2022 年 1 月 四川大学学报(自然科学版) Jan. 2022
第 59 卷 第 1 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 59 No. 1

自旋为 1 的系统的量子非经典性度量

徐为成
(西南交通大学物理科学与技术学院，成都 610031)

摘 要：相干态最初在 1960 年由 Klauder 和 Sudarshan 提出. 基于此，许多经典性和非经典性的度量被提出. 1971 年 Radcliffe 提出了原子相干态，但基于原子相干态的非经典性度量研究仍然较少. 本文利用原子自旋相干态的特征提出一种度量非经典性的方法，并讨论了这种度量的若干性质，例如转动算符作用下的不变性和纯态的非经典性. 我们给出了一些计算例子，例如猫态、NOON 态和混合态. 这种度量只在自旋为 1 的系统上讨论. 这些结果对探索量子非经典性的度量和量子资源理论有一定的意义，也对实验室利用非经典性度量起到积极作用.

关键词：量子非经典性；自旋相干态；度量
中图分类号：O413.1 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.014003

Measuring nonclassicality in spin-1 state

XU Wei-Cheng
(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Coherent states were first proposed by Klauder and Sudarshan in 1960. Based on this, many classical and nonclassical measures of light have been introduced. In 1971, Radcliffe proposed atomic coherent state, but the nonclassical measures based on atomic coherent state are still seldom studies. In this paper, by using the characteristics of the atomic spin coherent states, we introduce a method to measure nonclassicality and discuss some properties of this measure. For example, the invariance under the action of rotation operator and the nonclassicality of pure state. Some computational examples, such as cat state, NOON state and mixed states are given. This measure is only discussed in the spin-1 system. These results will have certain significance for exploring the measurement of quantum nonclassicality and quantum resource theory. It will also play a positive role in utilizing nonclassicality measure in the laboratories.

Keywords: Quantum nonclassicality; Coherent states; Measure

1 引 言

在经典物理中并不存在量子态的叠加，这是量子力学独有的特征，也是出现非经典现象的原因之一. 量子纠缠就是这类非经典特征的体现. 这种非经典特征成为了量子计算和量子信息发展的基础. 为了刻画这种非经典资源，产生了量子纠缠度量，这种度量已经有不少的研究[1,2]. 量子纠缠是描述两个子系统之间的关系，对于单个系统而言，如何刻画单个系统的量子特征成为了研究热点. 2014 年，Baumgratz 等[3]发表了量子相干度量的文献，这项研究启发了许多量子相干性度量. 由不一样的物理背景和不一样的度量工具，产生了许多量子相干性度量的方式. 如 l_1 范数相干性度量[3]、保真度

收稿日期：2021-07-01
基金项目：国家自然科学基金 (11847307)
作者简介：徐为成(1991—)，男，广东深圳人，硕士研究生，主要研究领域为量子计算与量子信息. E-mail：ckigjvqdst76@163.com

相干性度量[3,4]、迹距离相干性度量[3]、相对熵相干性度量[3]和鲁棒性相干性[5]等.

量子相干性在量子生物学[6]及量子相干的动力学[7]等学科中,有很重要的用处. 这些度量定义的非相干态固定在希尔伯特空间 H 中的一组特定的正交完备基$\{|i\rangle,(i=1,2,\cdots,n)\}$,非相干态 $\delta=\sum_{i=1}^{N}\delta_i\ |\ i\rangle\langle i\ |\ (\delta_i\in[0,1],\sum_i\delta_i=1)$.

在量子物理中,"最经典"的纯态是相干态. 这些态有着最小的不确定度. 比如在量子光学中,光子相干态是玻色子湮没算符 a 的本征态,这种态是最接近经典的态,构成超完备性 $\frac{1}{\pi}\int |\ a><a\ |\ \mathrm{d}a^2=1$[8]. 这些相干态的经典混合称为经典的,否则是非经典的. 光子相干态的非经典性已被广泛研究,相对应的非经典性度量也有不少讨论[9-12],但是还没有一个被广泛认可的非经典性度量.

