

纵掠平板速度和温度边界层湍流转捩区的积分方法

赵 波, 刘 建, 李开勇

(四川大学机械工程学院 空天动力燃烧与冷却教育部工程研究中心, 成都 610065)

摘 要: 转捩边界层内壁面摩擦和传热特性急剧变化, 转捩区的速度和温度分布特性研究具有重要理论意义. 以外掠平板空气为研究对象, 将自然转捩边界层沿厚度方向划分为层流底层和准湍流层两部分, 采用三次多项式代表层流底层、 $1/7.5$ 和 $1/7$ 幂指数函数代表准湍流层速度和温度分布, 利用积分方法建立了动量和能量积分方程组, 获得了转捩区速度场和温度场的显式表达式, 同时确定了壁面摩擦系数和努塞尔数大小, 通过四阶龙格-库塔算法获得了动量和热边界层厚度大小, 同数值解、Dhawan & Narasimha 解(D-N 解)和 Coupland 基准实验结果对比表明, 给定条件下理论解精度达到 4.8% , 证明了理论模型的正确性, 对提出的转捩边界层特征参数进行了参数研究, 并给出间歇因子对层流底层的影响规律.

关键词: 边界层转捩; 湍流流动; 速度和温度场; 间歇因子; 积分法; 显式解析解

中图分类号: O533 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.034005

An integral method of the laminar-turbulent transition zone for momentum and thermal boundary layer flows on a flat plate

ZHAO Bo, LIU Jian, LI Kai-Yong

(Engineering Research Center of Combustion and Cooling for Aerospace Power, Ministry of Education,
School of Mechanical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: It is of very important theoretical significance to study the velocity and temperature distributions for transitional boundary layers with abrupt changes of wall friction and heat transfer. The momentum and thermal boundary layers are divided into the laminar sublayer and quasi-turbulent layer for natural transition flows on a flat plate, and the velocity (or temperature) profiles in the two zones are represented by the cubic polynomial and $1/7.5$ (or $1/7$) power functions, respectively. An integral method is used to recast the momentum and energy equations into the integro-differential equation groups, and the closed-form analytical solutions of velocity and temperature for transition boundary-layers are obtained by employing the fourth-order Runge-Kutta method. Following the foregoing analytical results, the characteristics of local skin friction factor as well as Nusselt number is also obtained. It is showed that the present analytical solutions can be validated by comparing with the Dhawan and Narasimha's solution (D-N solution), Coupland's T3A benchmark experimental and proposed numerical results, respectively, and the accuracy of analytical solution can reach 4.8% for the specified conditions in this paper. The two key parameters affecting the profiles of velocity and temperature of the transition boundary layer are also proposed and analyzed, and it is found that an intermittency factor has a crucial effect on the distributions of velocity and temperature across the laminar sublayer of transition regions.

收稿日期: 2020-11-28
基金项目: 四川省重大科技专项基金(20SYSX0025)
作者简介: 赵波(1972—), 男, 吉林长岭人, 博士, 教授, 研究方向为边界层转捩和传热传质统一场理论. E-mail: zhaobo@scu.edu.cn

Keywords: Boundary layer transition; Turbulent flow; Velocity and temperature distributions; Intermittency factor; Integral method; Closed-form analytical solutions

1 引言

边界层由简单稳定状态的层流向具有强烈非线性现象、多尺度效应的湍流过渡区域称为转捩区。长期以来,边界层转捩一直是流体力学中最重要的前沿问题和难点之一^[1-4]。边界层转捩伴随着壁面摩擦和传热特性的急剧变化,减小飞行器表面摩擦阻力和热流、燃气涡轮发动机叶片冷却和燃烧时燃料掺混效率等问题均与转捩特性密切相关^[5-6];转捩对揭示湍流真正形成机理也具有重要价值^[7]。Reynolds 最早通过圆管实验发现有层流和湍流两种不同流态,这被视为研究边界层转捩问题的肇始。Emmons^[8]发现转捩区间歇出现的湍斑,它们沿流动方向不断变大增多,最终在完全湍流区布满,这表明边界层转捩区以间歇出现的湍斑为主要特征。为此,Dhawan 和 Narasimha^[9]提出间歇因子的概念以描述转捩区湍斑的分布特征:间歇因子为 0 时流动为层流,为 1 时则代表完全湍流,他们以间歇因子为加权系数,可将任意位置的流场视为层流与湍流的线性组合^[10],这种叠加思想能较好地预测零压和顺压梯度的转捩过程^[4],但并未考虑层流与湍流间的相互作用。针对这个不足,Libby^[11]采用条件平均法,通过建立含间歇因子的输运方程加以解决。张若凌等^[12]采用热力学平衡系统连续相变方法,类比研究了管内转捩区的流动和振荡特性,视转捩流动为层流和湍流的线性组合,所提出的合成系数考虑了振荡特性。Langtry 等^[13-14]发展了完全由局部变量构造的新型模式,使转捩计算与流场结构直接相关,与 Coupland^[15]的空气外掠平板转捩实验的结果对比表明准确性较高。董平等^[16-17]在上述模型基础上,分别对外掠平板边界层转捩区的速度和温度进行了数值计算,并与 Coupland^[15]试验结果进行了比较。针对完全湍流流动,Prandtl 和 Taylor 沿边界层厚度方向将边界层划分为层流底层和湍流核心区,提出分别描述速度和温度边界层的 Prandtl-Taylor 两层模型;von Kármán 进一步在层流底层和湍流核心区中间增加了缓冲层,建立了三层模型。Khademi 等^[18-19]采用完全湍流边界层的两层模型,通过积分方法分别建立了动量方程和能量方程,获得的速度场和温度场分布规律与以往理论结果一致

