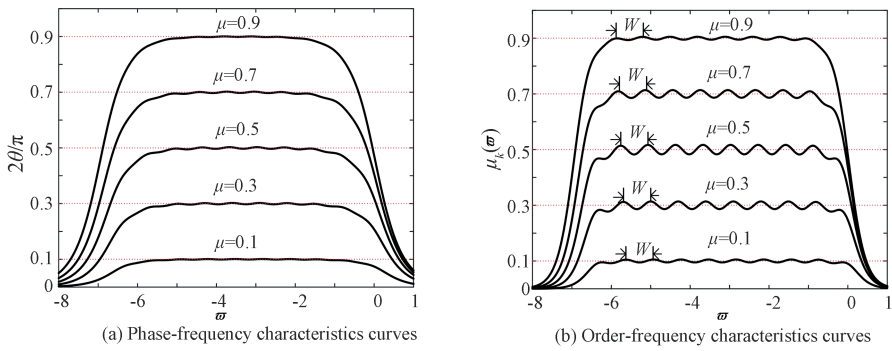


图 5 反比拓展时 I 型新颖标度方程运算性能 ($\sigma=1/5, k=10$)

Fig. 5 Operational performance of the I-type novel scale equation when inversely expanded ($\sigma=1/5, k=10$)

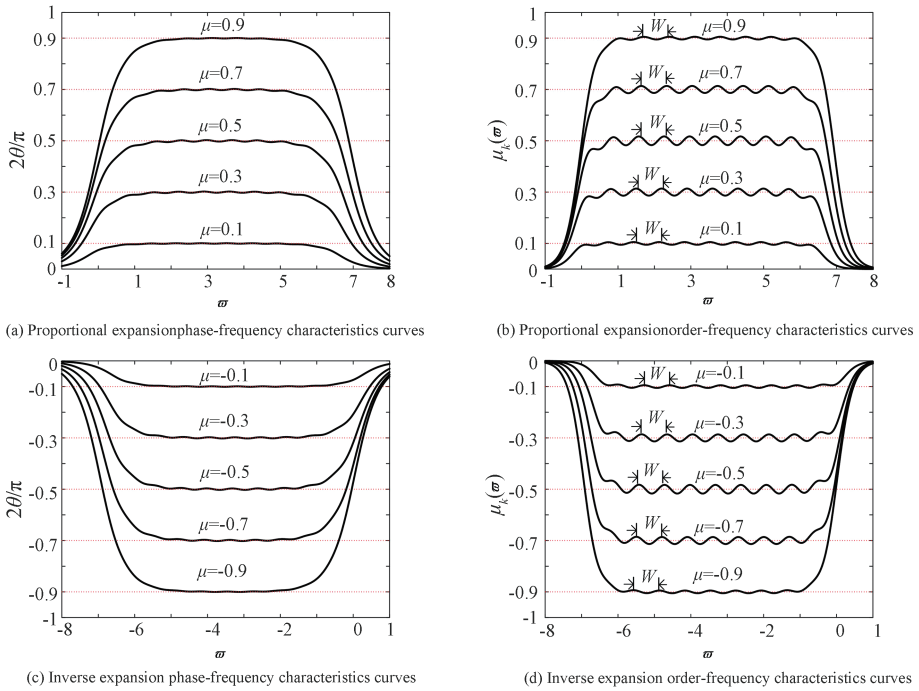


图 6 正比和反比拓展时 D 型新颖标度方程的运算性能 ($\sigma=5, \sigma=1/5$)

Fig. 6 Operational performance of the D-type novel scaling equation when the proportional and inverse ratios are expanded ($\sigma=5, \sigma=1/5$)

4 新颖标度方程的奇异性质

有理函数序列 $y_k(\omega)$, 取 $\omega = j \cdot 10^{\omega}$ (ω 是频率指数变量) 可得频域特征函数.

$$y_k(j \cdot 10^{\omega}) = \Lambda_k(\bar{\omega}) \exp(j \cdot \theta_k(\bar{\omega})) \quad (29a)$$

