

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.023

二维不可压材料线弹性有限体积法的研究

刘琦, 明平剑, 张文平

(哈尔滨工程大学动力与能源工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 发展了一种针对二维不可压材料线弹性问题的格点型有限体积法(CV-FVM), 将不可压约束条件加入到线弹性体控制方程中, 采用双线性四边形单元, 对控制方程的数值离散过程做了详细的推导. 将位移以及静水压力作为待解量进行直接求解, 其分别存储在单元节点以及单元中心, 并假设静水压力在单元内分布一致. 对不可压材料的方板以及无限长圆管的线弹性问题进行了数值验证. 通过数值解与理论解的对比, 发现采用发展的 CV-FVM 可以避免有限元中当泊松比为 0.5 时所出现的闭锁现象, 通过增加网格密度可以得到较高精度的数值解.

关键词: 不可压材料; 有限体积法; 闭锁现象

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)04-0795-07

Two-dimensional incompressible linear elasticity analysis by finite volume method

LIU Qi, MING Ping-Jian, ZHANG Wen-Ping

(College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: A novel two-dimensional finite volume procedure is described in detail for the analysis of incompressible linear elastic body, the volume conservation for each volume form a constrain equation is added to governing equation of linear elastic body, the procedure of discretize governing equations using bi-linear quadrilateral elements is given in detail. The discrete equation contains displacement and hydrostatic pressure as unknown variable, and the hydrostatic pressure is storied at the center of the element and assumed to be constant within each element. The developed procedure is tested on two linear elastic plane strain benchmark problems of impressible material, and then compared with analytical results. In addition, no locking problem is encountered as the Poisson's ratio equal to 0.5 which is a common problem in finite element method (FEM), the simulation results show that this finite volume method (FVM) can obtain an accurate and stable numerical solution under mesh refinement.

Keywords: Incompressible materials; Finite volume method; Locking

1 引言

过去 40 年, 有限元法(FEM)由于其对处理复杂几何结构的灵活性, 被广泛应用到求解结构力学问题中, 然而对于某些特殊问题, FEM 仍存在

着一定的局限性. 如在求解不可压材料的结构力学问题上, 当泊松比趋于 0.5 时, 应用平面应变假设的 FEM 常出现闭锁现象, 导致错误的计算结果. 相比于 FEM, 有限体积法(FVM)在结构力学问题上的发展相对缓慢, 但由于其实施方法简单、对子

收稿日期: 2017-08-11

基金项目: 国家自然科学基金(51479038)

作者简介: 刘琦(1989-), 男, 博士, 内蒙古赤峰人, 主要研究方向为有限体积法在结构问题上的应用. E-mail: liuqi202@hrbeu.edu.cn

通讯作者: 明平剑. E-mail: pingjianming@hrbeu.edu.cn

控制体以及求解域的强守恒性, FVM 被逐步广泛地应用到了各类结构力学问题中^[1-10].

FVM 主要可以分为两大分支, 分别为文献[11]提出的格心型有限体积法(CC-FVM), 以及文献[12]基于联合单元法构建控制体而提出的格点型有限体积法(CV-FVM). 与传统 CC-FVM 不同, CV-FVM 采用另一套网格系统(多重网格), 将待解量存储在单元节点, 并以单元节点为控制体中心建立控制体.

在求解不可压及几乎不可压材料弹性问题上, 文献[13]应用 CC-FVM 对不可压材料进行了小应变变形分析, 将位移以及静水压力作为待解变量引入到控制方程中, 采用包含 3 节点三角形单元以及 4 节点四边形单元的混合单元构建控制体, 通过连接单元面节点以及相邻单元中心构造的常应变四边形单元来计算单元面的应力, 成功的将 FVM 应用到求解不可压材料线弹性问题中. 文献[14]将静水压力引入到各项同性线弹性体本构方程中, 采用求解不可压流体时常用的 SIMPLE 算法对位移及压力进行耦合修正, 应用 CC-FVM 对不可压材料的二维和三维磨损问题进行了线弹性分析, 计算结果未出现体积闭锁现象以及压力震荡. 文献[15]和[16]分别采用超弹性材料应变能函数以及 Saint-Venant-Kirchhoff 本构模型, 应用 CC-FVM 对不可压以及几乎不可压超弹性材料进行了大变形超弹性分析. 文献[17]通过 6 节点与 3 节点三角形单元位移、转角自由度之间的相互转换, 将位移、压力以及转角作为待解变量引入到离散方程中, 应用 CV-FVM 对二维不可压材料线弹性问题进行了正确的求解.

