

基于非对称双稳系统的随机共振及应用

陈 杨, 张建刚

(兰州交通大学数理学院, 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了高斯色噪声驱动下非对称双稳随机共振 (Asymmetric Bistable Stochastic Resonance, ABSR) 系统的信噪比以及平均首次通过时间的问题. 我们运用统一色噪近似和两态模型理论, 推导出平均首次通过时间和信噪比的公式; 讨论了各参数对信噪比和平均首次通过时间的影响, 并对参数进行了优化. 研究发现, 随机共振是噪声强度和势阱非对称性的非单调函数, 在两个不同方向上, 同一参数对平均首次通过时间的影响不同. 通过仿真与实验证明了 ABSR 系统在轴承故障诊断中具有明显优势.

关键词: 非对称双稳系统; 信噪比; 平均首次通过时间; 随机共振; 轴承故障诊断

中图分类号: O324 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.044002

Stochastic resonance based on asymmetric bistable systems and its applications

CHEN Yang, ZHANG Jian-Gang

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The signal-to-noise ratio and mean first passage time of asymmetric bistable stochastic resonance (ABSR) system driven by Gaussian colored noise are studied. Based on the unified color noise approximation and two-state model theory, the formulas of mean first passage time and signal-to-noise ratio are derived. The influence of various parameters on signal-to-noise ratio and mean first passage time are discussed, and the parameters are optimized. It is found that stochastic resonance is a non-monotonic function of noise intensity and potential well asymmetry, and the same parameter has different effects on the mean first passage time in two different directions. Simulation and experiment prove that ABSR system has obvious advantages in bearing fault diagnosis.

Keywords: Asymmetric bistable system; Signal-to-noise ratio; Mean first passage time; Stochastic resonance; Bearing fault diagnosis

1 引 言

随机共振最初是由 Benzi 等人^[1]提出用于解释地球古代气候的大振幅周期性变化现象. 此后随机共振及其相关问题引发了各界研究者的关注. 随机共振是由噪声、弱周期信号和非线性环境相互作用引起的现象. 然而噪声并不总是破坏性的, 相

反, 噪声和非线性系统的作用有时也会产生建设性的结果. 例如, 随机共振就是由噪声诱导的弱信号放大产生的, 它将部分噪声能量转化为信号能量, 达到增强系统输出响应的目的, 从而提高了信噪比. 通过随机共振处理, 微弱信号的幅值、能量等被提高, 更便于故障的检测. 并且随机共振方法不需要进行滤除噪声的操作, 有用信号也不会被削

收稿日期: 2022-01-05

基金项目: 国家自然科学基金 (61863022, 11962012)

作者简介: 陈杨(1996—), 男, 江苏人, 硕士研究生, 主要研究方向为随机共振. E-mail: cy0801na@163.com

通讯作者: 张建刚. E-mail: zhangjg7715776@126.com

弱,具有很高的理论和实际研究价值. 噪声诱导的随机共振已经被广泛运用于生物^[2-5]、物理^[6-9]、化学^[10-12]、量子力学^[13-15]和激光^[16-18]等领域.

Fauve 和 Heslot^[19]首次通过观察 Schmidt 触发电路系统的双稳态输出特性,证实了随机共振现象的存在. 随后,人们对随机非线性动力学行为进行了广泛研究,主要集中于对称双稳系统性质的研究. 然而大多数非线性系统中势函数的对称性无法保证,因此,研究非对称势阱的随机动力学特性至关重要. 目前,在噪声驱动下的非对称双稳系统的研究收获颇丰. 例如, Yang 等^[20]研究了复杂噪声环境下的时滞非对称系统,发现在加性和乘性 α 稳定噪声共同激励或单独加性 α 稳定噪声激励下,调节参数均可诱导随机共振现象. Zhou 等^[21]研究了周期混合信号和噪声联合激励下的非对称双稳系统,发现对于基频和高阶谐频情形下均出现随机共振,并且高阶谐频存在抑制现象.

