

有吹吸速度的外掠多孔平板湍流边界层的积分方法

李开勇, 赵波, 王翼鹏, 王梓羽

(四川大学机械工程学院 教育部空天动力燃烧与冷却工程研究中心, 成都 610065)

摘要: 具有吹吸速度的外掠多孔平板湍流流动特性是研究发散冷却和气膜冷却的基础, 具有重要的理论研究意义。将湍流速度边界层划分为层流底层和湍流核心区, 采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数分别代表流体沿两个区域厚度方向的速度分布, 通过积分方法建立了动量方程, 利用四阶龙格-库塔法求解得到可渗透壁面湍流边界层速度场的理论解析解, 同时获得了壁面摩擦系数。对比表明, 解析解与 Whitten、Blackwell 试验结果以及 Kays 的经验公式符合得较为满意, 证明了所提出的湍流理论模型的正确性。

关键词: 湍流边界层; 发散冷却; 积分法; 吹吸速度; 解析解

中图分类号: O533 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.024005

The integral method for turbulent momentum boundary layers on a porous plate with uniform blowing and suction

LI Kai-Yong, ZHAO Bo, WANG Yi-Peng, WANG Zi-Yu

(School of Mechanical Engineering, Engineering Research Center of Combustion and Cooling for Aerospace Power, Ministry of Education, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: The turbulent boundary layer with injection and suction is of fundamental interest for the analytical research in the field of transpiration or film cooling, which has an important theoretical significance. The momentum boundary layer is divided into the viscous sublayer and turbulent core zone for steady turbulent flows on a porous flat plate, and the velocity distributions in the two zones are approximated by the cubic polynomial and $1/5$ power functions, respectively. An integral method is used to recast the momentum equations into the integro-differential equation groups, and the analytical solutions of velocity boundary layers through the permeable surfaces are obtained by employing the fourth-order Runge-Kutta method. Following the foregoing analytical results, the profile of skin friction factor on the wall is also obtained. It is showed that the proposed analytical solutions have a satisfactory agreement with the existing experimental measurements carried out respectively by Whitten and Blackwell, and also with the empirical formula of Kays.

Keywords: Turbulent boundary layer; Transpiration cooling; Integral method; Blowing and suction velocities; Analytical solutions

收稿日期: 2020-04-16

作者简介: 李开勇(1994-), 男, 四川广元人, 硕士研究生, 主要从事对流换热理论研究。E-mail: gylikaiyong@126.com

通讯作者: 赵波。E-mail: zhaobo@scu.edu.cn

1 引言

航空航天等技术的迅猛发展对飞行器表面和发动机壁面的高效热防护性能提出更苛刻的要求,例如火箭发动机壁面和高速飞行器表面的发散冷却和航空发动机涡轮叶片的气膜冷却技术一直受到广泛关注^[1-5]. 此外,质子交换膜燃料电池在燃料输运过程中需经过具有多孔壁面的双极板通道并经扩散层到达膜电极处进行化学反应发电. 上述应用均可归结为壁面具有吹吸速度的外掠平板边界层流动问题^[6]. 本文主要限于多孔壁面的湍流速度边界层理论研究. 目前,外掠多孔平板层流边界层的理论研究相对较多,且多采用积分法或通过相似变换对动量和能量微分方程进行求解: Thomas 等^[7-8]采用多项式描述速度和温度分布,利用积分法获得了多孔壁面层流边界层的速度和温度场; Afzal^[9]利用幂函数代表速度并通过积分法和变量替换,将 Falkner-Skan 控制方程转换成常微分方程以得到速度场分布; Watanabe 等^[10]通过引入新变量,将控制方程简化为耦合非线性微分方程求得具有渗透表面圆盘的速度和温度场. 由于湍流机理的复杂性^[11-15],湍流边界层动量和热量传递的试验研究常常先行于理论^[16-19],此外还采用数值仿真的方法^[20-22],目前验证湍流理论模型的基准试验数据多来自 Kays 院士及其合作者^[23].