本文旨在发展一种有效求解不可压或几乎不可压材料线弹性问题的数值方法, 用以解决 FEM 中当泊松比为 0.5 或趋于 0.5 时出现的闭锁现象. 本文将文献[9-10]中用于求解可压材料线弹性问题的方法作了进一步的发展, 在对控制方程离散时考虑四边形单元的双线性, 通过数值算例验证发展的 CV-FVM 对不可压材料线问题的准确性以及对避免“闭锁现象”的有效性.

2 控制方程

针对不可压及几乎不可压材料, 在小应变假设下, 不考虑体积力, 其稳态控制方程为:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = 0 \quad (1)$$

其中, S 为积分控制线; \mathbf{n} 为界面外法线矢量; $\boldsymbol{\sigma}$ 表示 Cauchy 应力张量.

对于各向同性线弹性体, 其本构关系为:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 表示 Cauchy 应变张量, \mathbf{I} 为单位张量, 其中 μ, λ 表示拉梅系数, 当采用平面应变假设时, 其表达式为:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3)$$

其中 E 为杨氏模量, ν 为泊松比.

Cauchy 应变张量的表达式为:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j=1, 2) \quad (4)$$

其中 u_i 为速度矢量 \mathbf{u} 的分量.

对于不可压或者几乎不可压材料, 其泊松比 $\nu \rightarrow 0.5$, 导致拉梅系数 λ 趋于无穷大, 采用本够关系式将不能准确的描述这类材料的应力应变关系, 将静水压力 p 作为待解变量引入到本够关系式中, 将其化为:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + p\mathbf{I} \quad (5)$$

在任意控制体 V 内, 不可压条件为:

$$\int_V (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) dV = 0 \quad (6)$$

3 数值方法

采用双线性四边形单元划分计算域, 图 1 为交错网格示意图, 其中实心点为单元节点, 空心点为单元中心, 待解变量 \mathbf{u} 存储在单元节点上, 待解静水压力 p 以及物性参数存储在单元中心, 假设其在单元内分布一致, Γ_D 为狄利克雷型边界, Γ_N 为诺依曼型边界. 以内部节点 N_1 为例, 连接临边中点以及单元中心建立控制体 Ω_{1-6} , 对稳态线动量守恒方程在内部控制体进行离散.

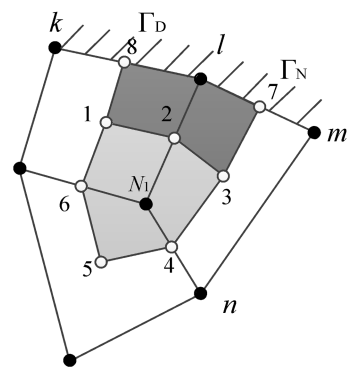


图 1 单元网格及控制体示意图

Fig. 1 Sketch map of grid and control volume

将应变表达式以及本够关系式带入到控制方程式中得:

x 方向:

$$\oint_S n_x \cdot \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + p \right) + n_y \cdot \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS = 0$$

y 方向:

$$\oint_S n_x \cdot \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n_y \cdot \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + p \right) dS = 0$$

(7)

其中 n_x, n_y 分别为界面外法线矢量 \mathbf{n} 沿 x, y 方向的分量.

四边形单元为双线性单元, 在单元内任意变量 φ 可以表示为:

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_i \quad (8)$$

其中 N_i 为单元内各个节点的形函数, φ_i 为其相应节点处的变量值. 四边形单元内形函数的表达式为:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta), \quad i = (1, 2, 3, 4) \quad (9)$$

上式中 ξ_i, η_i 为四边形单元所对应的局部坐标.