性较好。最近,Lozano-Durán 等^[20]利用非线性抛物化理论预测了转捩的起始位置,预测结果与大涡模拟(LES)和直接数值模拟(DNS)计算吻合度较高。由上可见,目前对边界层转捩区的研究多以数值模拟方法为主,通常计算量较大(如 LES 和 DNS 相当于 $Re^{9/4}$ ^[3]),由于问题的复杂性,采用理论研究的方法相对较少。就作者所知,目前为止尚未发现采用积分方法预测边界层自然转捩区的速度和温度场分布方面的理论研究。为此,本文在以往研究基础上^[21-22],将以空气外掠平板边界层为研究对象,采用完全湍流区的两层模型思想,首先将转捩区沿边界层厚度方向划分为层流底层和准湍流层,然后在准湍流层利用间歇因子定量描述该区域的湍流时间份额,最后利用积分方法,分别建立转捩区的动量方程和能量方程,以获得边界层转捩区速度场和温度场的理论分布,同时将之与 Coupland 实验结果和数值仿真模型相比较,以证明理论模型的正确性。边界层转捩最关注的因素有三:转捩的起始位置、转捩区长度和转捩区内的时均流动特性^[23]。本文将仅限于转捩区的时均流动特性和温度场分布规律的讨论,研究对象限于零压力梯度条件下外掠平板的自然转捩特性。

2 理论模型

2.1 转捩边界层积分方程组

首先,这里讨论的流体指粘性流体,根据牛顿内摩擦定律、层流理论和 Prandtl-Taylor 湍流边界层的两层理论^[24],靠近壁面的区域因液体粘性的存在,可近似认为是层流流动^[10],故有理由认为对于从层流向湍流过渡的转捩区也应如此,为与完全湍流的“层流底层”称谓相一致,仍称转捩区的近壁面区域为“层流底层”(laminar sublayer),如图 1 所示。其次,根据间歇理论^[8-10],转捩区内的湍斑在流动方向上逐渐增多,直到在完全湍流区布满,若遵照完全湍流区的 Prandtl-Taylor 两层理论,布满湍斑的区域应仅限于湍流核心区而不包含层流底层;类似地,这里假设在转捩区内,只有外层区域(从层流底层外缘到主流区)内存在湍斑,为方便,称之为“准湍流层”(quasi-turbulent layer),如图 1。最后,根据 Langtry 和 Menter^[13-14]的观点:用动量厚度雷诺数来判断转捩的开始,用间歇因子来描

述转捩的过程^[3],假设转捩区初次出现湍流的位置在动量边界层最大厚度 δ^* 处,如图 1,并假设:(1)常物性和不可压缩流体;(2)准湍流层湍斑在主流方向的脉动速度、脉动温度与完全湍流区规律相同^[12];(3)零压力梯度和常壁温,忽略耗散热;(4)经计算可知,层流底层和准湍流层的速度边界层厚度非常接近温度边界层的对应厚度,为积分方便,设层流底层和准湍流层的温度边界层厚度 Δ_1 和 Δ 略大于速度边界层的对应厚度 δ_1 和 δ ;(5)只考虑自然转捩情况,为与 Coupland 实验结果相比较^[14-15],设转捩起始位置雷诺数为 10^5 ,在该位置处的层流底层厚度记为 δ^* ,如图 1。

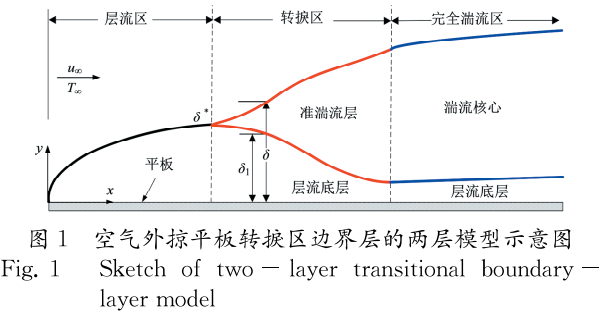
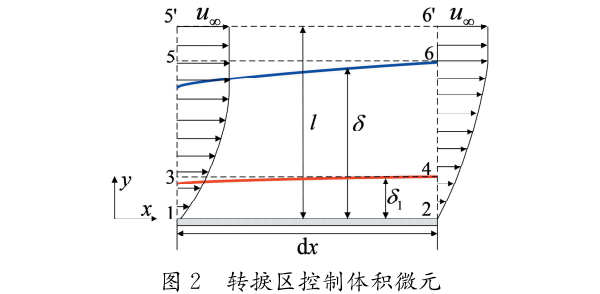


图 2 给出转捩区控制体积示意,区域 1-2-3-4 为层流底层,3-4-5-6 为准湍流层, l 为流体厚度, dx 为 x 向微元。因 dx 极小,认为层流底层厚度 δ_1 在 dx 内沿 x 向近似不变。



根据动量守恒定理,采用与层流边界层类似的积分方法^[24],最后获得到外掠平板转捩区的动量方程为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u_1 (u_1 - u_L) dy + \frac{du_L}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} \right) = 0 \\ & \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u_1 (u_L - u_\infty) dy + \frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta} \rho u_2 (u_2 - u_\infty) dy - \frac{du_L}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy + \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

式中 ρ 为流体密度(kg/m^3), μ 为动力粘度($\text{Pa} \cdot \text{s}$), δ_1 、 δ 分别为层流底层和准湍流层速度边界层的厚度(m),见图 1, u_1 、 u_2 分别为层流底层和准湍流层的时均速度(m/s), u_L 和 u_∞ 分别为层流底层外缘处和主流区的速度(m/s)。根据能量守恒定理,采用完全类似的积分法^[24],得到能量方程为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^{\Delta_1} \rho \alpha u_1 (T_1 - T_L) dy + \frac{dT_L}{dx} \int_0^{\Delta_1} \rho \alpha u_1 dy + \lambda \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=\Delta_1} \right) = 0 \\ & \frac{d}{dx} \int_0^{\Delta_1} \rho \alpha u_1 (T_L - T_\infty) dy + \frac{d}{dx} \int_{\Delta_1}^{\Delta} \rho \alpha u_2 (T_2 - T_\infty) dy - \frac{dT_L}{dx} \int_0^{\Delta_1} \rho \alpha u_1 dy + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=\Delta_1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

式中 c 为定压比热容 $[\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$, λ 为导热系数 $[\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$, Δ_1 、 Δ 分别为层流底层和准湍流层温度边界层的厚度(m), T_1 、 T_2 分别为层流底层和准湍流层的时均温度(K), T_L 和 T_∞ 分别为层流底层外缘处和主流区的温度(K)。

2.2 速度分布函数

认为外掠平板转捩边界层具有相似的速度分布,设在层流底层($0 \leq y < \delta_1$)和准湍流层($\delta_1 \leq y < \delta$)的时均速度分布具有如下形式:

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3, & 0 \leq y < \delta_1 \\ u_2 = a_5 y^{1/m}, & \delta_1 \leq y < \delta \end{cases} \quad (3)$$