当前,外掠平板湍流边界层的理论研究多采用量纲分析的比拟法、渐近分析方法和积分方法建立雷诺时均动量方程(RANS)和能量方程^[24-28],其中湍流运动粘度和湍流热扩散率的确定主要遵循普朗特混合长度理论. Vigdorovich^[25-26]针对外掠可渗透壁面湍流速度边界层问题,采用渐近分析和无量纲比拟的方法建立了雷诺时均 N-S 方程,但需以相同条件下的非渗透壁面速度分布作为已知条件. Khademi 等^[27-28]将湍流速度和温度边界层划分为层流底层和湍流核心区,两个区域均采用多项式代表速度或温度分布,最后采用积分方法获得湍流边界层的速度和温度场分布,但他们的研究只限于非渗透壁面情况. 本文将在课题组前期非渗透壁面研究基础上^[29],集中讨论具有吹吸速度的可渗透表面湍流速度边界层的分布,拟分别采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数代表层流底层和湍流核心区的速度分布,利用积分方法建立湍流边界层动量方程,最终获得速度场的解析解. 该方法与现有试验

结果及经验公式符合得较好,而且具有形式简洁和求解时收敛迅速等优点.

2 理论模型

2.1 利用积分方法建立动量方程

如图 1,将外掠多孔平板湍流速度边界层划分为层流底层和湍流核心区^[27-28], u_∞ 为主流区恒定流速, v_s 为垂直渗透壁面、均匀分布且不变的吹入或吸出速度, δ_1 和 δ 分别为湍流速度边界层的层流底层厚度和总厚度(即层流底层加湍流核心区的厚度). 假设:流体不可压缩且物性参数均为常数;湍流流动是定常的,即流场各位置的时均速度不随时间变化;主流区速度和壁温为常数;不考虑转捩区,认为湍流从层流末端开始,该临界位置($x=0$)处湍流速度边界层总厚度 δ 等于该位置层流速度边界层的厚度 δ^* ,而层流底层厚度 δ_0 极薄,参考 Khademi^[27-28]假设,这里视 δ_0 为一个无限接近零的正数,文献[29]中对非渗透表面的研究中已表明这种处理能够保证理论模型的预测精度,取临界雷诺数 $Re=5 \times 10^5$ ^[27-28],如图 1.

湍流边界层的雷诺时均动量方程为^[23]

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \quad (1)$$

式中, ν 为流体运动粘度, \bar{u} , \bar{v} 分别为平行和垂直平板表面方向的时均速度, u' , v' 为相应的脉动值, $-\overline{u'v'}$ 为附加的雷诺应力,可用湍流动力粘度 μ_t 表示为 $-\overline{u'v'} = \frac{\mu_t}{\rho} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$,其中 ρ 为流体密度. 由普朗特混合长度理论,湍流动力粘度 $\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$, $l = 0.41y$,这样便将脉动速度的影响等效为湍流应力^[23]. 为表述方便,下文统一用 u 和 v 表示两个方向的时均速度.

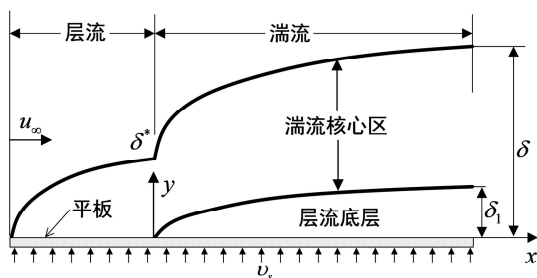


图 1 外掠可渗透平板湍流速度边界层示意图

Fig. 1 Schematic diagram of turbulent momentum boundary layer flows on a porous flat plate

图 2 给出湍流流动控制体积示意,区域 1—2—

3-4 为层流底层, 3-4-5-6 为湍流核心区, l 为流体厚度, dx 为 x 向微元. 因 dx 极小, 认为湍流边界层的层流底层厚度 δ_1 在 dx 内沿 x 向不变. 根据动量守恒定理, 采用与层流边界层类似的积分方法^[23], 最后获得多孔平板的湍流动量积分方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} u_1 (u_1 - u_L) \rho dy + \frac{du_L}{dx} \int_0^{\delta_1} u_1 \rho dy + u_L \rho v_s + \\ & \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} = 0 \\ & \rho \frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta} (u_2 - u_\infty) u_2 dy + \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} u_1 (u_L - u_\infty) dy - \\ & \frac{du_L}{dx} \int_0^{\delta_1} u_1 \rho dy + (u_\infty - u_L) \rho v_s + \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

式中 μ 为流体的动力粘度, u_1 和 u_2 分别为层流底层和湍流核心区的速度, u_L 为层流底层外缘处速度. 此外, 相应边界条件为:

$$\begin{aligned} u_1 \Big|_{y=0} = 0, u_1 \Big|_{y=\delta_1} = u_2 \Big|_{y=\delta_1}, \\ u_2 \Big|_{y=\delta} = u_\infty, \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1}. \end{aligned}$$

根据式(1)还有: $\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = v_s \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0}$.