将式(8)带入到控制方程(7)进行离散:

x 方向:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 \oint_S n_x \cdot 2\mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} (u)_{ij} dS + \\ & \sum_{i=1}^{nc} \oint_S n_x \cdot P_i dS + \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 \oint_S n_y \cdot \\ & \mu \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial y} (u)_{ij} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} (v)_{ij} \right] dS = \\ & \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 [(k_{xu})_{ij} (u)_{ij} + (k_{xv})_{ij} (v)_{ij}] + \\ & \sum_{i=1}^{nc} (k_{xp})_i P_i \end{aligned} \quad (10)$$

y 方向:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 \oint_S n_y \cdot 2\mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial y} (v)_{ij} dS + \sum_{i=1}^{nc} \oint_S n_y \cdot \\ & P_i dS + \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 \oint_S n_x \cdot \\ & \mu \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial y} (u)_{ij} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} (v)_{ij} \right] dS = \\ & \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^4 [(k_{yu})_{ij} (u)_{ij} + (k_{yv})_{ij} (v)_{ij}] + \\ & \sum_{i=1}^{nc} (k_{yp})_i P_i \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 对应系数 $(k_{xu})_{ij}, (k_{xv})_{ij}, (k_{yu})_{ij}, (k_{yv})_{ij}, (k_{xp})_i, (k_{yp})_i$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} (k_{xu})_{ij} &= \oint_S \left(n_x \cdot 2\mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} + n_y \mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial y} \right) dS \\ (k_{xv})_{ij} &= \oint_S n_y \cdot \mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} dS \\ (k_{yu})_{ij} &= \oint_S n_x \cdot \mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial y} dS \\ (k_{yv})_{ij} &= \oint_S \left(n_y \cdot 2\mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial y} + n_x \cdot \mu \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} \right) dS \\ (k_{xp})_i &= \oint_S n_x dS \\ (k_{yp})_i &= \oint_S n_y dS \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)、(11)中 nc 表示节点 N_1 周围四边形单元总数, i 表示节点 N_1 周围第 i 个四边形单元, j 表示第 i 个四形单元内的第 j 个节点.

对不可压约束方程(6)采用上述方式进行离散, 为简化离散过程, 假设在单元内应变分布一致, 在四边形单元内均采用单元中心 ($\xi = 0; \eta = 0$) 的值进行近似计算, 将式(6)离散为:

$$\sum_{j=1}^4 (k_{pu})_j u_j + \sum_{j=1}^4 (k_{pv})_j v_j = 0 \quad (13)$$

其中 $(k_{pu})_j$ 和 $(k_{pv})_j$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} (k_{pu})_j &= \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (\xi=0; \eta=0) \\ (k_{pv})_j &= \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (\xi=0; \eta=0) \end{aligned} \quad (14)$$

考虑两种边界条件:

$$u_\alpha = u_{\alpha B} \quad \text{边界 } \Gamma_D \quad (15)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = t_{\alpha B} \quad \text{边界 } \Gamma_N \quad (16)$$

其中, $u_{\alpha B}$ 为在边界 Γ_D 上给定位移 (Dirichlet 边界), $t_{\alpha B}$ 为在边界 Γ_N 上给定应力 (Neumann 边界). 简支边界以及对称边界可由上述两种边界组合得到.

将边界条件引入到(10)、(11)中, 最终离散格式化为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xu} & \mathbf{K}_{xv} & \mathbf{K}_{xp} \\ \mathbf{K}_{yu} & \mathbf{K}_{yv} & \mathbf{K}_{yp} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$ 分别为作用到边界上的外力沿 x, y 方向的分量.

四边形单元为双线性单元, 针对刚度矩阵

(17) 中的系数 $(k_{xu})_{ij}$ 、 $(k_{xv})_{ij}$ 、 $(k_{yu})_{ij}$ 、 $(k_{yv})_{ij}$ 、 $(k_{xp})_i$ 、 $(k_{yp})_i$, 其可以归结为求解:

$$\int_S \frac{\partial N_j}{\partial x_\alpha} n_\beta dS, \alpha, \beta \in \{x, y\}; j = \{1, 2, 3, 4\} \tag{18}$$

以任意四边形 1234 为例, 如图 2 所示, A、B、C、D 分别为全局坐标系下, 边 12、23、34、41 的中点, O 为单元中心, a、b、c、d 分别为对应局部坐标系下, 边 12、23、34、41 的中点, o 为局部坐标系下四边形单元中心. scv 为子控制体, n_{AO} 和 n_{OD} 分别为控制边界的单位外法向量.