类似于光子相干态$\mathrm{e}^{(za^{\dagger}-z^* a)}|0>$的概念,我们可以用角动量升降算符$J_+$和降算符$J_-$来构造$\mathrm{e}^{(\mu J_+-\mu^* J_-)}|j,-j>$,称为原子相干态、角动量相干态或者 SU(2)相干态[13]. 升降算符满足$[J_+,J_-]=2J_z$,$[J_\pm,J_z]=\mp J_\pm$,在原子相干态$|n>=\mathrm{e}^{(\mu J_+-\mu^* J_-)}|j,-j>$中,$\mu$ 与 n 的关系为 $\mu=\mathrm{e}^{-i\varphi}\frac{\theta}{2}$. 原子相干态已经有许多研究,但关于原子态的非经典性度量[14-18]却很少. 2003 年 Dodonov 等人[14]发表了关于经典性和非经典性度量的研究. 2008 年, Giraud 等人[15]将光子相干态的概念引入到原子相干态中,并且介绍了经典态的重要性质和特征. 随后,该领域出现了一种用迹距离的方式来度量非经典性[16]. 文献[17]讨论了如何度量自旋为 1 的态的"量子",这种度量定义为自旋为 1 的态 ρ 到原子相干态的凸组合的希尔伯特-施密特距离. 文献[18]则利用 Wigner-Yanase 倾斜信息度量自旋为 j 的态的非经典性并讨论了非经典性和纠缠性的关系.

本文基于文献[15]提出自旋为 1 的态的非经典性度量,给出一些性质和计算例子. 利用一个与态 ρ 有关系的矩阵 Z 是否为半正定的引出一个非经典性度量. Z 的元素:

$$\begin{aligned}&Z_{ab}=W_{ab}-u_a u_b\\&W_{ab}=\mathrm{tr}\rho(J_aJ_b+J_bJ_a)-\delta_{ab}\\&u_a=\mathrm{tr}(\rho J_a)\end{aligned}\tag{1}$$

本文第二部分介绍经典的态的定义和特征,第三部分提出一个非经典性度量,第四部分为计算例子.

2　经典的态的定义和特征

在提出非经典性度量之前,先简短回顾经典态的定义和部分特征[19]. SU(2)自旋相干态也可称为原子相干态和 Bloch 相干态,是指算符 $\hat{n}\cdot\hat{J}$的本征态. $\hat{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$是一个单位向量,$\hat{J}$是无量纲的角动量算符. 原子相干态可以用态$|j,m>$展开成

$$|\ n>=\sum_{m=-j}^{+j}\left(\frac{2j}{j+m}\right)^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}|\ j,m>\tag{2}$$

原子相干态是超完备的但不是正交的$\frac{4\pi}{2j+1}\int|\ n><n\ |\ \mathrm{d}n=1_{2j+1}$,其中$1_{2j+1}$是 $2j+1$ 维的单位矩阵,$\mathrm{d}n=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 当且仅当一个密度矩阵 ρ 可以写成原子相干态的经典混合时$\rho=\sum_{i=1}^{(2j+1)^2}P_i\ |\ n><n\ |$,称这个态 ρ 是经典的,否则是非经典的[10].

一个自旋为 1 的密度矩阵 ρ 可以表示成:

$$\rho=\frac{1}{3}1_3+\frac{1}{2}u\cdot J+\frac{1}{2}\sum_{a,b=x,y,z}(W_{ab}-\frac{1}{3}\delta_{ab})\frac{J_aJ_b+J_bJ_a}{2}\tag{3}$$

其中J_a是 $j=1$ 的角动量算子,$u_a=\mathrm{tr}(\rho J_a)$,$W_{ab}=\mathrm{tr}\rho(J_aJ_b+J_bJ_a)-\delta_{ab}$,$u\in\mathbf{R}^3$,$W$ 是一个 3×3 的实对称张量. 通过文献[10],当且仅当 3×3 的实对称矩阵 Z 是半正定的,密度矩阵 ρ 是经典的,矩阵 Z 的元素$Z_{ab}=W_{ab}-u_au_b$.