式中幅频特征:

$$\Lambda_k(\bar{\omega}) = \lg |y_k(j \cdot 10^{\omega})| \quad (29b)$$

相频特征:

$$\theta_k(\bar{\omega}) = \text{Arg} \{y_k(j \cdot 10^{\omega})\}, \bar{\omega} \in R \quad (29c)$$

阶频特征:

$$\mu_k(\bar{\omega}) = \frac{d\Lambda_k(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}} \quad (29d)$$

相频特征和阶频特征刻画了分数算子有理迭代过程的运算性能. 以初始阻抗为例, 对比 I 型新颖标度方程在正比与反比拓展条件下的运算性能.

I 型新颖标度方程正比拓展 ($\sigma=5$) 迭代次数为 10 次的数值解与近似求解的理论值一致, 在高频范围内实现负任意阶分数算子 ω^α 有理逼近如图 4b. 虚线表示分数算子 $\mu_1 = -0.1 \sim -0.9$, 取值间隔为 0.2 的理想频域特征曲线, 其中 α 的值是根据近似解 ($\mu_1 = -\lg\alpha/\lg\sigma$) 计算得到.

I 型新颖标度方程反比拓展 ($\sigma=1/5$) 迭代次数为 10 次的数值解在高频段不存在分数阶性质, 但在甚低频段实现正任意阶分数算子 ω^α 有理逼近如图 5b, 这与近似求解的理论结果不一致. 反比拓展的数值解无法通过近似求解的理论结果解释, 这是新颖标度方程的第二个奇异性质.

D 型新颖标度方程与 I 型新颖标度方程的情况相似, 正比拓展 ($\sigma=5$) 高频段正任意分数阶有效

图如图 6b, 反比拓展($\sigma=1/5$)低频段负任意分数阶有效图如图 6d.

根据 2.4 节零极点分布关系的式(12), 画出两种新颖标度方程的零极点分布图, 进一步分析反比拓展时数值解与近似解不一致的原因. 分析 I 型和 D 型新颖标度方程正反比拓展的零极点分布图. 以 I 型新颖标度方程正反比拓展为例, 根据零极点频率指数 o_{ki} 和 x_{ki} 与零极点的关系式(9), 标度因子正比与反比分别取值 $\sigma=5, \sigma=1/5$, 迭代次数 $k=10$, 令分数阶算子 $\mu_1 = -0.1 \sim -0.9$, 取值间隔为 0.2, 求得新颖标度方程有理函数序列不同分数算子 μ_1 对应的零极点指数的分布图如图 7. 其中, 横坐标 ω 表示零极点的频率指数, 纵坐标表示不同的运算阶 μ_1 .

观察图 7 中不同阶数的零极点指数分布可知, 当标度因子 σ 取值固定, 阶数 μ_1 取值不同时, 极点指数的值几乎不变, 而零点指数之间的间距随阶数 μ_1 的增加而不断变大.

令阶数 $\mu_1 = -0.5$, 标度因子对数化 $\lg \sigma$ 分别

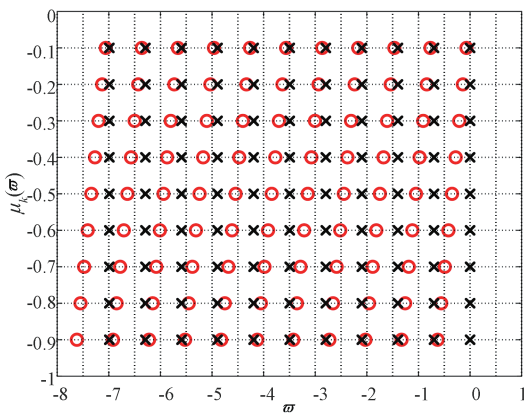
取值为 0.2、0.6、1.0、1.4, I 型新颖标度方程电路的节数 $k=15$. 图 8 和图 9 分别是正比拓展和反比拓展在标度因子 σ 取值不同的频率指数分布. 根据施卜椿等^[25]对标度分形分抗逼近电路的零极点分布规律的研究可知, 零极点的值与节号 i 之间呈线性关系, 此斜率与标度因子 σ 有关. 标度分形链与标度分形格电路等零极点的频率特征指数 $\bar{\omega}_k = -i \lg \sigma$.

