

# H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距对单阶谐波增强的影响

徐翠艳, 冯立强

(辽宁工业大学理学院, 锦州 121001)

**摘要:** 本文理论研究了在特定激光波形下 H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距对单阶谐波增强的影响。研究结果表明, 当特定激光波形驱动原子时, 谐波光谱可以呈现单阶谐波强度增强; 但是, 当用相同激光波形驱动 H<sub>2</sub><sup>+</sup>时, 单阶谐波强度增强的现象与 H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距有关。具体来说, 当 H<sub>2</sub><sup>+</sup>在平衡位置时, H<sub>2</sub><sup>+</sup>谐波光谱呈现单阶谐波增强现象; 当 H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距在 3~7 a. u. 变化时, 单阶谐波增强现象消失; 当 H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距大于 8 a. u. 时, 单阶谐波增强会再次出现。理论分析表明, 多通道谐波干涉是导致 H<sub>2</sub><sup>+</sup>单阶谐波强度变化的原因。

**关键词:** 高次谐波; 核间距; 单阶谐波强度; 多通道谐波干涉

**中图分类号:** O562.4      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.034004

## Internuclear distance effect of H<sub>2</sub><sup>+</sup> on the single-order harmonic enhancement

XU Cui-Yan, FENG Li-Qiang

(College of Science, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

**Abstract:** The effect of internuclear distance of H<sub>2</sub><sup>+</sup> on the single-order harmonic enhancement driven by the specific laser waveform has been studied theoretically. The results show that when the atom is driven by the specific laser waveform, the single-order harmonic enhancement can be found on the harmonic spectrum. However, when H<sub>2</sub><sup>+</sup> is driven by the same waveform, the single-order harmonic enhancement is related to the internuclear distance of H<sub>2</sub><sup>+</sup>. Particularly, when H<sub>2</sub><sup>+</sup> is at its equilibrium position, the single-order harmonic enhancement can be found on the harmonic spectrum. When the internuclear distance of H<sub>2</sub><sup>+</sup> changes from 3 a. u. to 7 a. u., the single-order harmonic enhancement disappears. When the internuclear distance of H<sub>2</sub><sup>+</sup> is greater than 8 a. u., the single-order harmonic enhancement will reappear. Theoretical analyses show that the multichannel harmonic interference is responsible for the change of the single-order harmonic intensity.

**Keywords:** High-order harmonic generation; Internuclear distance; Single-order harmonic intensity; Multichannel harmonic interference

## 1 引言

当原子、分子与强激光相互作用后, 被电离的电子可以在激光场中加速, 并在激光反向时与原子核发生再碰撞, 进而辐射出能量为激光场倍数

的高能量光子, 这一现象被称为高次谐波<sup>[1]</sup>。目前, 高次谐波发射过程可以简单理解为“电离-加速-回碰”三个过程, 即称为“三步模型”<sup>[2]</sup>。

高次谐波的应用主要有三个方面: 第一, 可以用于探测原子和分子的内部结构<sup>[3]</sup>; 第二, 可以用

收稿日期: 2021-09-25

基金项目: 辽宁省自然科学基金面上项目(2019-MS-167); 辽宁省教育厅青年项目(LJKQZ2021138)

作者简介: 徐翠艳(1975—), 女, 辽宁锦州人, 硕士, 副教授, 主要从事强激光场与物质相互作用的研究。

通讯作者: 冯立强, E-mail: lqfeng1101@126.com

于产生孤立阿秒脉冲<sup>[4]</sup>;第三, 可以用于获得能量为基频场数倍的高能光源<sup>[5]</sup>. 其中, 利用高次谐波获得阿秒量级光源以及高频光源(即应用二和应用三)更是开启了阿秒科学的大门. 高次谐波获得阿秒光源主要是通过叠加谐波光谱平台区. 因此, 研究人员提出多种方法获得超宽连续平台区. 例如: 组合场方法<sup>[6]</sup>, 喳啾场方法<sup>[7]</sup>, 极化门方法<sup>[8]</sup>, 非均匀场方法<sup>[9]</sup>. 高次谐波获得高频光源主要是通过增强某单阶谐波强度来获得. 例如: Liu 等<sup>[10]</sup>通过调控嗔啾场脉宽获得了波长可调的单阶谐波, 其强度可增强 15 倍.