3　非经典性度量

对于任何一个向量$\hat{x}\in\mathbf{R}^3$,当$\hat{x}^tZ\hat{x}\geqslant0$ 时,Z 是半正定的. 也就是$\frac{\hat{x}^t}{\sqrt{\hat{x}^t\hat{x}}}Z\frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^t\hat{x}}}\geqslant0$, $\hat{n}^tZ\hat{n}=\hat{n}^tZ'\hat{n}-1\geqslant0$. 其中$Z'=\mathrm{tr}\rho(J_aJ_b+J_bJ_a)-\mathrm{tr}(\rho J_a)\cdot\mathrm{tr}(\rho J_b)$, $\hat{n}$ 是单位向量 $(n_x,n_y,n_z)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$. 意味着当函数$\hat{n}^tZ\hat{n}(n_x,n_y,n_z)$取最小值时,$\hat{n}^tZ\hat{n}\geqslant0$, 实对称矩阵 Z 是半正定的,与 Z 相对应的密度矩阵 ρ 是经典的,否则是非经典的.

现在提出一个度量, 即:

$$N(\rho)=1-\min\hat{n}^tZ'\hat{n}\tag{4}$$

经过计算，

$$\hat{n}^t Z' \hat{n} = 2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 - \mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})\mathrm{tr}(\hat{n}\cdot\hat{J}) \tag{5}$$

性质 a：由文献[15]提供的经典的态的特征可知，当且仅当 $N(\rho)=1-\min \hat{n}^t Z' \hat{n}>0$ 时，Z 矩阵不是半正定的，是非经典的，否则是经典的.

性质 b：转动算符作用下的不变性 $N(e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\cdot\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})=N(\rho)$，$e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}$ 是一个酉算子；对于任意 $\theta\in\mathbf{R}$ 和任意向量 $\hat{n}\in S^2$，$e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}$ 是以 $\hat{n}$ 为轴在 b 布洛赫球面上旋转 θ 角的一个算符.

证明：

$$UU^\dagger = e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}} = I$$

$$\begin{aligned}
&N(e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}) = N(\rho) = \\
&\quad 2\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 - \\
&\quad (\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}J}(\hat{n}\cdot\hat{J}))^2 = \\
&\quad 2\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}(e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\hat{n}\cdot\hat{J}e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})^2 - \\
&\quad (\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\hat{n}\cdot\hat{J}e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})^2 = \\
&\quad 2\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}} - \\
&\quad (\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\hat{n}\cdot\hat{J}e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})^2 = \\
&\quad 2\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}} - \\
&\quad (\mathrm{tr}\, e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho\hat{n}\cdot\hat{J}e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})^2 = \\
&\quad 2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 - (\mathrm{tr}\rho\hat{n}\cdot\hat{J})^2
\end{aligned} \tag{6}$$

证毕.

性质 c：纯态的非经典性 $N(|\Psi\rangle\langle\Psi|)\geqslant N(|n\rangle\langle n|)=0$.

通过简单运算知 $N(|1,1\rangle\langle 1,1|)=0$，由性质 b 得

$$\begin{aligned}
&N(|n\rangle\langle n|) = \\
&\quad N(e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}|1,1\rangle\langle 1,1|e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}) = \\
&\quad N(|1,1\rangle\langle 1,1|) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

通过文献[15]知，纯态只有是自旋相干态时才能称为经典的，$\rho=\sum_{i=1}^{(2j+1)^2} P_i|n\rangle\langle n|$，当且仅当 ρ 对应的矩阵 Z 是半正定的，即度量 $N(\rho)\leqslant 0$，有，$N(|\Psi\rangle\langle\Psi|)\geqslant N(|n\rangle\langle n|)=0$.