式中 a_i ($i=1 \sim 5$)为待定系数, m 为正的常数。

确立合适的边界条件: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_2|_{y=\delta} = u_\infty$, $u_1|_{y=\delta_1} = u_2|_{y=\delta_1}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0$ 和 $\mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1} = \bar{\mu} \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1}$, 详见文献[18, 21]。这里 $\bar{\mu}$ 定义为湍流层的平均动力粘度,根据 Narasimha^[10]的定义并参考其他学者的论述^[25-26],有

$$\bar{\mu} = \mu + \gamma \mu_t \quad (4)$$

式中 μ_t 为湍流动力粘度,根据假设(2)并应用 Prandtl 混合长度理论^[24]: $\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$, $l = 0.41 y$; γ 为间歇因子, Dhawan 和 Narasimha^[9]为描述转捩区间歇出现的湍斑,定义间歇因子 γ 为表征空间中任意位置流动保持为湍流的时间占比,其计算式为

$$\gamma = 1 - e^{-0.412(x-x_t)^2/\chi^2} \quad (5)$$

式中 x_t 为转捩区起始位置,由临界雷诺数确定;
 $\chi = x|_{\gamma=0.75} - x|_{\gamma=0.25}$,由文献[8]中零压力梯度条件下外掠平板转捩边界层的实验数据确定.

由上述边界条件式并考虑方程(4)和(5),最终确定方程(3)中的待定系数为:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = 0, \\ a_2 &= \frac{(3m-1-\gamma\mu_t/\mu)u_\infty}{2m\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{1/m}, \\ a_4 &= -\frac{(m-1-\gamma\mu_t/\mu)u_\infty}{2m\delta_1^3}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{1/m}, \\ a_5 &= u_\infty\delta^{-1/m}. \end{aligned}$$

相应地,转捩区的速度分布式(3)可写为:

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_\infty} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\left[(3m-1-\bar{\omega})\frac{y}{\delta_1} - (m-1-\bar{\omega})\left(\frac{y}{\delta_1}\right)^3\right], & (0 \leq y < \delta_1) \\ \frac{u_2}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}, & (\delta_1 \leq y < \delta) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\bar{\omega} = \gamma\mu_t/\mu$ 称作间歇粘度比. 由上式可见,层流底层实际上已包含了间歇性湍流脉动的影响,为方便这里仍称之为“层流底层”. 将上式代到动量积分方程组(1)并整理为 $\frac{d\delta_1}{dx} = g_1(\delta_1, \delta)$ 和 $\frac{d\delta}{dx} = g_2(\delta_1, \delta)$ 的函数形式,在 MATLAB 程序中使用四阶龙格-库塔算法求解确定 δ_1 和 δ ,代入到式(6)即得转捩速度场的理论分布.

2.3 温度分布函数

同样地,认为转捩边界层具有相似的温度分布,考虑假设(3),设层流底层和准湍流层的过剩时均温度分布为:

$$\begin{cases} \theta_1 = T_1 - T_s = b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3, & (0 \leq y < \Delta_1) \\ \theta_2 = T_2 - T_s = b_5y^{1/n}, & (\Delta_1 \leq y < \Delta) \end{cases} \quad (7)$$

式中 $b_i (i=1\sim5)$ 为待定系数, n 为正的常数. 建立正确的边界条件: $\theta_1|_{y=0} = 0, T_2|_{y=\Delta} = T_\infty - T_s = \theta_\infty, \theta_1|_{y=\Delta_1} = \theta_2|_{y=\Delta_1}, \frac{\partial \theta_1}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0$, 这里 T_s 代表平板表面温度(K),具体确定过程见文献[19, 21]. 注意到层流底层和准湍流层界面处 y 向的热流密度应保持相等,故有 $\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial y}\Big|_{y=\Delta_1} = (\lambda + \gamma\lambda_t) \frac{\partial \theta_2}{\partial y}\Big|_{y=\Delta_1}$, 这里 λ_t 为湍流导热系数, $\lambda_t = \rho c a_t = \mu_t c / Pr_t, a_t$ 为湍流热扩散率, Pr_t 为湍流普朗特数,取 0.82. 由上述诸边界条件确定方程(7)中

的待定系数如下:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_3 = 0, \\ b_2 &= \frac{(3n-1-\gamma\lambda_t/\lambda)\theta_\infty}{2n\Delta_1}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{1/n}, \quad b_5 = \theta_\infty\Delta^{-1/n}, \\ b_4 &= -\frac{(n-1-\gamma\lambda_t/\lambda)\theta_\infty}{2n\Delta_1^3}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{1/n}. \end{aligned}$$

相应地,转捩区的时均温度分布式(7)可写为:

$$\begin{cases} \frac{\theta_1}{\theta_\infty} = \frac{1}{2n}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{1/n}\left[(3n-1-\phi)\frac{y}{\Delta_1} - (n-1-\phi)\left(\frac{y}{\Delta_1}\right)^3\right], & (0 \leq y < \Delta_1) \\ \frac{\theta_2}{\theta_\infty} = \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/n}, & (\Delta_1 \leq y < \Delta) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\phi = \gamma\lambda_t/\lambda$ 称作间歇导温比,且有 $\bar{\omega}/\phi = Pr_t/Pr$, 这里 Pr 是普朗特数. 将上式代到能量积分方程组(2)并考虑假设(4),最后整理成 $\frac{d\Delta_1}{dx} = f_1(\Delta_1, \Delta)$ 和 $\frac{d\Delta}{dx} = f_2(\Delta_1, \Delta)$ 的形式,使用四阶龙格-库塔算法求解,确定 Δ_1 和 Δ 后代入式(8)即得转捩区温度场的理论分布.

3 有限元模型和常数 m, n 的选择

3.1 有限元模型

以外掠平板的空气为研究对象,在 Fluent 软件中采用如图 3 所定义的有限元分析区域:平板长度取 3 600 mm,空气域高度取 220 mm. 所研究的转捩边界层位于平板近壁面,需精确计算近壁面速度和温度变化情况,经仔细比较^[26-28],最终选取 FLUENT 软件中的 SST $k-\omega$ 模型作为数值计算的转捩模型.