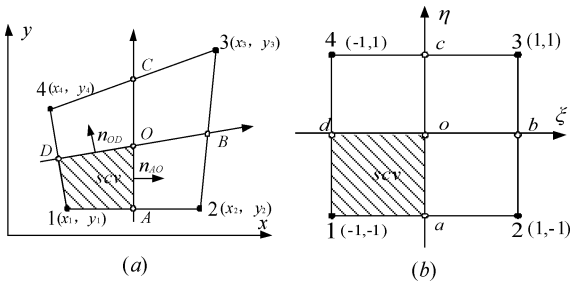


图 2 任意四边形单元: (a)整体坐标系; (b)局部坐标系

Fig. 2 Any quadrilateral elements in global and local coordinates

在全局坐标系下, 以 AO 段线积分为例, 式 (18) 化为:

$$\int_{AO} \frac{\partial N_j}{\partial x_\alpha} n_\beta d\Gamma = L_{AO} \cdot n_\beta \int_{ao} \frac{\partial N_j}{\partial x_\alpha} d\Gamma = L_{AO} \cdot n_\beta \int_{-1}^0 \frac{\partial N_j}{\partial x_\alpha} d\eta, \alpha, \beta \in \{x, y\}; j = \{1, 2, 3, 4\} \tag{19}$$

上式中 L_{AO} 为积分线的长度. 任意四边形单元局部坐标系下形函数的导数 $\partial N_j / \partial x_\alpha$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{[y_2 - y_4 - \xi(y_3 - y_4) - \eta(y_2 - y_3)]}{2S} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= -\frac{[y_1 - y_3 - \xi(y_3 - y_4) - \eta(y_1 - y_4)]}{2S} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= -\frac{[y_2 - y_4 - \xi(y_1 - y_2) + \eta(y_1 - y_4)]}{2S} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{[y_1 - y_3 - \xi(y_1 - y_2) + \eta(y_2 - y_3)]}{2S} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial y} &= -\frac{[x_2 - x_4 - \xi(x_3 - x_4) - \eta(x_2 - x_3)]}{2S} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{[x_1 - x_3 - \xi(x_3 - x_4) - \eta(x_1 - x_4)]}{2S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{[x_2 - x_4 - \xi(x_1 - x_2) - \eta(x_1 - x_4)]}{2S} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= -\frac{[x_1 - x_3 - \xi(x_1 - x_2) + \eta(x_2 - x_3)]}{2S} \end{aligned} \tag{21}$$

其中 S 为四边形单元的 1234 的面积.

4 数值求解

在开始计算时, 将与网格信息相关的形函数积分以及单元中心形函数的导数作为几何常数进行一次存储, 减少计算量. 对所形成的刚度矩阵(17)引入边界条件的影响, 采用有限元中的置大数法对其相应的行和列进行处理, 应用 FORTRAN 进行程序编写, 采用直接解法对方程组进行求解, 待解量满足收敛要求时程序停止.

5 数值算例

5.1 受拉伸荷载方板

算例一为受水平拉伸荷载不可压方板, 如图 3 所示, 方板的尺寸为 1 m × 1 m, 剪切模量 $G=100$ GPa, 采用四边形单元对其进行网格划分, 单元个数为 16 个, 方板左端采用简支边界进行约束, 右端施加水平拉力 $\sigma_0=1.0$ MPa.

将方板中心应力、应变的数值解与理论解进行对比, 对比结果如表 1 所示, 从表 1 中可以看出采用 CV-FVM 的计算结果和理论解吻合的很好, 图 4 为方板水平位移 u 的分布云图, 其正确的描述了方板的变形. 受轴向拉伸荷载方板内的静水压力理论解为 0.5 MPa, 图 5 为方板内静水压力 p 的误差分布云图, 从图中可以看出方板内静水压力 p 的分布与理论解吻合的很好, 其最大相对误差为 0.000455%, 出现在左端面水平中心, 其主要是由边界条件所引入. 求解结果未出现闭锁现象.