运用随机共振原理进行实际应用是近 10 年来的研究热点,而过去大部分工作是高斯白噪声激励下经典双稳系统的理论研究,及其各方面的应用. 本文主要研究了高斯色噪声激励下非对称双稳系统的动力学复杂性,研究结果表明,在非对称双稳系统相较于对称双稳系统更有利实现对随机共振的控制,其应用于轴承故障诊断方面的性能相较于对称双稳系统更为可观. 本文结构安排如下:第 2 节描述了高斯色噪声激励下的非对称双稳系统,计算出了平均首次通过时间和信噪比的表达式,第 3 节分析了各个参数,如噪声强度、非对称系数、信号的幅值和频率等分别对信噪比的影响,以及非对称双稳系统的两个不同方向的平均首次通过时间与噪声强度、非对称系数、噪声关联时间之间关系,第 4 节对信噪比参数运用自适应粒子群优化算法 (APSO) 进行了优化,运用仿真信号进行模拟分析,并采用了实际轴承数据进行了实验验证,第 5 节对本文作出总结.

2 模 型

考虑一个高斯色噪声和弱周期信号共同激励下的非对称双稳系统,其模型可由郎之万方程表示为:

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + A\cos\Omega t + \xi(t),$$

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + rx \quad (1)$$

其中, r 代表势阱的非对称性; $A\cos\Omega t$ 是一个弱余弦信号; A 代表信号的幅值; Ω 代表信号的频率; $\xi(t)$ 表示具有噪声强度 Q 和关联时间 τ 的 Ornstein-Uhlenbeck 过程; 势函数 $U(x)$ 在 $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < r < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 的条件下表示一个非对称双稳系统. $U(x)$ 具有两个稳定点 x_1, x_2 和一个不稳定点 x_{un} , 即

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right]$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right]$$

$$x_{un} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right] \quad (2)$$

图 1 给出了势函数 $U(x)$ 随着不同非对称系数 r 的关系曲线. 从图 1 可以看出, 当 $r=0$ 时, 势函数是对称的, 即为双稳的; 当 $r>0$ 时, 随着 r 的增大, 系统势函数的不对称性愈发明显, 左势阱的势垒增大, 且势阱变得更深, 右势阱的势垒减小, 且势阱变得更浅.

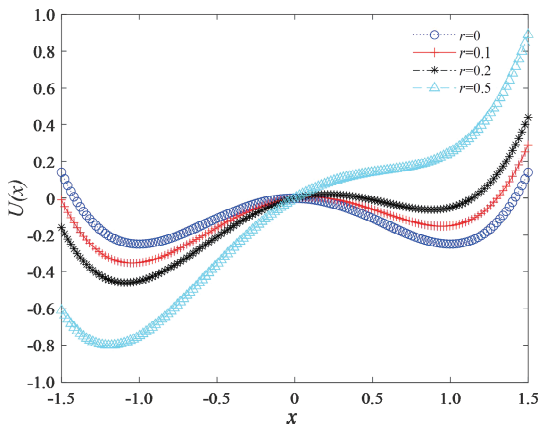


图 1 势函数 $U(x)$ 随 r 的关系曲线

Fig. 1 The relation curve of potential function $U(x)$ with r

接下来, 我们介绍信噪比和平均首次通过时间的求解过程, 以及各个参数的变化对它们的影响. 由于高斯色噪声是非马尔可夫过程, 所以无法直接获得系统相应的解析解, 因此运用统一色噪声近似理论来推导 FPK 方程. 首先, 我们运用统一色噪声近似理论将原系统化为:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)n(t) = \frac{m(x)}{c(\tau, x)} + \frac{\sqrt{Q}}{c(\tau, x)}n(t) \quad (3)$$

其中, $m(x) = x - x^3 - r + A\cos\Omega t$; $c(\tau, x) = 1 - \tau(1 - 3x^2)$; τ 为噪声相关时间; $n(t)$ 为高斯白噪

声. $n(t)$ 的统计性质表示为:

$$\langle n(t) \rangle = 0$$

$$\langle n(t)n(t') \rangle = 2\delta(t-t')$$

从而得到 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x)P(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x)P(x,t)] \quad (4)$$

其中, $A(x) = f(x) + g(x) \frac{dg(x)}{dx}$; $B(x) = g^2(x)$. 即

$$A(x) = \frac{m(x)}{c(\tau, x)} + \frac{QC'(\tau, x)}{c^3(\tau, x)}, B(x) = \frac{Q}{c^2(\tau, x)}.$$

求解 Fokker-Planck 方程, 可以得到稳态概率密度函数表达式:

$$P_{st} = N \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \left[-\int m(x)c(\tau, x) dx + \frac{Q}{2} \ln(B(x)) \right] \right\} \quad (5)$$