观察图 8 和图 9 发现, 不同的标度因子 σ 取值, 零点频率指数与极点频率指数的斜率的确与 $\lg \sigma$ 相关.

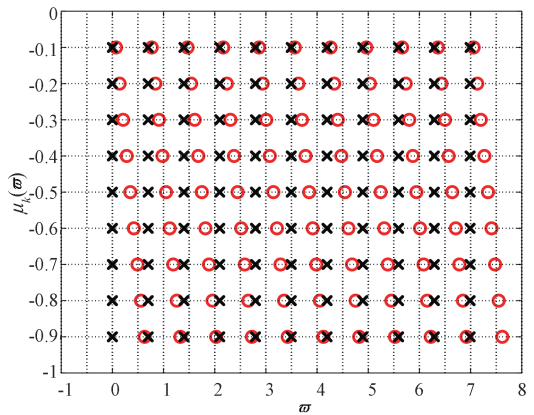
根据仿真数据可得零极点线性分布规律的近似表达式如下式.

$$\begin{cases} o_{ki} = i \cdot \lg \sigma + \lg \alpha \\ x_{ki} = i \cdot \lg \sigma \end{cases} \quad (31)$$

正比拓展或反比拓展的零极点分布都满足上式关系. 新颖标度方程取不同的 σ 值, 其对应的零极点频率指数斜率为正标度因子的对数, 与其他标度方程对应的斜率为负的标度因子的对数不相同, 这是新颖标度方程的另一奇异性质的体现.



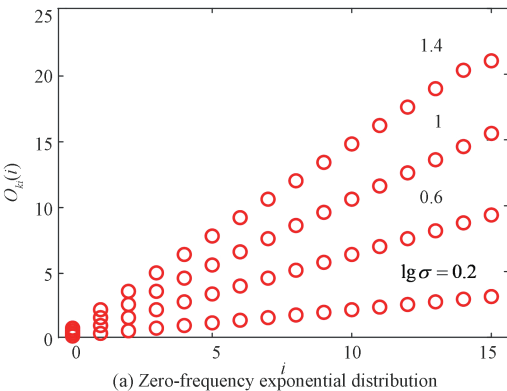
(a) Inversely expand the distribution of poles and zeros



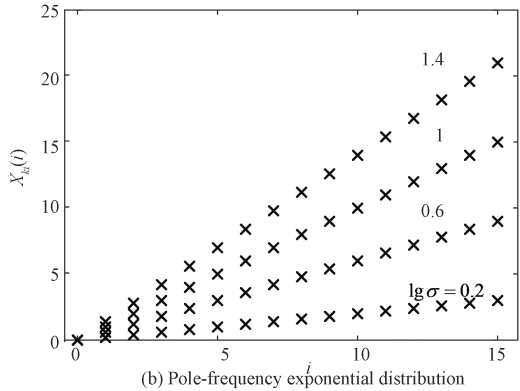
(b) Proportional expand the distribution of poles and zeros

图 7 正比和反比拓展时 I 型新颖标度方程不同阶数的零极点分布图($\sigma=5, \sigma=1/5, k=10$)

Fig. 7 The distribution diagrams of poles and zeros of different orders of the I-type novel scaling equation with proportional and inverse expansion ($\sigma=5, \sigma=1/5, k=10$)



(a) Zero-frequency exponential distribution



(b) Pole-frequency exponential distribution

图 8 I 型新颖标度方程正比拓展不同标度因子 σ 零极点频率指数分布图($k=15$)

Fig. 8 Type I novel scaling equation proportionally expands the exponential distribution diagram of zero-pole frequency with different scaling factors σ ($k=15$)