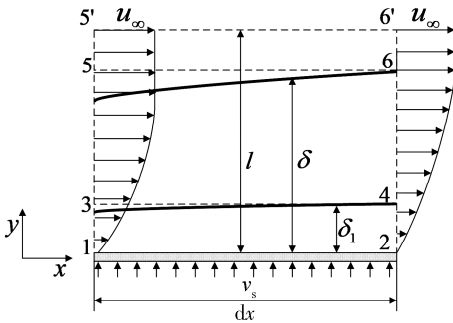


图 2 外掠可渗透平板湍流控制体示意图

Fig. 2 Elemental control volume for integral momentum analysis of turbulent boundary layer with transpiration

2.2 速度分布函数

认为外掠多孔壁面湍流边界层的速度具有相似的速度分布, 在非渗透壁面的研究基础上, 采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数分别代表层流底层和湍流核心区的速度分布^[29], 即

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3, & (0 \leq y < \delta_1) \\ u_2 = a_5 y^{1/5}, & (\delta_1 \leq y < \delta) \end{cases} \quad (3)$$

由上述边界条件确定式(3)的待定系数为

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{(14 - \mu_t/\mu) 2u_\infty}{4 + Re_s} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^{1/5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{(14 - \mu_t/\mu) Re_s u_\infty}{4 + Re_s} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^{1/5}, \\ a_4 &= \frac{(2 + Re_s) \mu_t/\mu - 9 Re_s - 8 u_\infty}{4 + Re_s} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^{1/5}, \\ a_5 &= u_\infty \delta^{-1/5}. \end{aligned}$$

这里, 定义壁面吹吸雷诺数 $Re_s = v_s \delta_1 / \nu = F u_\infty \delta_1 / \nu$, F 为吹风比. 代回速度分布函数式(3), 则可渗透表面平板湍流边界层的速度表达式如下

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_\infty} = \frac{(14 - \mu_t/\mu)}{5(4 + Re_s)} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^{1/5} \left[2 \frac{y}{\delta_1} + Re_s \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^2 - \frac{8 + 9 Re_s - (2 + Re_s) \mu_t/\mu}{14 - \mu_t/\mu} \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^3 \right], & (0 \leq y < \delta_1) \\ \frac{u_2}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/5}, & (\delta_1 \leq y < \delta) \end{cases} \quad (4)$$

2.3 积分方程组求解

将速度分布函数(4)代入动量积分方程组(2)并整理成 $\frac{d\delta_1}{dx} = f_1(\delta_1, \delta)$ 和 $\frac{d\delta}{dx} = f_2(\delta_1, \delta)$ 的形式, 在 MATLAB 程序中使用四阶龙格-库塔算法进行求解得到 δ_1, δ , 代回式(4)即得到速度场的理论分布.

3 结果讨论

3.1 湍流速度场的理论分布

图 3 和图 4 分别给出具有喷注(吹入)和吸出速度的外掠平板湍流边界层速度分布情况, 图中“IDENT”指 1968 年斯坦福大学 AFOSR 大会所采用的那套实验数据, 本文解析解分别与 Whiten 试验和 Blackwell 的试验结果^[23]进行了对比, 其中吹风比 $F = v_s / u_\infty$, $F > 0$ 代表喷注, $F < 0$ 为吸出. 由图可见, 在层流底层理论解与试验值符合得较好, 而在湍流核心区虽存在一定偏差, 但大体趋势是符合的, 最大相对误差 6%. 理论和试验结果存在一定偏差的主要原因是: 就作者所知, 以往外掠多孔壁面湍流试验中, 与本文常自由速度和常壁温条件完全相同的试验尚未发现, 在文献[23]收集的试验数据中, Whiten 的试验条件(IDENT 62067)是零压力梯度加变化的壁温, 即混合边界条件, 这与本文前面的常自由速度和常壁温假设不完全一致; 而 Blackwell 的试验条件(IDENT 122371)是常壁温和逆压力梯度(即 u_∞ 随 x 是减小的), 也与本文理论模型的假设有所差别. 求解理论模型时由于可渗透壁面湍流模型的复杂性, 需用数值方法联立求解动量和能量积分方程组, 求解结果与常壁

温条件相关. 关于外掠多孔平板湍流温度边界层和三维热对流密度函数的理论模型, 将另文报道.