对于获得单阶谐波光源的研究, 目前只集中在原子体系. 众所周知, 分子谐波光谱与原子相比具有更为复杂的结构. 例如: 电荷共振增强电离现象<sup>[11]</sup>. 因此, 研究分子谐波光谱中单阶谐波增强的现象具有很重要的意义. 鉴于此, 本文以 H<sub>2</sub><sup>+</sup>为模型, 研究了 H<sub>2</sub><sup>+</sup>核间距对单阶谐波强度的影响, 并通过谐波辐射时频分析给出了 H<sub>2</sub><sup>+</sup>谐波光谱中单阶谐波强度随核间距变化的原因.

## 2 计算方法

本文双色激光场 E(t)形式为,

$$\begin{aligned} E(t) = & E_1 \exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{t}{\tau_1} \right)^2 \right] \cos(\omega_1 t + \\ & c_1 t^2) + E_2 \exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{t}{\tau_2} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cos(\omega_2 t + c_2 t^2) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, E<sub>1,2</sub> 为激光振幅; ω<sub>1</sub> = 0.028 a. u. (1600 nm) 为基频场频率; ω<sub>2</sub> = 0.058 a. u. (800 nm) 为其倍频场; τ<sub>1</sub> = 20 fs, τ<sub>2</sub> = 10 fs 为双色场半高全宽; c<sub>1</sub> = -6 × 10<sup>-4</sup>, c<sub>2</sub> = -1 × 10<sup>-4</sup> 为本文选取嗔啾参数; 激光强度都为 2.0 × 10<sup>14</sup> W/cm<sup>2</sup>.

H<sub>2</sub><sup>+</sup>发射高次谐波可由求解外场下含时薛定谔方程来研究,

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + x E(t) \right] \psi(x, t) \quad (2)$$

其中, V(x) =  $\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{1+(x+R/2)^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1+(x-R/2)^2}}$  为 H<sub>2</sub><sup>+</sup>势能, R 为核间距离, x 为电子坐标.

通过傅里叶变化可得高次谐波谱图 S(ω)为,

$$S(\omega) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \quad (3)$$

$$\text{其中 } a(t) = -\langle \psi(x, t) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x} + E(t) \right| \psi(x, t) \rangle.$$

## 3 结果与讨论

首先, 基于前期研究基础<sup>[10]</sup>可知, 在本文选取激光波形下, He 原子谐波光谱可以呈现 620 次谐波的单阶谐波强度的增强, 如图 1 所示. 通过分析谐波辐射过程, 图 2 给出了 620 次谐波强度增强的原因. 结合三步模型和激光波形图可知, 当电子在 A 时刻电离后(见图 2a), 其可在后续激光作用下加速, 并在 1 时刻附近与原子核再次碰撞, 进而发射谐波能量峰 A<sub>1</sub>(见图 2b). 但是, 由于 C 时刻激光振幅很弱(见图 2a), 电子可以快速通过 C 时刻在后续负向激光波形中获得第二次加速, 并且在 2 时刻附近与原子核再次碰撞, 进而发射谐波能量峰 A<sub>2</sub>(见图 2b). 同理, D 时刻激光振幅依然很弱(见图 2a), 电子可以通过 D 时刻并在后续激光作用下获得第三次加速, 进而发射谐波能量峰 A<sub>3</sub>(见图 2b). 这里, 由于 C 和 D 时刻正向波包的存在, 电子在其附近会呈现先减速再加速的情况, 因此导致谐波辐射能量峰上呈现折叠区域. 对于 C 时刻, 其对应能量峰光子能量较低, 这里不进行讨论. 对于 D 时刻, 其折叠区域大致在 620 次谐波附近. 通过观察谐波光谱贡献可知, 当谐波能量大于 450 阶谐波时, 光谱区域由能量峰 A<sub>2</sub> 和 A<sub>3</sub> 贡献产生. 并且, 当光子能量在 450 次谐波到 620 谐波区间时, 谐波光谱由 A<sub>2</sub> 贡献产生; 当光子能量在 620 谐波以上时, 谐波光谱由 A<sub>3</sub> 贡献产生. 只有在 620 次谐波时, 光谱是由 A<sub>2</sub>、A<sub>3</sub> 和折叠区域产生, 因此, 620 次谐波强度要大于其周边谐波的强度. 这就是 620 次谐波强度增强的原因. 深入分析一下, 电子除了在 A 时刻附近电离外, 还可以在 B 时刻附近电离(见图 2a), 同样由于 C 和 D 时刻较弱的激光振幅, 电子可以在 1、2、3 时刻与原子核发生碰撞, 进而发生谐波能量峰 B<sub>1~3</sub>(见图 2b). 但是, 能量峰 B<sub>1~3</sub> 的强度与 A<sub>1~3</sub> 的强度弱很多, 其在谐波光谱上贡献微乎其微, 因此, 在原子谐波辐射过程中没有进行讨论. 但是, 在分子谐波辐射过程中路径 B 将起到很重要的作用(将在下面进行分析).