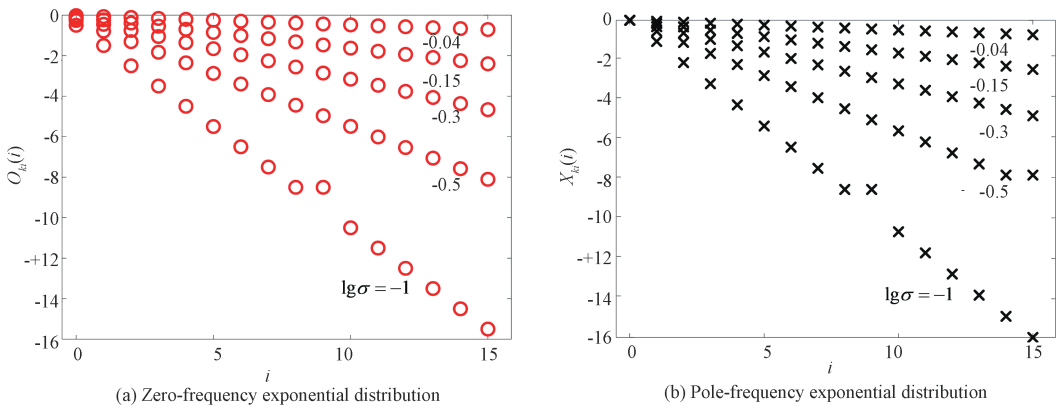


图 9 I 型新颖标度方程反比拓展不同标度因子 σ 零极点频率指数分布图 ($k=15$)

Fig. 9 Type I novel scaling equation inversely expands the exponential distribution diagram of zero-pole frequency with different scaling factors σ ($k=15$)

5 结 论

描述了分数算子的 Charef 有理逼近的具体逼近过程,用 Z 形逼近(递进分布的零极点对逼近)分形系统,将单分数幂极点传输函数重写成零极点对形式的有理函数. 单分数幂极点与幂零点系统的传输函数根据 Charef 有理逼近法以及零极点的分布关系,得到两个非正则的标度方程分别是 I 型和 D 型新颖标度方程. 通过对新颖标度方程的运算性能的分析,近似求解发现 I 型和 D 型新颖标度方程在高频范围内实现正或负任意阶分数算子 ω 有理逼近,在低频段都不具有分数阶特性. 发现这一有效频段不同以往典型的非正则标度方程的近似解结果,这是新颖标度方程的第一点奇异性质. 接着对新颖标度方程迭代生成的有理函数函数序列式(26c)求真实解,得到反比扩展的情况下在低频段具有运算有效性,这与近似求解的结论不符. 真实解与近似解的结果不符,这是新颖标度方程的第二点奇异性质. 进一步分析 Charef 标度方程的零极点分布情况,发现在正比或反比拓展的情况下分别取不同标度因子的值,零极点频率指数分布的斜率为 $\lg\sigma$,这与其他典型标度方程的零极点指数斜率 $-\lg\sigma$ 不同,这是第三点奇异性质.

根据分数阶算子的 Charef 有理逼近过程获得的新颖标度方程,分析其奇异的性质只是研究的开端部分. 后续还有如下可以深入研究的内容以及问题善待解决:(1) 关于新颖标度方程反比拓展的近似解无法使用 Liu 氏粗解解释真实解的结果,本文目前无法解释该现象的原因,或许存在异于 Liu 氏粗解的关于非正则标度方程的新解法;(2) 通过阶频指标 O、相频指标 P 和斜率指标 K 等,探寻新

颖标度方程其他的奇异性质;(3) 根据新颖标度方程,给出一个具体的电路应用实例.