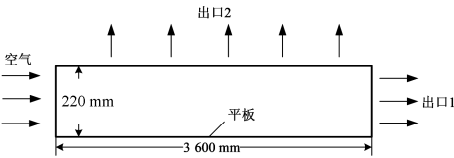


图 3 空气外掠平板数值计算区域

Fig. 3 The numerical calculation region for the transitional boundary layer

为了同 Coupland 实验结果^[14-15]比较,取自由流速度和温度分别为 $u_\infty = 5.3 \text{ m/s}$ 和 $T_\infty = 293 \text{ K}$,常壁温 $T_s = 323 \text{ K}$. 空气入口位于数值模型最左端,空气出口分别位于模型最右端和空气域上方,两者皆采用零压力出口,如图 3. 二维有限元模型采用四边形面单元,考虑到所关注的边界层仅存在于平板近壁面极薄区域,为节省计算资源且保证

求解精度,取网格全局尺寸 10 mm,在平板垂直距离 60 mm 内设置 40 层网格,每层网格以 1.2 倍速度增加,总单元数 19 712,总结点数 20 121,如图 4 所示. 根据假设(5),转捩起始位置处的雷诺数为 10^5 ,针对上述给定参数,数值和理论计算的结果表明,转捩边界层结束时的雷诺数为 3×10^5 .

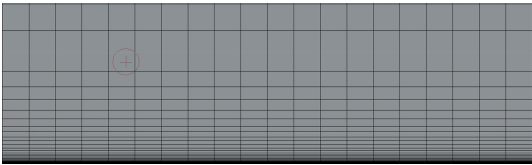


图 4 空气外掠平板有限元模型网格
Fig. 4 Detailed two-dimensional finite element mesh

3.2 常数 m 、 n 的确定

由第 1 部分可知,在转捩边界层的准湍流层速度和温度分布式(6)和(8)中,幂指数项 $1/m$ 和 $1/n$ 的大小对理论预测至为关键. 为此,经过大量计算、选择和对比,限于篇幅,仅以 m (或 n) 分别取 7、7.5 和 8 为例阐述之. 同时,将本文理论结果与 Coupland 平板转捩实验和上述数值模型的结果相对比,以选取合适的 m 和 n 常数值.

Coupland 的平板边界层转捩 T3 系列实验通常被广泛接受为验证转捩理论和 CFD 程序的经典基准^[14-17],这里选用 T3A 试验的相应结果^[15]来验证本文建立的理论和数值模型. 根据壁面摩擦系数 C_f 的定义^[24]: $C_f=2\mu\partial u/\partial y|_{y=0}/\rho u_\infty^2$. 图 5 和图 6 分别给出壁面摩擦系数 C_f 沿转捩区主流方向的分布和时均速度沿边界层厚度方向的分布. 综合比较可知,速度理论模型在 $m=7.5$ 时与试验解(数值解)符合程度最好,且 C_f 数值解与试验结果一致性也较好.

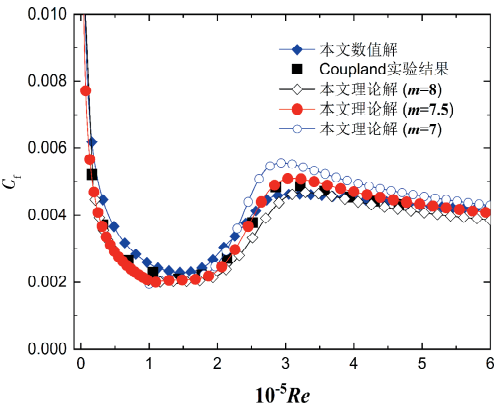


图 5 转捩区内壁面的局部摩擦系数
Fig. 5 Local skin friction factors in the transitional region

图 7 给出转捩区时均温度沿边界层厚度方向

的变化,通过对比发现,温度当 $n=7$ 时理论解与数值解(以之为 benchmark)最接近. 因此最终确定:选取 $m=7.5, n=7$.

相应地,速度和温度分布式(6)(8)变为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_1}{u_\infty} &= \frac{1}{15} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^{\frac{1}{7.5}} \left[(21.5 - \bar{\omega}) \frac{y}{\delta_1} - (6.5 - \bar{\omega}) \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^3 \right], \quad (0 \leq y < \delta_1) \\ \frac{u_2}{u_\infty} &= \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7.5}, \quad (\delta_1 \leq y < \delta) \end{aligned} \right. \quad (9)$$
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\theta_1}{\theta_\infty} &= \frac{1}{14} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} \right)^{1/7} \left[(20 - \psi) \frac{y}{\Delta_1} - (6 - \psi) \left(\frac{y}{\Delta_1} \right)^3 \right], \quad (0 \leq y < \Delta_1) \\ \frac{\theta_2}{\theta_\infty} &= \left(\frac{y}{\Delta} \right)^{1/7}, \quad (\Delta_1 \leq y < \Delta) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

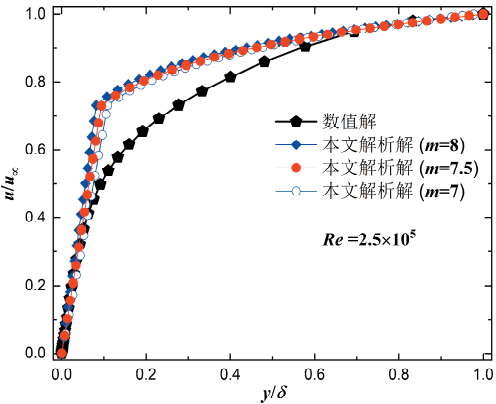


图 6 转捩区时均速度沿边界层厚度方向的分布
Fig. 6 Mean velocity profiles across the thickness of transitional boundary layer

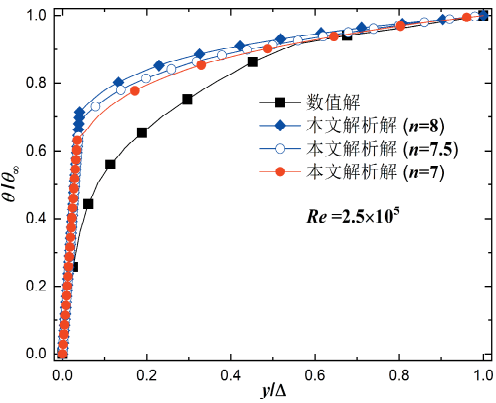


图 7 转捩区时均温度沿边界层厚度方向的分布
Fig. 7 Mean temperature profiles across the thickness of transitional boundary layer