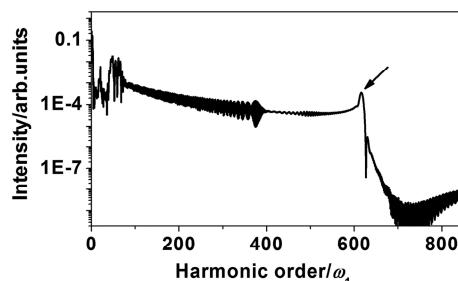


图1 双色啁啾场下 He 原子谐波光谱

Fig. 1 Harmonic spectra of He atom driven by two-color chirped pulse

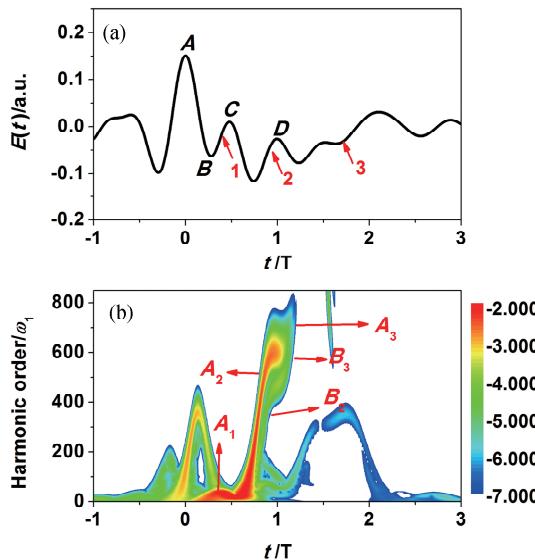


图2 (a) 双色啁啾场激光波形; (b) He 原子谐波辐射时频分析

Fig. 2 (a) Laser profiles of two-color chirped pulse;  
(b) the time-frequency analyses of harmonic emission from He atom

图3给出了在相同激光参数下,  $H_2^+$ 不同核间距对谐波光谱的影响。由图3可知, 当 $H_2^+$ 在平衡位置时( $R=2$  a. u.),  $H_2^+$ 谐波光谱截止区域可呈现单阶谐波增强现象。当 $H_2^+$ 核间距在 $3\sim 7$  a. u.变化时(例如: $R=4$  a. u. 和  $R=6$  a. u.), 单阶谐波增强现象消失。当 $H_2^+$ 核间距大于 $R=8$  a. u.时, 谐波截止区域的单阶谐波增强会再次出现。

为了说明 $H_2^+$ 核间距对单阶谐波强度的影响, 图4给出了在相同激光波形驱动下 $H_2^+$ 核间距为2、4和8 a. u.时的谐波辐射分析图。因为激光波形没变(见图2a和图4a), 因此, He原子核 $H_2^+$ 都在相同的时刻发生电离-加速和回碰, 进而可以形成谐波辐射能量峰 $A_{1\sim 3}$ 和 $B_{2,3}$ (这里, 由于能量峰 $B_1$ 辐射光子能量太低, 因此不予讨论)。分析 $R=2$  a. u.情况, 能量峰 $B_{2,3}$ 强度比能量峰 $A_{1\sim 3}$ 强度低2个数量级左右。因此, 谐波光谱主要由能量峰