表 1 平板中心应力应变与理论解对比
Tab. 1 Comparisons of the strain and stress at the center of the plate between the calculated and exact results

	$\epsilon_{xx} \times 10^{-6}$	$\epsilon_{yy} \times 10^{-6}$	$\gamma_{xy} \times 10^{-6}$
CV-FVM	2.500	-2.500	0
精确解	2.5	-2.5	-5.4×10^{-20}
	σ_{xx}/MPa	σ_{yy}/MPa	τ_{xy}/MPa
CV-FVM	1.000	0	0
精确解	1.0	0	0

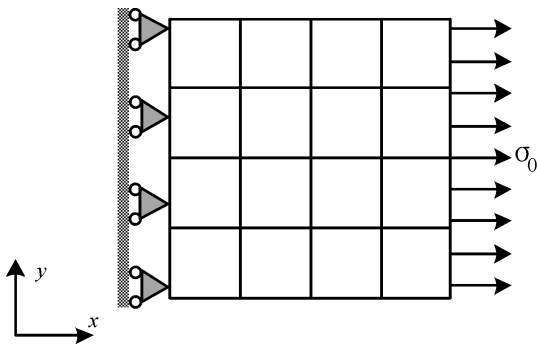


图 3 受轴向拉伸载荷单位方板

Fig. 3 An unit plate subjected to axial tension

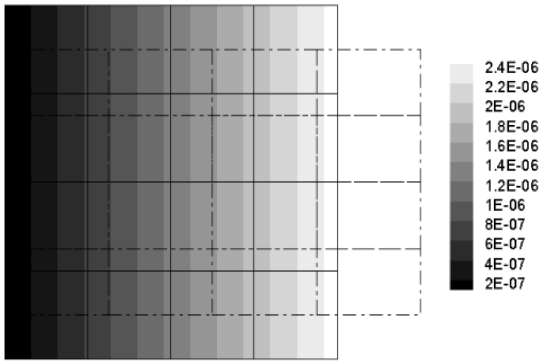


图 4 方板水平位移 u 的分布以及变形网格(实线为初始网格, 虚线为变形后的网格)

Fig. 4 Distributions of horizon displacement u in plate and the unformed (solid line) and deformed mesh (dashed line)

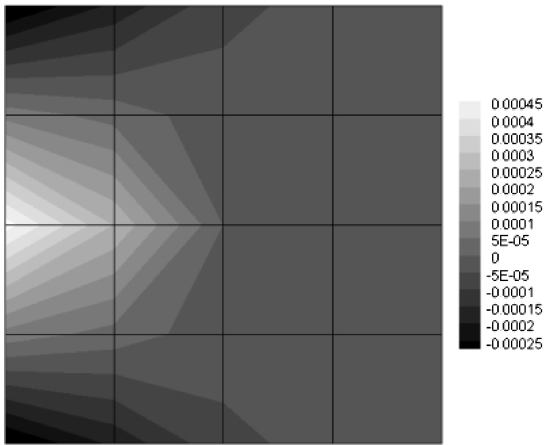


图 5 方板内静水压力 p 的误差分布

Fig. 5 Numerical errors of the hydrostatic pressure p in the plate

5.2 内部受压载荷无限长圆管

算例二为研究不可压材料的无限长圆管内部受压载荷线弹性问题, 如图 6 所示, 为其四分之一示意图, 圆管的内半径以及外半径分别为 0.1 和 0.4 m, 圆管内表面受法向压力 p 作用, 其大小为 1.0

MPa, 在圆管的下端面以及左端面施加对称边界条件进行约束, 圆管剪切模量 $G=100$ GPa, 采用四边形单元对其进行网格划分, 为比较不同网格密度对数值解的影响, 采用图 7 所示的四种网格模型, 不同网格模型下, 圆管内表面径向位移的数值解与理论解对比结果如表 2 所示. 图 8 为网格模型 4 的径向位移分布图, 圆管径向位移 u_r 的理论解为:

$$u_r = \frac{1}{2G} \cdot \frac{pr_o}{r_i^2 - r_o^2} \frac{r_i^2}{r} \quad (22)$$

其中, r_i 和 r_o 分别为圆管外半径以及内半径; p 为所加载荷强度; r 为圆管内任意位置的半径.