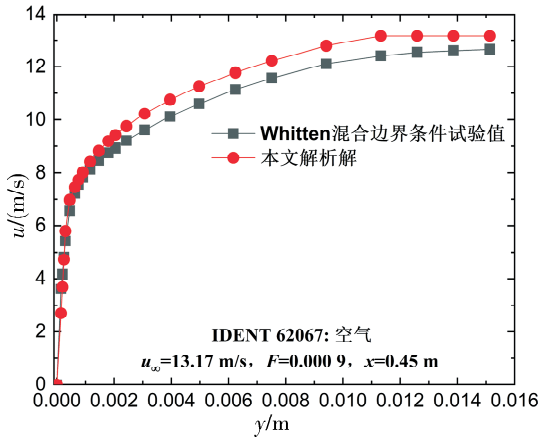


图 3 本文速度解析解与 Whitten 试验结果比较
Fig. 3 The present velocity analytical solution validated by Whitten's experiment measurements

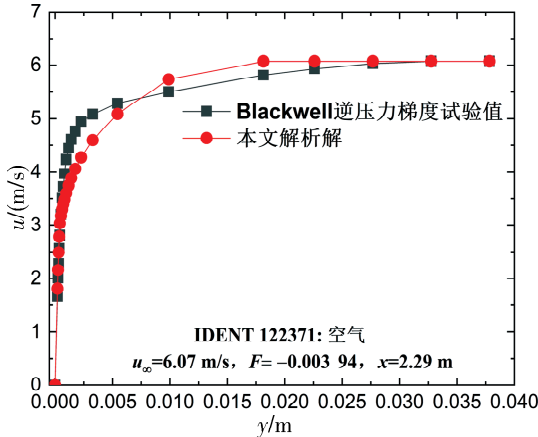


图 4 本文速度解析解与 Blackwell 试验结果比较
Fig. 4 The proposed velocity analytical solution compared with Blackwell's experiment measurements

图 5 给出吹风比 F 变化时主流方向速度 u 的分布规律. 注意到在流体厚度 y 保持不变时, 随着吹风比 F 的增加, x 方向的流体速度随之增大. 由图可见, 与没有壁面吹吸速度 ($F=0$) 时相比, 当通过壁面吸出流体 ($F<0$) 时, 速度边界层 δ 会变薄, 而流体吹入 ($F>0$) 时 δ 相应变厚, 吹入速度 u_s 增大到一定数值会最终导致边界层分离, 这些与 Schlichting 等人^[12] 以及 Kays 等人^[23] 试验结论一致.

3.2 摩擦系数的理论预测

由摩擦系数定义, 由式(4)可得摩擦系数 $c_f = \frac{4(14 - \mu_1/\mu) F}{5(4 + Re_s) Re_s} \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{1/5}$. 对于 u_∞ 等于常数情况的外掠可渗透壁面湍流边界层, Kays 等人^[23] 认为经验公式 $\frac{(c_f/2)}{(c_f/2)_0} = \frac{b_f}{e^{b_f} - 1}$ 与试验数据符合得较为一

致, 式中 $(c_f/2)_0$ 为吹风比 $F=0$ 时的壁面摩擦系数, 取 $(c_f/2)_0 = 0.0287 Re_x^{-0.2}$ ^[23]; b_f 为喷注参数, 定义为 $b_f = \frac{F}{(c_f/2)_0}$. 主要考虑壁面吸出情况 ($F<0$), 由本文解析解确定的摩擦系数与经验公式对比如图 6 所示, 发现二者符合得非常好, 最大相对误差为 4.9%, 间接证明了本文模型的正确性. 计算结果表明, 本文理论解对于 $F>0$ 的喷注情况, 获得的摩擦系数与经验公式符合得并不理想, 还有待于后续进一步试验研究验证. 但是, 本文解析解对于 $F>0$ 的壁面喷注情况的边界层速度场分布预测, 与试验值有较好的一致性, 最大相对误差为 6%, 如图 3.