$A_{1\sim 3}$ 贡献产生, 如图4b所示。也就是说, 在 $R=2$  a. u.时 $H_2^+$ 谐波辐射过程与He原子类似, 因此

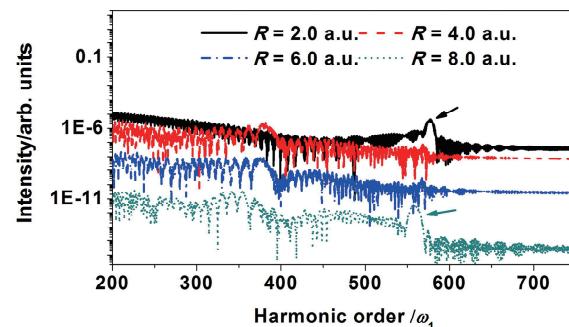
图3 双色啁啾场下  $H_2^+$  不同核间距下谐波光谱

Fig. 3 Harmonic spectra of  $H_2^+$  with different internuclear distances driven by two-color chirped pulse

$A_2$ 和 $A_3$ 之间的能量折叠区域会在谐波光谱上产生单阶谐波增强的现象。分析 $R=4$  a. u.情况, 谐波辐射能量峰 $A_{1\sim 3}$ 和 $B_{2,3}$ 强度明显增强, 并且 $B_{2,3}$ 强度与 $A_{1\sim 3}$ 强度差不到一个数量级, 如图4c所示。但是, 由于能量峰 $A_{1\sim 3}$ 和 $B_{2,3}$ 不在同一时间发生, 即电离-加速-回碰路径不同。因此, 包含折叠区能量范围内的谐波其强度取决于能量峰 $A_{1\sim 3}$ 和 $B_{2,3}$ 的干涉结果。这里, 由于不同的谐波辐射路径, 在谐波辐射过程中会产生干涉减小现象, 因此导致谐波光谱截止区域单阶谐波增强现象的消失。进一步分析 $H_2^+$ 电离过程可知, 导致 $H_2^+$ 谐波能量峰在 $R=4$  a. u.时增强的原因在于:在此核间距下,  $H_2^+$ 会发生电荷共振增强电离, 进而增大电离几率<sup>[11]</sup>, 这是谐波能量峰增强的原因。分析 $R=8$  a. u.情况, 谐波辐射能量峰 $A_{1\sim 3}$ 和 $B_{2,3}$ 强度与 $R=2$  a. u.情况相比有所增强, 但是与 $R=4$  a. u.情况相比又有所减弱, 如图4d所示。尤其对于能量峰 $B_{2,3}$ , 其强度与能量峰 $A_{1\sim 3}$ 相比有近一个数量级的差距。因此, 在谐波光谱贡献中, 尤其是 $A_{1\sim 3}$ 的折叠区域, 能量峰 $A_{1\sim 3}$ 再一次起到主要作用。分析 $H_2^+$ 电离过程可知, 在 $R=8$  a. u.时,  $H_2^+$ 依然会发生电荷共振增强电离现象。因此, 增大的电离几率依然会对谐波能量峰起到增强作用。但是, 谐波强度不仅取决于电离过程, 其还与回碰过程有关。但是当 $H_2^+$ 核间距增大到一定距离时(例如 $R>8$  a. u.), 电子与H核碰撞的几率会减小, 因此导致谐波能量峰强度的下降。这是导致图中能量峰强度大于 $R=2$  a. u.情况并小于 $R=4$  a. u.情况的原因。