证毕.

4　计算例子

例子 A：Dicke 态 $\rho=|1,0\rangle\langle 1,0|$，$\hat{n}=(n_x, n_y, n_z)$.

$\hat{J}=(\hat{J}_x,\hat{J}_y,\hat{J}_z)$ 选第一个基矢为 $|1,1\rangle$，选第二个基矢为 $|1,0\rangle$，选第三个基矢为 $|1,-1\rangle$，有：

$$\hat{J}_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&N(\rho)=1-\min\hat{n}^t Z'\hat{n} = \\
&\quad 1-\min(2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2-\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})\mathrm{tr}(\hat{n}\cdot\hat{J})) = \\
&\quad 1-\min(2n_x{}^2+2n_y{}^2)\text{，选 }\hat{n}=(0,0,1)=1
\end{aligned} \tag{9}$$

所以对于 Dicke 态 $\rho=|1,0\rangle\langle 1,0|$ 是非经典的.

例子 B：猫态 $|\mathrm{cat}_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle+|1,-1\rangle)$.

$$\begin{aligned}
&N(\rho)=1-\min\hat{n}^t Z'\hat{n} = \\
&\quad 1-\min(2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2-\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})\mathrm{tr}(\hat{n}\cdot\hat{J})) = \\
&\quad 1-\min(2n_x{}^2+2n_z{}^2)\text{，选 }\hat{n}=(0,1,0)=1
\end{aligned} \tag{10}$$

用双模波色算符可有以下表示，$J_+=a^\dagger b$，$J_-=ab^\dagger$，$J_z=\frac{1}{2}(a^\dagger a,-b^\dagger b)$，且 $[a,a^\dagger]=1$，$[b,b^\dagger]=1$，态 $|j,m\rangle$ 在双模福克空间可表示为：

$$\begin{aligned}
&|j,m\rangle=\frac{a^{\dagger j+m}b^{\dagger j-m}}{\sqrt{(j+m)!\ (j-m)!}}|00\rangle = \\
&\quad |j+m\rangle\otimes|j-m\rangle,(m=-j,\cdots,j) \\
&\quad |j,-j\rangle=|0\rangle\otimes|2j\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

考虑最大纠缠态

$|NOON\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|2j\rangle+|2j\rangle|0\rangle)$，当 $j=1$，$|NOON\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|2\rangle+|2\rangle|0\rangle)$，意味着 $N(|NOON\rangle\langle NOON|)=N(|\mathrm{cat}_1\rangle\langle\mathrm{cat}_1|)=1$.

例子 C：完全混合态 $\rho=\frac{1}{3}I$.

$$\begin{aligned}
&N(\rho)=1-\min\hat{n}^t Z'\hat{n} = \\
&\quad 1-\min(2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2-\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})\mathrm{tr}(\hat{n}\cdot\hat{J})) = \\
&\quad 1-\min\frac{4}{3}(n_x{}^2+n_y{}^2+n_z{}^2)=-\frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{12}$$

意味着完全混合态对应的矩阵 Z 是半正定的，所以完全混合态是经典的，这也与文献[15]一致.

例子 D：混合态 $\rho=P|1,0\rangle\langle 1,0|+(1-P)\cdot\frac{1}{3}I$.

$$N(\rho)=1-\min\hat{n}^t Z'\hat{n}=$$

$$1-\min(2\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})^2-\mathrm{tr}\rho(\hat{n}\cdot\hat{J})\mathrm{tr}(\hat{n}\cdot\hat{J}))=P(1-\min(2n_x^2+2n_z^2))-(1-P)(1-\frac{4}{3}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)),$$

选

$$\hat{n}=(0,1,0)=P+(1-P)\left(-\frac{1}{3}\right) \tag{13}$$

当 $N(\rho)>0, P+(1-P)\left(-\frac{1}{3}\right)>0$，$P>\frac{1}{4}$时，$\rho$ 是非经典的.