由转捩边界层的动量厚度 ϑ 的定义^[9, 24],有:

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy =$$

$$\int_0^{\delta_1} \frac{u_1}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_1}{u_\infty}\right) dy + \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{u_2}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_2}{u_\infty}\right) dy$$

将式(9)代入上式,若不考虑间歇粘度比 $\bar{\omega}$ 沿 y 向的变化,转捩区的无量纲动量厚度可表示为:

$$\frac{\vartheta}{\delta} = \frac{30}{323} + \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{17/15} \left(\frac{36.5 - \bar{\omega}}{60} - \frac{15}{17}\right) + \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{19/15} \left\{ \frac{15}{19} - \frac{1}{225} \left[\frac{(21.5 - \bar{\omega})^2}{3} + \frac{(6.5 - \bar{\omega})^2}{7} - \frac{2}{5} (21.5 - \bar{\omega})(6.5 - \bar{\omega}) \right] \right\}$$

由上式可直接写出动量厚度雷诺数的显式表达式.

4 Dhawan 和 Narasimha 的线性叠加

为后面对比方便,这里简要介绍一下 Dhawan 和 Narasimha 关于转捩区的线性叠加思想. 根据间歇理论^[9-10],以间歇因子 γ 为权重系数,转捩边界层的速度和温度分布可以线性叠加为下式:

$$\begin{aligned} u &= (1 - \gamma)u_L + \gamma u_T \\ \theta &= (1 - \gamma)\theta_L + \gamma \theta_T \end{aligned} \tag{11}$$

式中 u_L 、 u_T 分别代表层流速度和完全湍流流动时的时均速度, θ_L 、 θ_T 分别是层流过余温度和完全湍流的过余时均温度. 对于层流和湍流的速度分布,这里分别采用 von Kármán 的层流边界层的积分解和 $1/7$ 幂律^[24, 29],即

$$\begin{cases} \frac{u_L}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_L} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_L}\right)^3, & \frac{u_T}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^{1/7} \\ \frac{\theta_L}{\theta_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta_L} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta_L}\right)^3, & \frac{\theta_T}{\theta_\infty} = \left(\frac{y}{\Delta_T}\right)^{1/7} \end{cases}$$

式中 δ_L 、 δ_T 分别代表层流、完全湍流的速度边界层厚度, Δ_L 、 Δ_T 分别表示层流和湍流的热边界层厚度,并取为^[24, 29]: $\delta_L = 5x Re^{-0.5}$, $\delta_T = 0.3707x Re^{-0.2}$,

$\Delta_L = \frac{\delta_L}{1.025 \sqrt[3]{Pr}}$, $\Delta_T \approx \delta_T$. 将以上诸式代入方程

(11),即得转捩边界层的时均速度和时均温度分布.

同样地,由式(11)容易推导出转捩区努塞尔数 Nu 可由层流和完全湍流的努塞尔数线性叠加得到:

$$Nu = (1 - \gamma)Nu_L + \gamma Nu_T \tag{12}$$

其中层流努塞尔数 $Nu_L = 0.332 Pr^{1/3} Re^{1/2}$ ^[24], 湍流努塞尔数 $Nu_T = 0.0287 Pr^{0.6} Re^{0.8}$ ^[30]. 为方便,以下称方程(11)和(12)为 D-N 解.

5 结果讨论

5.1 转捩边界层厚度

图 8 给出了通过动量积分方程组(1)获得的外

掠平板动量边界层中层流底层和准湍流层厚度的理论分布. 由图 8 可见,层流底层从层流边界层的最大厚度 δ^* ($=0.0049\text{ m}$)处开始突降,直到转捩区结束(这里转捩区结束时雷诺数为 3×10^5)后进入完全湍流区,而准湍流层则从相同的边界层厚度 δ^* 处开始骤增,直到转捩区结束后进入完全湍流区. 图 9 给出了通过能量积分方程组(2)获得的外掠平板热边界层中层流底层和准湍流层厚度的理论分布(其中 $\Delta^* = 0.0054\text{ m}$),主要结论与动量边界层类似,不赘述.

5.2 时均速度

图 10 给出 x 位置固定时($Re = 2.5 \times 10^5$),外掠平板转捩区内空气的时均速度沿边界层厚度方向的分布. 由图可见,本文理论解与 D-N 解大体上符合得很好,尤其在准湍流层区域,而在层流底层内二者略有偏差.

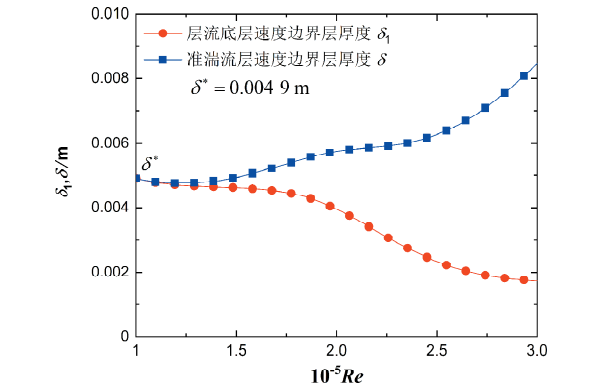


图 8 速度边界层中层流底层和准湍流层的厚度
Fig. 8 Thicknesses of laminar sublayer and quasi-turbulent layer for the momentum boundary layer

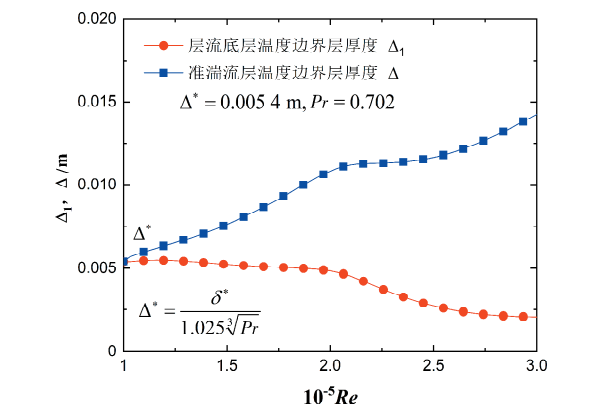


图 9 温度边界层中层流底层和准湍流层的厚度
Fig. 9 Thicknesses of laminar sublayer and quasi-turbulent layer for the thermal boundary layer