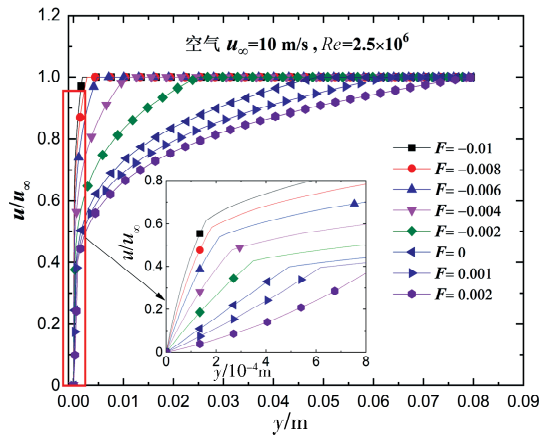


图 5 吹风比 F 变化时速度场的理论分布
Fig. 5 The analytical velocity profiles with different F

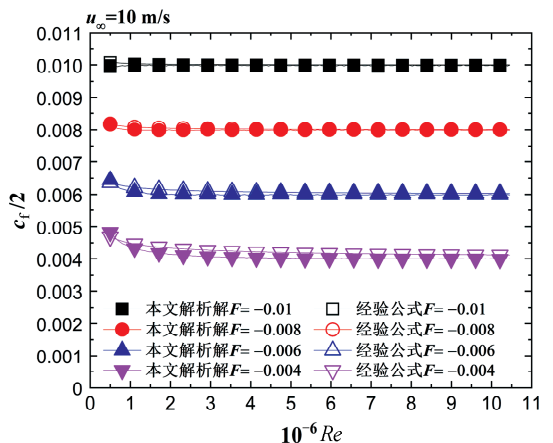


图 6 理论解确定的摩擦系数与 Kays 经验公式对比
Fig. 6 Comparison of the present analytical local skin friction factors with those from Kays' empirical formula

4 结论

本文主要研究具有吹吸速度壁面外掠平板湍流边界层速度场问题, 利用积分方法建立了湍流动

量方程, 并获得湍流速度场和壁面摩擦系数的理论分布. 首先将湍流边界层划分为层流底层和湍流核心区两部分, 然后分别采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数对速度分布进行描述, 随后用积分法建立了动量积分方程, 最后用四阶龙格-库塔算法求解得到湍流速度场的解析解, 同时获得壁面处的摩擦系数. 边界层速度理论解分别与 Whitten 和 Blackwell 的试验结果以及 Kays 的多孔壁面湍流经验公式对比表明, 最大相对误差为 6%, 摩擦系数与 Kays 经验公式的最大相对误差为 4.9%. 这些工作为后续发散冷却壁面条件下湍流温度场和对流传热特性的理论研究奠定了较好基础.

参考文献:

- [1] 姜玉廷, 郑群, 高杰, 等. 跨声速高压涡轮静叶水滴喷雾/空气冷却性能研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49: 131.
- [2] 岳国强, 姜玉廷, 向世建, 等. 冷气预旋诱导涡系重构气膜冷却机理研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55: 181.
- [3] Lacy B P, Varghese P L, Wilson D E. Unsteady effects of dissociative cooling under high-stagnation-point heat loads [J]. J Spacecraft Rockets, 1998, 35: 633.
- [4] Lacy B P, Varghese P L, Wilson D E. Dissociative cooling-effect on stagnation heat transfer of gas mixture injection [J]. J Spacecraft Rockets, 1995, 32: 777.
- [5] Glass D E, Dille A D, Kelly H N. Numerical analysis of convection / transpiration cooling [J]. J Spacecraft Rockets, 1999, 38: 15.
- [6] Inger G R, Swain T F. Vecteded injection into laminar boundary layers with heat transfer [J]. AIAA J, 2015, 13: 616.
- [7] Thomas L C, Amminger W L. A practical one-parameter integral method for laminar incompressible boundary layer flow with transpiration [J]. J Appl Mech-T ASME, 1988, 55: 474.
- [8] Thomas L C, Amminger W L. Two-parameter integral method for laminar transpired thermal boundary-layer flow [J]. AIAA J, 1990, 28: 193.
- [9] Afzal N. Falkner-Skan equation for flow past a stretching surface with suction or blowing: Analytical solutions [J]. Appl Math Comput, 2010, 217: 2724.
- [10] Watanabe T, Pop I. Laminar boundary layers on rotating axisymmetric surfaces with suction or injection [J]. Appl Sci Res, 1994, 52: 101.
- [11] Smith F T, Scheichl B, Kluwick A. On turbulent separation [J]. J Eng Math, 2010, 68: 373.
- [12] Schlichting H, Gersten K. Boundary layer theory [M]. 9th ed. Berlin Heidelberg: Springer, 2017.
- [13] 唐新姿, 李鹏程, 彭锐涛, 等. 湍流工况小型风力机翼型气动特性及稳健优化[J]. 机械工程学报, 2019, 56: 192.
- [14] Leontiev A I, Lushchik V G, Yakubenko A E. Compressible turbulent boundary layer on a permeable plate with injection of foreign gas [J]. High Temp+, 2007, 45: 488.
- [15] Marchetto C, Maxit L, Robin O, *et al.* Experimental prediction of the vibration response of panels under a turbulent boundary layer excitation from sensitivity functions [J]. J Acoust Soc Am, 2018, 143: 2954.
- [16] Knopp T, Novara M, Schanz D, *et al.* A new experiment of a turbulent boundary layer flow at adverse pressure gradient for validation and improvement of RANS turbulence models [M]// New results in numerical and experimental fluid mechanics XI notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design. Seiten: Springer, 2018: 85.
- [17] Qiao Z X, Xu S J, Zhou Y. On the measurement of wall-normal velocity derivative in a turbulent boundary layer [J]. Flow Turbul Combust, 2019, 103: 369.
- [18] Ferro M, Falleni B E G, Fransson J H M. On the turbulent boundary layer with wall suction [M]// Progress in turbulence VII: proceedings of the iTi conference in turbulence. [S. l.]: Springer, 2016.
- [19] Methel J, Forte M, Vermeersch O, *et al.* An experimental study on the effects of two-dimensional positive surface defects on the laminar-turbulent transition of a sucked boundary layer [J]. Exp Fluids, 2019, 60: 94.
- [20] Hwang H G, Lee J H. Secondary flows in turbulent boundary layers over longitudinal surface roughness [J]. Phys Rev Fluids, 2018, 3: 014608.
- [21] Chu X, Yang G, Pandey S, *et al.* Direct numerical simulation of convective heat transfer in porous media [J]. Int J Heat Mass Tran, 2019, 133: 11.
- [22] Fureby C, Tabor G, Weller H G, *et al.* A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence [J]. Phys Fluids, 1997, 9: 1416.
- [23] Kays W M, Crawford M E. Convective heat and

- mass transfer [M]. 3rd Ed. New York: McGraw-Hill, 1993.
- [24] Gorbushin A R, Zametaev V B. Asymptotic analysis of viscous fluctuations in turbulent boundary layers [J]. *Fluid Dynamics*, 2018, 53: 9.
- [25] Vigdorovich I I. Calculation of the parameters of a turbulent boundary layer with suction using data for an impermeable plate [J]. *Dokl Phys*, 2005, 50: 655.
- [26] Vigdorovich I I. Turbulent boundary layer over a flat plate with uniform wall suction [J]. *J Exp Theor Phys+*, 2005, 101: 741.
- [27] Khademi M H, Hezave A Z, Mowla D, *et al.* A simple model for turbulent boundary layer momentum transfer on a flat plate [J]. *Chem Eng Technol*, 2010, 33: 867.
- [28] Khademi M H, Mozafari A. Integral energy equation model for heat convection to turbulent boundary layer on a flat plate [J]. *Front Heat Mass Transfer*, 2016, 7: 33.
- [29] 李开勇, 赵波, 王翼鹏. 基于积分方法的外掠平板湍流温度场的解析解[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2020, 57: 526.

引用本文格式:

中文: 李开勇, 赵波, 王翼鹏, 等. 有吹吸速度的外掠多孔平板湍流边界层的积分方法[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2021, 58: 024005.

英文: Li K Y, Zhao B, Wang Y P, *et al.* The integral method for turbulent momentum boundary layers on a porous plate with uniform blowing and suction [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2021, 58: 024005.