5 结 论

本文利用了与经典的态的特征有关的实对称矩阵 Z 的特征,提出了一个满足基本要求的非经典性度量,即当且仅当 $N(\rho)=1-\min \hat{n}^t Z' \hat{n}>0$ 时,一个自旋为 1 的系统的态 ρ 是非经典的. 本文给出了度量的基本性质,如转动算符作用下的不变性 $N(e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}\rho e^{i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}})=N(\rho)$ 和纯态的非经典性 $N(|\Psi><\Psi|)\geqslant N(|n><n|)=0$. 本文计算了一些重要例子,例如猫态和最大纠缠态，寻找相干态、非经典性和纠缠的联系. 完全混合态 $\rho=\frac{1}{3}I$ 和 Dicke 态 $\rho=|1,0><1,0|$ 的非经典性,丰富了量子资源理论. 进一步考虑非经典性度量具有一定的物理意义,可用于寻找在实验中能应用的场景.

参考文献:

[1] Plenio M B, Virmani S. An introduction to entanglement measures [J]. Quant Inf Comput, 2007, 7: 1.

[2] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, *et al*. Quantum entanglement [J]. Rev Mod Phys, 2009, 81: 865.

[3] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B. Quantifying coherence [J]. Phys Rev Lett, 2014, 113: 140401.

[4] Shao L H, Xi Z, Fan H, *et al*. The fidelity and trace norm distances for quantifying coherence [J]. Phys Rev A, 2014, 91: 042120.

[5] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, *et al*. Robustness of coherence: an operational and observable measure of quantum coherence [J]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 150502.

[6] Huelgaa S F, Plenio M B. Vibrations, quanta and biology [J]. Contemp Phys, 2013, 54: 181.

[7] Mani A, Karimipour V. Cohering and decohering power of quantum channels [J]. Phys Rev A, 2015, 92: 032331.

[8] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R. Coherent states: theory and some applications [J]. Rev Mod Phys, 1990, 62: 867.

[9] Hillery M. Nonclassical distance in quantum optics [J]. Phys Rev A, 1987, 35: 725.

[10] Marian P, Marian T A, Scutaru H. Quantifying nonclassicality of one-mode gaussian states of the radiation field [J]. Phys Rev Lett, 2002, 88: 153601.

[11] Asboth J K, Calsamiglia J, Ritsch H. Computable measure of nonclassicality for light [J]. Phys Rev Lett, 2005, 94: 173602.

[12] Gehrke C, Sperling J, Vogel W. Quantification of nonclassicality [J]. Phys Rev A, 2012, 86: 052118.

[13] Perelomov A M. Coherent states for arbitrary Lie group [J]. Commun Math Phys, 1972, 26: 222.

[14] Dodonov V V, Renó M B. Classicality and anticlassicality measures of pure and mixed quantum states [J]. Phys Lett A, 2003, 308: 249.

[15] Giraud O, Braun P, Braun D. Classicality of spin states [J]. Phys Rev A, 2008, 78: 042112.

[16] Giraud O, Braun P A, Braun D. Quantifying quantumness and the quest for queens of quantum [J]. New J Phys, 2010, 12: 063005.

[17] Bohnet-Waldraff F, Braun D, Giraud O. Quantumness of spin-1 states [J]. Phys Rev A, 2016, 93: 012104.

[18] Dai H, Luo S. Information-theoretic approach to atomic spin nonclassicality [J]. Phys Rev A, 2019, 100: 062114.

[19] Agarwal G S. Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles, and generalized phase-space distributions [J]. Phys Rev A, 1981, 24: 2889.

引用本文格式:

中 文: 徐为成. 自旋为 1 的系统的量子非经典性度量[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 014003.

英 文: Xu W C. Measuring nonclassicality in spin-1 state [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 014003.