N 为归一化常数. 根据稳态概率密度函数表达式,

广义势函数 $\tilde{U}(x)$ 表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & \frac{\tau}{2}x^6 + \left(\frac{1}{4} - \tau\right)x^4 + (\tau r - \tau A \cos \Omega t)x^3 + \\ & \frac{\tau-1}{2}x^2 + [(\tau-1)(A \cos \Omega t - r)]x + \\ & \frac{Q}{2}[\ln Q - 2\ln(1-\tau+3\tau x^2)] \end{aligned} \quad (6)$$

利用平均首次通过时间(MFPT)的定义和最速下降法^[22], 可以得到非对称双稳系统的两个不同方向的平均首次通过时间的表达式.

$$\begin{aligned} \text{MFPT} \approx & 2\pi [|U''(x_s)U''(x_{un})|]^{-\frac{1}{2}} \\ & \exp \left\{ \frac{1}{Q} [\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_s)] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 x_s 表示 x_1 或 x_2 , 从而可以得到粒子分别从 x_1 和

x_2 所在势阱逃逸的速率 $W_{\pm}$ 的表达式.

$$\begin{aligned} W_{\pm} = & \frac{[|U''(x_s)U''(x_{un})|]^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \cdot \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{Q} [\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_s)] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

根据两态模型理论^[23], 可以得到信噪比(SNR)的表达式.

$$\text{SNR} = \frac{\pi A^2 \mu^2 (\lambda^2 + \Omega^2)}{2\lambda (2\lambda^2 + 2\Omega^2 - A^2 \mu^2)} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} l = & A \cos \Omega t, \\ \lambda = & 2 W_{\pm} |_{l=0} = \frac{[| (3x_1^2 - 1)(3x_2^2 - 1) |]^{\frac{1}{2}}}{\pi} \cdot \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \left[\frac{1}{2} \tau (x_{un}^6 - x_1^6) + \left(\frac{1}{4} - \tau \right) \cdot \right. \right. \\ & (x_{un}^4 - x_1^4) + \tau r (x_{un}^3 - x_1^3) + \frac{\tau-1}{2} (x_{un}^2 - x_1^2) - \\ & r(\tau-1)(x_{un} - x_1) + Q \ln \frac{1-\tau+3\tau x_1^2}{1-\tau+3\tau x_{un}^2} \left. \right\}, \\ \mu = & -2 \frac{dW_{\pm}}{dl} |_{l=0} = \frac{2\lambda}{Q} [-\tau (x_{un}^3 - x_1^3) + \\ & (\tau-1)(x_{un} - x_1)] \end{aligned} \quad (10)$$

3 随机共振

3.1 信噪比

根据信噪比表达式, 我们考察信噪比随着噪声强度 Q 和非对称系数 r 变化的三维图, 固定参数 $A=0.5, \Omega=0.5, \tau=0.2$, 结果如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 随着噪声强度 Q 和非对称系数 r 的增大, 信噪比先逐渐增大到最大值, 然后逐渐减小, 呈现出非单调结构. 这是随机共振现象的识别特征, 代表系统能够随着 Q 和 r 的变化引发随机共振现象.