参考文献:

- [1] Singh A K. Fractionally delayed Kalman filter [J]. IEEE/CAA J Autom Sinica, 2020, 7: 169.
- [2] Wang J C. Realizations of generalized warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines [J]. J Electrochem Soc, 1987, 134: 1915.
- [3] Mathitalagan K, Sangeetha G. Second-order sliding mode control for nonlinear fractional-order systems [J]. Appl Math Comput, 2020, 383: 125264.
- [4] Gluskin E. One-ports composed of power-law resistors [J]. IEEE T Circ Syst II: Expr Briefs, 2004, 51: 464.
- [5] Arain S, Photos V, Abdul Q, *et al.* Reconfigurable BPF with constant centre frequency and wide tuning range of bandwidth [J]. IEEE T Circ Syst II: Expr Briefs, 2019, 67: 1374.
- [6] Podlubny I. 分数微积分——理论基础与应用导论 [M]. 袁晓, 译. 北京: 电子工业出版社, 2021.
- [7] Singh A K. Fractionally delayed Kalman filter [J]. IEEE/CAA J Autom Sinica, 2020, 7: 169.
- [8] 何秋燕, 袁晓. Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近 [J]. 物理学报, 2016, 65: 29.
- [8] 何秋燕, 袁晓. Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近 [J]. 物理学报, 2016, 65: 29.
- [9] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [10] Liu S H. Fractal model for the ac response of a rough interface [J]. Phys Rev Lett, 1985, 55: 529.
- [11] Sun H H, Abdelwahab A, Onaral B. Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power [J]. IEEE T Autom Contro, 1984,

- 29: 441.
- [12] Valsa J, Jiri V. RC models of a constant phase element [J]. *Int J Circuit Theory Appl*, 2013, 41: 59.
- [13] Charef A, Sun H, Tsao Y, *et al.* Fractal system as represented by singularity function [J]. *IEEE T Autom Contro*, 1992, 37: 465.
- [14] Charef A. Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional controller [J]. *IEEE P Contro Theor Appl*, 2006, 153: 714.
- [15] Ranjbaran K, Tabatabaei M. Fractional order [PI], [PD] and [PI][PD] controller design using Bode's integrals [J]. *Int J Dyn Contro*, 2018, 6: 200.
- [16] Ladaci S, Charef A. On fractional adaptive control [J]. *Nonlinear Dynam*, 2006, 43: 365.
- [17] Zourmba K, Fischer C, Gambo B, *et al.* Fractional integrator circuit unit using Charef approximation method [J]. *Int J Dynam Contro*, 2020, 8: 1.
- [18] 张月荣, 郭钊汝, 袁晓. 分形塔分抗逼近电路——标度拓展与优化设计原理[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2021, 58: 023004.
- [19] 张月荣, 袁晓. 任意阶高运算恒定性分抗逼近电路——标度格型级联双口网络[J]. *物理学报*, 2021, 70: 048401.
- [20] 郭钊汝, 何秋燕, 袁晓, 等. 任意阶算子的有理逼近—奇异标度方程[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2020, 57: 495.
- [21] Valsa J. Fractional-order electrical components, networks and systems [C]//*Proceedings of 22nd International Conference Radioelektronika 2012*. [S. l.]: IEEE, 2012.
- [22] 袁晓, 冯国英. Oldham 分形链分抗类与新型 Liu-Kaplan 标度方程[C]//*2015 年中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会论文集*. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [23] 高小龙, 袁晓, 施卜椿. Oldham 分形链与 Liu-Kaplan 分形链分抗的阻纳函数求解[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2019, 17: 474.
- [24] HE Q Y, Pu Y F, YU B, *et al.* Arbitrary-order fractance approximation circuits with high order-stability characteristic and wider approximation frequency bandwidth [J]. *IEEE/CAA J Autom Sinica*, 2020, 7: 1.
- [25] 施卜椿, 高小龙, 袁晓. 标度分形分抗逼近电路的零极点分布规律[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2019, 56: 57.

引用本文格式:

中文: 谢雨婧, 袁晓. 分数算子的 Charef 有理逼近与新颖标度方程的奇异性质[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2022, 59: 013003.

英文: Xie Y J, Yuan X. Charef rational approximation of fractional operators and singular properties of novel scale equations [J]. *J Sichuan Univ; Nat Sci Ed*, 2022, 59: 013003.