图 11 给出了平板不同 x 位置处(对应不同的 γ)的时均速度分布情况. 由图可见, γ 表观上对近壁面的层流底层速度分布有更大的影响,这与本文

理论公式(9), 以及 Dhawan 和 Narasimha^[9] 的发现相一致: 即 γ 主要影响 x 方向的时均速度分布, 且在近壁面区域影响相对明显. 进一步观察发现, γ 对远离壁面的准湍流层速度分布完全没有影响, 这是由于图中采用无量纲厚度 y/δ 坐标的缘故, 实际上不同的 γ 会导致不同的 δ , 具体见公式(9). 注意到图 11 中的速度呈相似性分布, $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 曲线分别代表层流和完全湍流流动两种特殊情况, 其中 $\gamma=0$ 代表的层流是计算转捩开始的初始条件, 转捩开始后, 当 x (和 γ) 稍有所增大, 速度的变化就十分剧烈, 这符合转捩区速度 (和壁面摩擦系数) 的突变骤增的特点, 注意到速度总体分布与文献[9] 中的图 11 结果几乎完全相同, 只不过后者采用了另一个无量纲厚度 y/ϑ 作为横坐标, 相当于放大了图 11 中的层流底层区域.

图 12 给出了无量纲速度在转捩区层流底层和准湍流层随间歇粘度比 $\bar{\omega}$ 参数变化情况. 由图 12 可见, 除转捩刚开始时层流底层速度骤升外, 其余大部分情形均是速度随 $\bar{\omega}$ 增加而减小, 且两个区域下降幅度非常相似. 这是因为: 根据间歇粘度比 $\bar{\omega}$ 定义, y 固定时 $\bar{\omega}$ 只与间歇因子 γ (或 x) 有关, 当 γ (或 x) 增大时无量纲厚度 y/δ 变小, 由图 10 易知时均速度也相应减小.

5.3 时均温度

图 13 给出 x 位置固定时 ($Re=2.5\times10^5$) 时均温度沿边界层厚度方向的分布. 由图可见, 同无量纲速度的分布几乎完全相同, 本文理论解与 D-N 解大体上符合得很好. 图 14 和 15 给出了平板不同 x 位置处 (对应不同的 γ , y 固定时也对应不同的间歇导温比 ψ) 的时均温度分布, 主要结论与前面无量纲速度的分布情形非常相似, 不赘述.

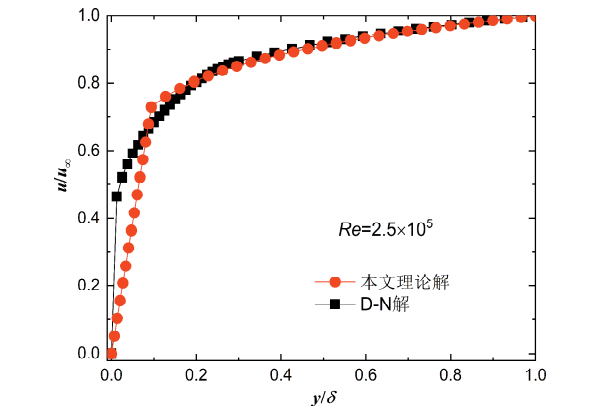


图 10 时均速度沿转捩边界层厚度方向的分布
Fig. 10 Time-averaged velocity profiles across the thickness of transitional boundary layer

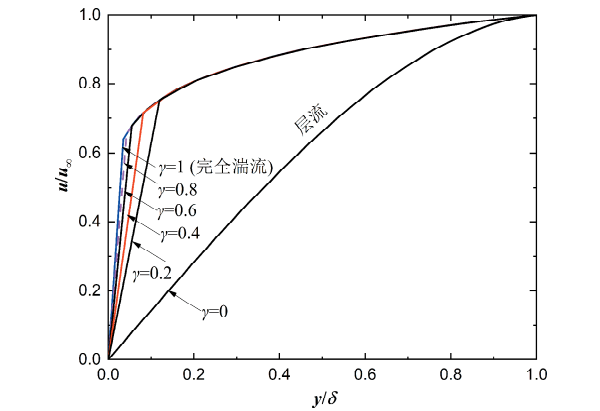


图 11 间歇因子 γ 对无量纲时均速度的影响
Fig. 11 The changes of transitional velocity with γ

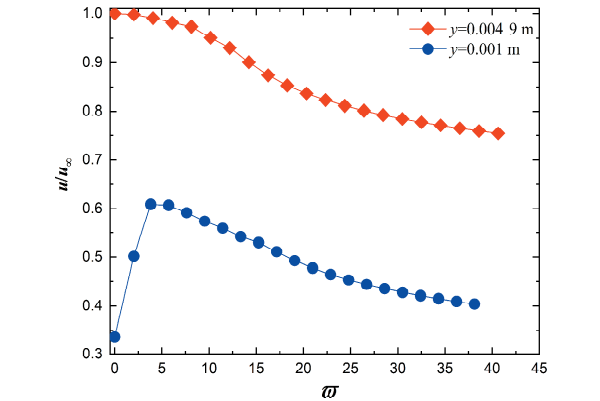


图 12 间歇粘度比 $\bar{\omega}$ 对无量纲时均速度的影响
Fig. 12 Transition velocity profiles with different $\bar{\omega}$

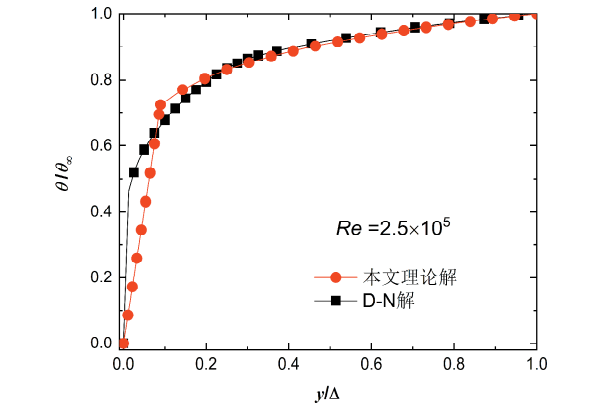


图 13 时均温度沿转捩区边界层厚度方向的分布
Fig. 13 Time-averaged mean temperature profiles across the thickness of transitional boundary layer

5.4 壁面摩擦系数

根据 Blasius 公式^[24], 层流时壁面摩擦系数 $C_{fl}=0.664 Re^{-0.5}$; 由 Prandtl-Schlichting 理论公式^[24, 29], 完全湍流时的壁面摩擦系数 $C_{fr}=0.0587 Re^{-0.2}$. 基于间歇理论, Emmons^[8] 以及其他学者^[9] 给出了转捩区壁面摩擦系数 C_{fr} 公式: $C_{fr}=(1-\gamma)C_{fl}+\gamma C_{fr}$, 为方便, 称之为 Emmons 解.