从表 2 中可以看出随着网格密度的不断增加, 圆管内表面径向位移 u_r 的相对误差不断减小, 当采用网格模型 4 时, 其相对误差降小到 0.0501%, 表明采用 CV-FVM 可以有效求解该类问题, 同时, 求解结果未出现闭锁现象.

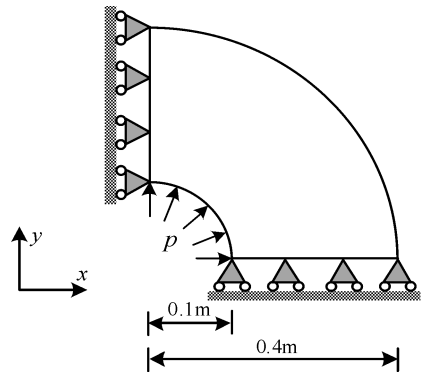


图 6 内部受压载荷无限长圆管

Fig. 6 Infinitely-long tube subjected to internal pressure

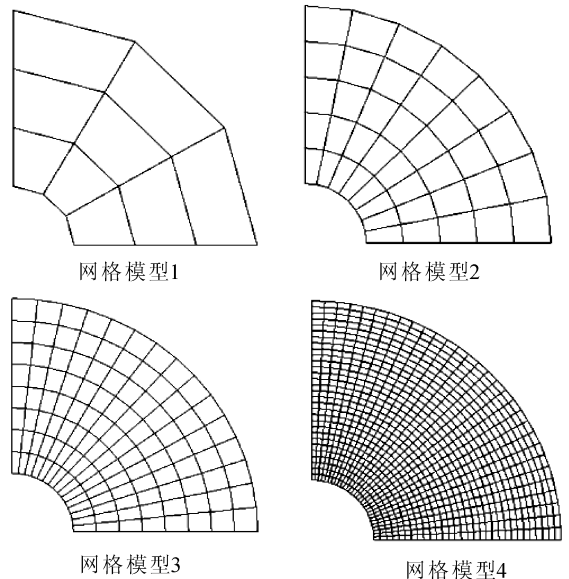


图 7 无限长圆管网格模型

Fig. 7 Meshes of the infinitely-long tube

表 2 不同网格模型圆管内表面径向位移 u_r 相对误差

Tab. 2 Relative error of the radial displacement u_r on the inner surface of the tube, based on different meshes

网格模型	数值解 (10^{-6} m)	理论解 (10^{-6} m)	相对误差(%)
网格 1	0.51188	0.53333	4.023
网格 2	0.52662	0.53333	1.259
网格 3	0.53065	0.53333	0.504
网格 4	0.53307	0.53333	0.0501

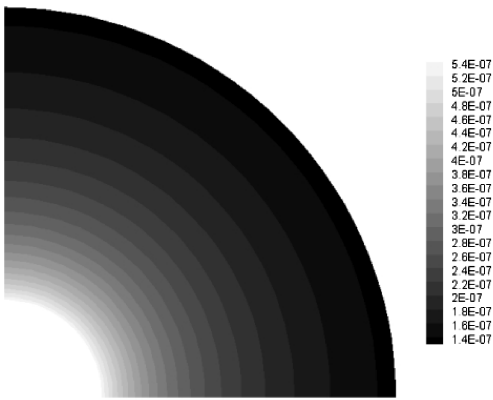


图 8 网格模型 4 径向位移 u_r 分布

Fig. 8 Distributions of the radial displacement of mesh model 4

图 9 为圆管内径向位移 u_r 的误差分布示意图以及其变形后的网格,从图中可以看出,其内部的最大相对误差为 0.05031%,表明了采用 CF-FVM 求解的正确性,同时网格的移动正确的揭示了内部受压圆管的变形。

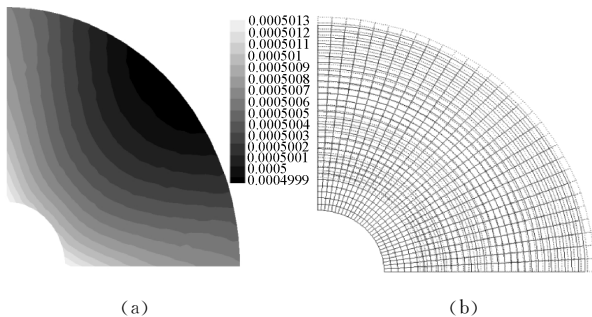


图 9 (a)圆管内径向位移 u_r 的误差分布;(b)网格变形(实线为未变形网格,虚线为变形后的网格)