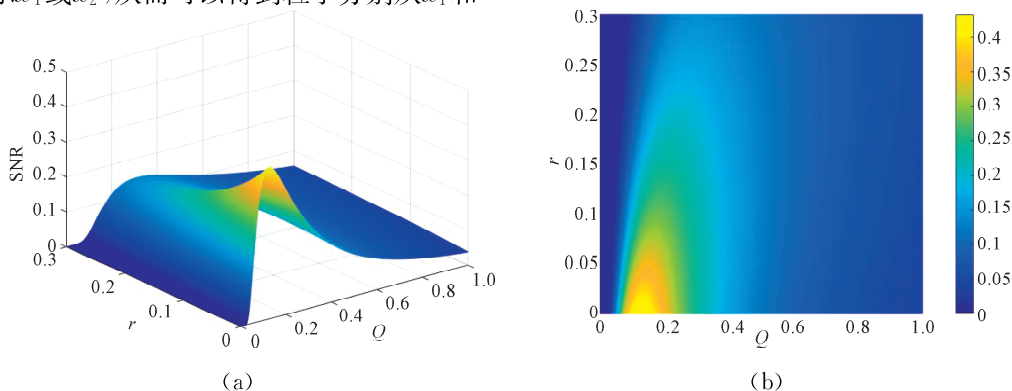


图 2 SNR 随 Q 和 r 的变化, $A=0.5, \Omega=0.5, \tau=0.2$

Fig. 2 The change of SNR with Q and r , where $A=0.5, \Omega=0.5, \tau=0.2$

根据信噪比的表达式, 我们分别讨论了信噪比作为噪声强度和非对称系数的函数关于噪声关联

时间、信号幅值以及信号频率的影响. 图 3a 给出了信噪比作为噪声强度 Q 的函数随着不同噪声关

联时间 τ 的变化曲线. 从图 3a 可以看到传统的随机共振现象, 峰值随着 τ 的增大而减小, 但峰值的水平方向的位置没有明显变化. 图 3b 给出了信噪比作为非对称系数 r 的函数随着噪声关联时间 τ

的变化曲线, 信噪比同样随着 τ 的增大而减小. 由此可知, 较大的噪声关联时间会抑制系统随机共振现象的发生. 此外, 除了噪声强度对系统的影响, 系统对非对称因素的改变也十分敏感.

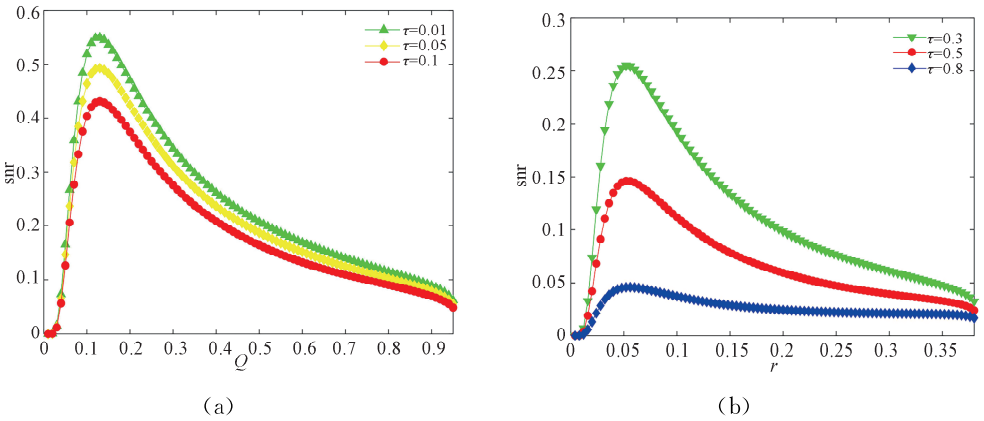


图 3 (a) 不同 τ 值时 SNR 随 Q 的变化, $A=0.5, \Omega=0.5, r=0.1$; (b) 不同 τ 值时 SNR 随 r 的变化, $A=0.5, \Omega=0.5, Q=0.3$
Fig. 3 (a) The change of SNR with Q at different values of τ , where $A=0.5, \Omega=0.5, r=0.1$; (b) the change of SNR with r at different values of τ , where $A=0.5, \Omega=0.5, Q=0.3$