层流向湍流转捩最显著的特征是: 壁面摩擦系

数取得极小值处转捩开始,在转捩区内突变骤增,转捩结束位置处达到极大值,且略大于完全湍流时的壁面摩擦系数 $C_{f\tau}$,随后进入完全湍流,壁面摩擦系数缓慢减小,该特征也是转捩实验中最易监测的变量(见图 16). 将本文理论解和数值解获得的局部摩擦系数,同 Coupland 实验结果、层流和完全湍流理论解以及转捩区的 Emmons 解进行了对比,如图 16. 由图 16 可见,本文的理论解与试验结果符合得非常好,转捩区内最大相对误差为 4.8%,数值解也与试验结果大体符合. 注意到转捩区内 Emmons 解与试验值相比偏差相对更大,这表明用积分方法获得的理论解同以往用层、湍流叠加的方法(即 Emmons 解)具有较大优势.

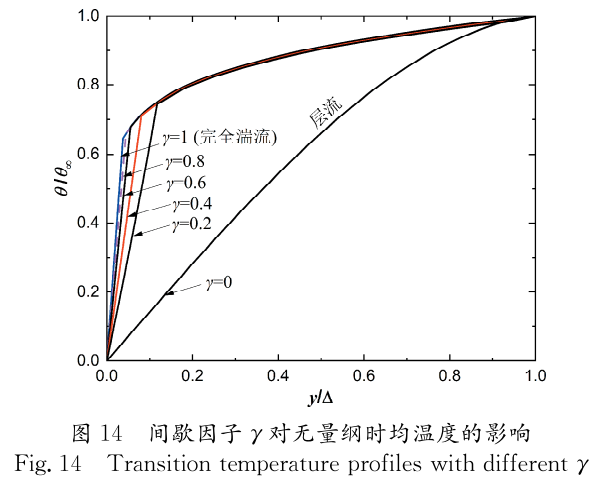


图 14 间歇因子 γ 对无量纲时均温度的影响
Fig. 14 Transition temperature profiles with different γ

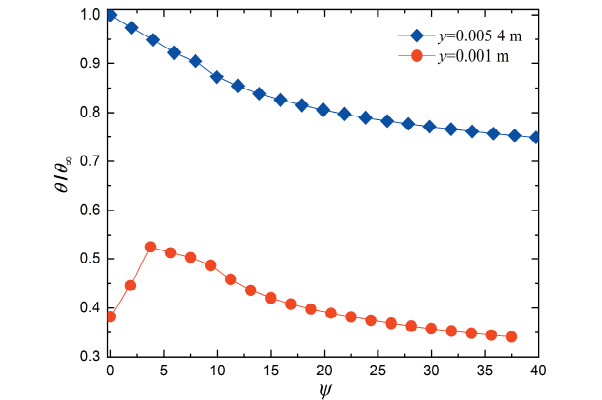


图 15 间歇导温比 ψ 对无量纲时均温度的影响
Fig. 15 Transition temperature profiles with different ψ

5.5 努塞尔数

图 17 给出了代表壁面传热特性的努塞尔数沿主流方向的分布情况,发现同壁面摩擦系数在转捩区内突变骤增的特征不同,努塞尔数在转捩区虽有变化,但波动要相对小得多. 图 17 将本文理论解和数值解获得的局部努塞尔数,同 D-N 解进行了对比,结果表明理论解和 D-N 解及数值解结果符

合得非常好,在转捩区内最大相对误差分别为 3.9%和 5.3%,再一次证明了理论模型的正确性.

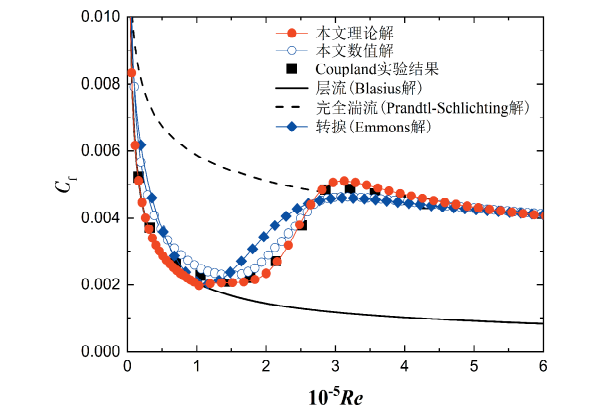


图 16 平板壁面摩擦系数分布
Fig. 16 Profiles of local skin friction factor

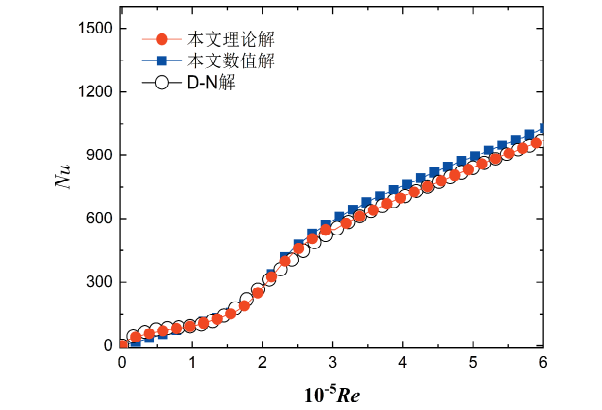


图 17 局部努塞尔数分布
Fig. 17 Profiles of local Nusselt numbers

6 结 论

以常壁温、零压力梯度的外掠平板空气为研究对象,将自然转捩边界层沿厚度方向划分为层流底层和准湍流层两部分,采用积分方法,分别建立了关于速度和温度的动量和能量积分方程组,并获得了速度场和温度场的显式表达式,通过四阶龙格-库塔算法获得了动量和热边界层厚度大小,同时与数值解、D-N 解和实验结果加以对比表明,在给定条件下,通过理论解获得的表面摩擦系数和努塞尔数与 benchmark 结果的最大相对误差在 4.8%以内,证明了理论模型的正确性,主要结论如下:

- (1) 利用相似假设和湍流边界层厚度分层思想,分别采用三次多项式和 $1/m$ (或 $1/n$)幂指数函数代表转捩区层流底层和准湍流层的速度场和温度场的分布规律,发现常数 $m=7.5$ 、 $n=7$ 时具有较好的理论预测精度.
- (2) 速度和温度理论公式表明,间歇因子不仅

对边界层(准湍流层)厚度有影响,尤其对“层流底层”的厚度、速度和温度分布具有关键影响,因此,该底层不是真正的层流流动;参数分析表明,所提出的间歇粘度比 $\bar{\omega}$ 和间歇导温比 $\bar{\psi}$ 是影响转捩区速度和温度场分布的关键参数。

(3) 解析模型从理论角度再次证实,在转捩区表面摩擦系数具有突变骤增的显著特征,而且在转捩起始和结束位置处分别取得极小值和极大值。而努塞尔数(对流换热系数)在转捩区的变化远没有壁面摩擦系数的变化显著,因此表面摩擦系数应视为判断边界层转捩起始位置和结束位置的关键指标。以上结论同样有潜力用于外掠多孔壁面转捩边界层的发散冷却等相关转捩问题研究中。

参考文献:

- [1] Lienhard J H. Heat transfer in flat-plate boundary layers: a correlation for laminar, transitional, and turbulent flow [J]. J Heat Trans, 2020, 142: 061805.
- [2] Marxen O, Zaki T A. Turbulence in intermittent transitional boundary layers and in turbulence spots [J]. J Fluid Mech, 2019, 860: 350.
- [3] Simoni D, Lengania D, Dellacasagrandea M, *et al.* An accurate data base on laminar-to-turbulent transition in variable pressure gradient flows [J]. Int J Heat Fluid Flow, 2019, 77: 84.
- [4] 符松, 王亮. 湍流转捩模式研究进展[J]. 力学进展, 2007, 37: 409.
- [5] Schubauer G B, Klebanoff P S. Contributions on the mechanics of boundary-layer transition [R]. [S. l.]: NACA Technical Report, No.1289, 1956.
- [6] 张雯, 刘沛清, 郭昊, 等. 湍流转捩工程预报方法研究进展综述[J]. 实验流体力学, 2014, 28: 1.
- [7] 是勋刚, 周恒. 湍流转捩的研究[J]. 中国科学基金, 1989(3): 25.
- [8] Emmons H W. The laminar-turbulent transition in a boundary layer. I [J]. J Aeronaut Sci, 1951, 18: 490.
- [9] Dhawan S, Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion [J]. J Fluid Mech, 1958, 3: 418.
- [10] Narasimha R. The laminar-turbulent transition zone in the boundary layer [J]. Prog Aerosp Sci, 1985, 22: 29.
- [11] Libby P A. On the prediction of intermittent turbulent flows [J]. J Fluid Mech, 1975, 68: 273.
- [12] 张若凌, 乐嘉陵. 轴对称层流到湍流转捩区间速度和温度的振荡统计特性研究[J]. 实验流体力学, 2019, 33: 30.
- [13] Langtry R B, Menter F R, Likki S R, *et al.* A correlation-based transition model using local variables-part II: test cases and industrial applications [J]. J Turbomach, 2006, 3: 423.
- [14] Langtry R B, Menter F R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes [J]. AIAA J, 2009, 47: 2894.
- [15] Coupland J. Flat plate transitional boundary layers experiments [EB/OL]. [2006-11-01]. <http://cfd.me.umist.ac.uk/ercoftac/classif.html>.
- [16] 董平, 黄洪雁, 冯国泰. 零压力梯度平板边界层转捩的数值模拟[J]. 热能动力工程, 2007, 22: 586.
- [17] 董平, 颜培刚, 黄洪雁, 等. 温度梯度对平板边界层转捩影响的数值模拟[J]. 推进技术, 2008, 29: 527.
- [18] Khademi M H, Zeinolabedini H A, Mowlad, *et al.* A simple model for turbulent boundary layer momentum transfer on a flat plate [J]. Chem Eng Technol, 2010, 33: 867.
- [19] Khademi M H, Mozafari A. Integral energy equation model for heat convection to turbulent boundary layer on a flat plate [J]. Front Heat Mass Tran, 2016, 7: 1.
- [20] Lozano-Durán A, Hack M J P, Moin P. Modeling boundary-layer transition in direct and large-eddy simulations using parabolized stability equations [J]. Phys Rev Fluids, 2019, 3: 023901.
- [21] 李开勇, 赵波, 王翼鹏. 基于积分方法的外掠平板湍流温度场的解析解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 526.
- [22] 李开勇, 赵波, 王翼鹏, 等. 有吹吸速度的外掠多孔平板湍流边界层的积分方法. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 024005.
- [23] Harris J. E. Numerical solutions of equations for compressible laminar, transitional and turbulent boundary layers, and comparisons with experimental data [R]. [S. l.]: NASA Technical Report, R-368 N 71-32164, 1971.
- [24] Schlichting H. Boundary-layer theory [M]. 9th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2017.
- [25] Simon F F, Stephens C A. Modeling of the heat transfer in bypass transitional boundary-layer flows [R]. [S. l.]: NASA Technical Paper, 3170, 1991.
- [26] 陈奕, 高正红. 平板边界层转捩的仿真[J]. 计算机

仿真, 2009, 26: 77.

[27] 涂国华, 燕振国, 赵晓慧, 等. SA 和 SST 湍流模型对高超声速边界层强制转捩的适应性[J]. 航空学报, 2015, 36: 1471.

[28] 雷娟棉, 谭朝明. 基于 Transition SST 模型的高雷诺数圆柱绕流数值研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43: 207.

[29] 王补宣. 工程传热传质学: 上册[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[30] Moffat R J, Kays W M. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental heat transfer with uniform blowing and suction [J]. Int J Heat Mass Tran, 1968, 11: 1547.

引用本文格式:

中 文: 赵波, 刘建, 李开勇. 纵掠平板速度和温度边界层湍流转捩区的积分方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 034005.

英 文: Zhao B, Liu J, Li K Y. An integral method of the laminar-turbulent transition zone for momentum and thermal boundary layer flows on a flat plate [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 034005.