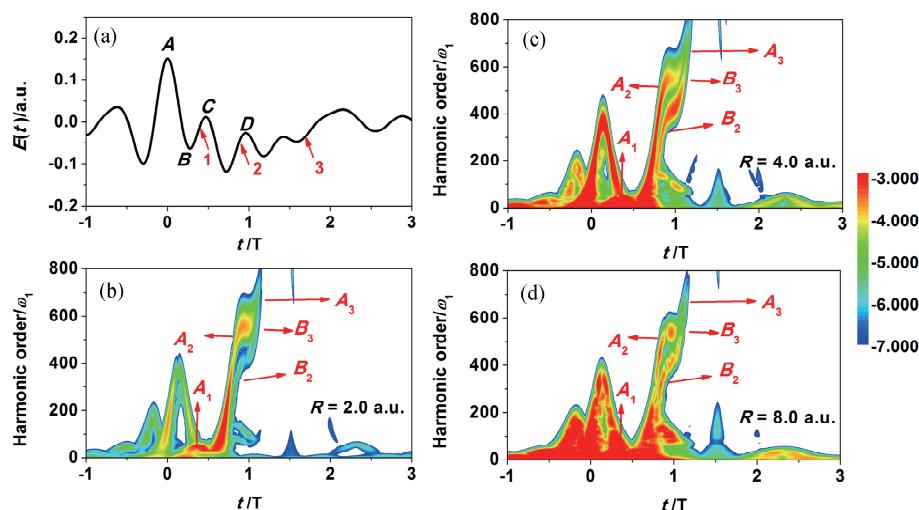


图 4 (a) 双色啁啾场激光波形;  $\text{H}_2^+$  谐波辐射时频分析:(b)  $R=2 \text{ a.u.}$ ; (c)  $R=4 \text{ a.u.}$ ; (d)  $R=8 \text{ a.u.}$

Fig. 4 (a) Laser profiles of two-color chirped pulse. The time-frequency analyses of harmonic emission from  $\text{H}_2^+$  with internuclear distances: (b)  $R=2 \text{ a.u.}$ ; (c)  $R=4 \text{ a.u.}$ ; (d)  $R=8 \text{ a.u.}$

## 4 结 论

本文采用  $\text{H}_2^+$  为模型, 研究了  $\text{H}_2^+$  核间距对单阶谐波强度的影响。结果表明, 当  $\text{H}_2^+$  核间距为 2 a.u. 时,  $\text{H}_2^+$  谐波光谱截止区域单阶谐波强度被增强。当  $\text{H}_2^+$  核间距在 3~7 a.u. 变化时,  $\text{H}_2^+$  谐波光谱截止区域无单阶谐波增强的现象。当  $\text{H}_2^+$  核间距大于 8 a.u. 时,  $\text{H}_2^+$  谐波光谱截止区域单阶谐波强度会再次被增强。谐波时频分析过程指出,  $\text{H}_2^+$  单阶谐波强度随核间距变化是多通道谐波辐射能量峰干涉所引起的。

## 参考文献:

- [1] Krausz F, Ivanov M. Attosecond physics [J]. Rev Mod Phys, 2009, 81: 163.
- [2] Corkum P B. Plasma perspective on strong field multiphoton ionization [J]. Phys Rev Lett, 1993, 71: 1994.
- [3] 冯立强, 刘航, 李义. 利用啁啾激光调制分子谐波信号[J]. 原子与分子物理学报, 2019, 36: 268.
- [4] 王志斌, 焦志宏, 周效信. 三色圆偏振激光组合脉冲驱动氦原子产生椭圆偏振的阿秒脉冲[J]. 原子与分子物理学报, 2020, 37: 95.
- [5] Li Y, Feng L Q, Qiao Y. Selective enhancement of single-order and two-order harmonics from He atom via two-color and three-color laser fields [J]. Chem Phys, 2019, 527: 110497.
- [6] 冯立强. 非均匀组合场驱动 He 原子获得高强度 keV 阿秒脉冲[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 130.
- [7] Feng L Q, Chu T S. Generation of an isolated sub-40-as pulse using two-color laser pulses: combined chirp effects [J]. Phys Rev A, 2011, 84: 053853.
- [8] 冯立强, 刘航. 利用蝴蝶型纳米结构下的极化门方案输出单个阿秒脉冲[J]. 原子与分子物理学报, 2019, 36: 82.
- [9] Feng L Q. Molecular harmonic extension and enhancement from  $\text{H}_2^+$  ions in the presence of spatially inhomogeneous fields [J]. Phys Rev A, 2015, 92: 053832.
- [10] 刘辉, 冯立强. 激光波形优化产生水窗区单阶谐波 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 044002.
- [11] Liu H, Li W L, Feng L Q. Chirp control of multi-photon resonance ionization and charge-resonance enhanced ionization on molecular harmonic generation [J]. Chem Phys Lett, 2017, 676: 118.

## 引用本文格式:

- 中 文: 徐翠艳, 冯立强.  $\text{H}_2^+$  核间距对单阶谐波增强的影响[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 034004.  
 英 文: Xu C Y, Feng L Q. Internuclear distance effect of  $\text{H}_2^+$  on the single-order harmonic enhancement [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 034004.