Fig. 9 (a) Numerical errors of the radial displacement u_r in the tube;(b) the unformed (solid line) and deformed mesh (dashed line)

6 结 论

本文基于交错非结构化网格,研究发展了用于求解不可压及几乎不可压材料线弹性问题的有

限体积法,基于 FVM 离散平衡方程以及不可压约束方程.待解位移以及静水压力变量分别定义在单元节点以及单元中心,采用直接解法进行求解.对不可压材料的平板问题以及无线长圆管弹性问题进行了数值模拟,通过增加网格数量可以得到较高精度的数值解.由于 FVM 在任意自控制体内强守恒的特性,该方法有效的避免了有限元法中,当材料的泊松比趋于 0.5 时所出现的闭锁现象,表明该 CV-FVM 可以求解不可压及几乎不可压材料线弹性问题的一种有效方法。

参考文献:

- [1] Fryer Y D, Bailey C, Cross M, *et al.* A control volume procedure for solving elastic stress-strain equations on an unstructured mesh [J]. *App Math Model*, 1991, 15: 639.
- [2] Demirdžic I, Muzafferija S. Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology [J]. *Comput Method Appl M*, 1995, 125: 235.
- [3] Wheel M A. A finite volume approach to the stress analysis of pressurized axisymmetric structures [J]. *Int J Pres Ves Pip*, 1996, 68: 311.
- [4] Fainberg J, Leister H J. Finite volume multigrid solver for thermo-elastic stress analysis in anisotropic materials [J]. *Comput Method Appl M*, 1996, 137: 167.
- [5] Hoff G R V D, Hoogerbrugge R, Baumann R A, *et al.* Application of the finite volume method and unstructured meshes to linear elasticity [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 1998, 48: 267.
- [6] Bailey C, Cross M. A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2010, 38: 1757.
- [7] Taylor G A, Bailey C, Cross M. A vertex-based finite volume method applied to non-linear material problems in computational solid mechanics [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2003, 56: 507.
- [8] Demirdžic I, Martinovic D. Finite volume method for thermo-elasto-plastic analysis [J]. *Comput Method Appl M*, 1993, 109: 331.
- [9] Gong J F, Xuan L K, Ming P J, *et al.* An unstructured finite-volume method for transient heat conduction analysis of multilayer functionally graded materials with mixed grids [J]. *Numer Heat Tr B*:

- Fund, 2013, 63: 222.
- [10] Gong J F, Xuan L K, Ming P J, *et al.* Application of the staggered cell-vertex finite volume method to thermoelastic analysis in heterogeneous materials [J]. *J Therm Stresses*, 2014, 37: 506.
- [11] Demirdzic I A. A finite volume method for computation of fluid flow in complex geometries [D]. London: Imperial College London, 1982.
- [12] Wilkins M L. Calculation of elastic-plastic flow [J]. *J Biol Chem*, 1969, 280: 12833.
- [13] Wheel M A. A mixed finite volume formulation for determining the small strain deformation of incompressible materials [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 1999, 44: 1843
- [14] Bijelonja I, Demirdzic I, Muzaferija S. A finite volume method for incompressible linear elasticity [J]. *Comput Method Appl M*, 2006, 195: 6378.
- [15] Mattiasson K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 1981, 17: 145.
- [16] Bijelonja I, Demirdzic I, Muzaferija S. A finite volume method for large strain analysis of incompressible hyperelastic materials [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2010, 64: 1594.
- [17] Pan W, Wheel M A, Qin Y. Six-node triangle finite volume method for solids with a rotational degree of freedom for incompressible material [J]. *Comput Struct*, 2010, 88: 1506.

引用本文格式:

中文: 刘琦, 明平剑, 张文平. 二维不可压材料线弹性有限体积法的研究[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2018, 55: 795.

英文: Liu Q, Ming P J, Zhang W P. Two-dimensional incompressible linear elasticity analysis by finite volume method [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2018, 55: 795.