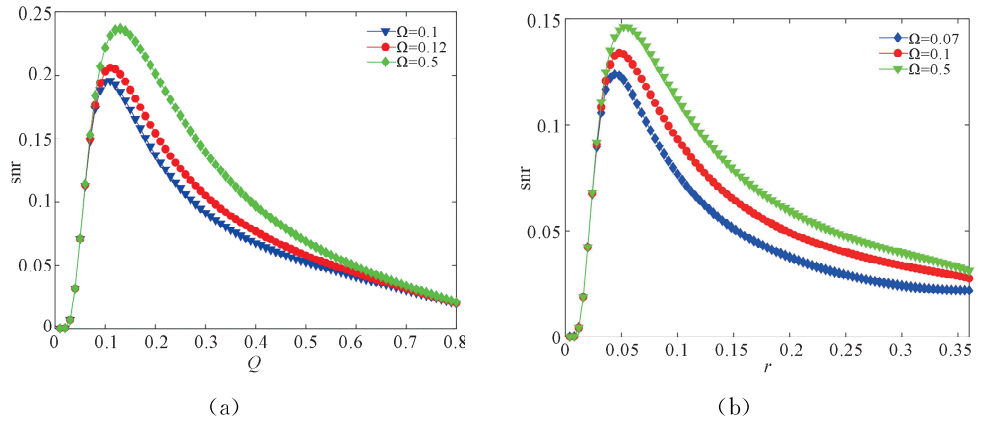


图 4 (a) 不同 Ω 值时 SNR 随 Q 的变化, $A=0.5, \tau=0.3, r=0.1$; (b) 不同 Ω 值时 SNR 随 r 的变化, $A=0.5, \tau=0.3, Q=0.3$
Fig. 4 (a) The change of SNR with Q at different values of Ω , where $A=0.5, \tau=0.3, r=0.1$; (b) the change of SNR with r at different values of Ω , where $A=0.5, \tau=0.3, Q=0.3$

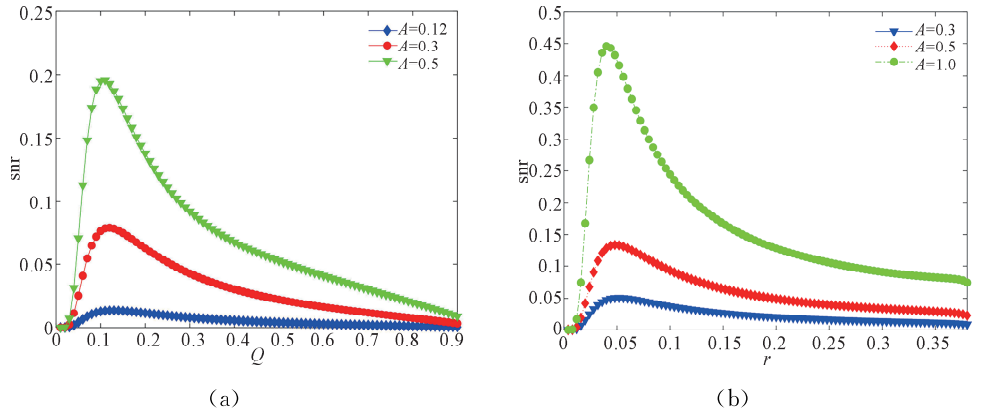


图 5 (a) 不同 A 值时 SNR 随 Q 的变化, $\Omega=0.1, \tau=0.3, r=0.1$; (b) 不同 A 值时 SNR 随 r 的变化, $\Omega=0.1, \tau=0.3, Q=0.6$
Fig. 5 (a) The change of SNR with Q at different values of A , where $\Omega=0.1, \tau=0.3, r=0.1$; (b) the change of SNR with r at different values of A , where $\Omega=0.1, \tau=0.3, Q=0.6$

图 4a 给出了信噪比作为噪声强度 Q 的函数随着信号频率 Ω 的变化曲线。随着 Ω 的增加, 峰值也在逐渐增大, 峰值的位置略微向右偏移。图 4b 给出了信噪比作为不对称系数 r 的函数随着信号频率 Ω 的变化曲线, 呈现出类似现象, 也再次说明信号频率的增加可以促进随机共振的发生。

图 5a 给出了信噪比作为噪声强度 Q 的函数随着信号幅值 A 的变化曲线。随着 A 的增大, 峰值逐渐增大, 峰值位置没有明显偏移。图 5b 给出了信噪比作为不对称系数 r 的函数随着信号的幅值 A 的变化曲线。图 5b 呈现出随机共振现象。随着 A 的增大, 峰值逐渐增大, 峰值的位置也没有明显偏移。因此, 较大的信号幅值, 有利于随机共振

现象的发生。

3.2 平均首次通过时间

MFPT 是描述随机系统暂态特性的一个重要特征参数, 代表粒子在噪声驱动下首次从一个势阱跃迁到另一个势阱的平均时间。根据 MFPT 的表达式, 分别讨论非对称双稳系统的两个不同方向 (左阱到右阱和右阱到左阱) 的 MFPT 与噪声强度、非对称系数、噪声关联时间之间关系。当 $r=0$ 时, 原方程退化为对称双稳模型, MFPT 与初始状态无关, 从而 $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 的曲线与 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 的曲线是一致的, 当 $r \neq 0$ 时, 两个不同方向的 MFPT 曲线趋势是相反的, 具体说明如下:

$$\begin{aligned} \text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{B(x) P_{\text{st}}(x)} \int_{-\infty}^x dy P_{\text{st}}(y) = 2\pi \left[|(3x_1^2 - 1)(3x_2^2 - 1)| \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ \frac{1}{Q} \left[\frac{1}{2} \tau (x_{\text{un}}^6 - x_1^6) + \left(\frac{1}{4} - \tau \right) (x_{\text{un}}^4 - x_1^4) + (\tau r - \tau A \cos \Omega t) (x_{\text{un}}^3 - x_1^3) + \frac{\tau - 1}{2} (x_{\text{un}}^2 - x_1^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\tau - 1) (A \cos \Omega t - r) (x_{\text{un}} - x_1) + Q \ln \frac{1 - \tau + 3\tau x_1^2}{1 - \tau + 3\tau x_{\text{un}}^2} \right] \right\}, \\ \text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{B(x) P_{\text{st}}(x)} \int_x^{+\infty} dy P_{\text{st}}(y) = 2\pi \left[|(3x_1^2 - 1)(3x_2^2 - 1)| \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ \frac{1}{Q} \left[\frac{1}{2} \tau (x_{\text{un}}^6 - x_2^6) + \left(\frac{1}{4} - \tau \right) (x_{\text{un}}^4 - x_2^4) + (\tau r - \tau A \cos \Omega t) (x_{\text{un}}^3 - x_2^3) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\tau - 1}{2} (x_{\text{un}}^2 - x_2^2) + (\tau - 1) (A \cos \Omega t - r) (x_{\text{un}} - x_2) + Q \ln \frac{1 - \tau + 3\tau x_2^2}{1 - \tau + 3\tau x_{\text{un}}^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

图 6 给出了 MFPT 随着噪声强度 Q 和非对称系数 r 在不同方向上变化的三维图。由图 6a 可见 $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 随着 Q 和 r 都呈现的大致趋势为单调递增, 这意味着噪声强度和非对称系数的增大都不利于粒子在势阱间的跃迁。图 6b 则与

$\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 情况恰好相反, 呈现了单调递减的趋势, 因此当方向相反时, 对 MFPT 的影响也相反, 即噪声强度和不对称系数的增大有利于系统在两个稳态之间相互跃迁。

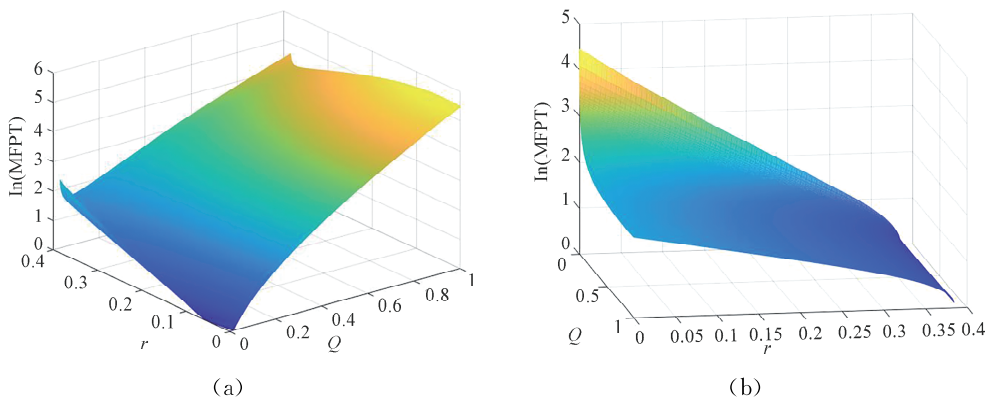


图 6 (a) $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 和 (b) $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 随 Q 和 r 的变化, $A=0.5$, $\Omega=0.1$, $\tau=0.5$

Fig. 6 (a) $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ and (b) $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ change with Q and r , where $A=0.5$, $\Omega=0.1$, $\tau=0.5$

图 7 给出了 $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 作为噪声强度 Q 和非对称系数 r 的函数随着噪声关联时间 τ 的变化曲线. 各曲线均呈现出单调递增的趋势, 且随着 τ 的增大, 其陡峭程度也逐渐上升. 这说明关联时间 τ 对 MFPT 的影响较为显著, 关联时间 τ 的增大, 使得粒子从单个势阱发生跃迁所需时间增加.

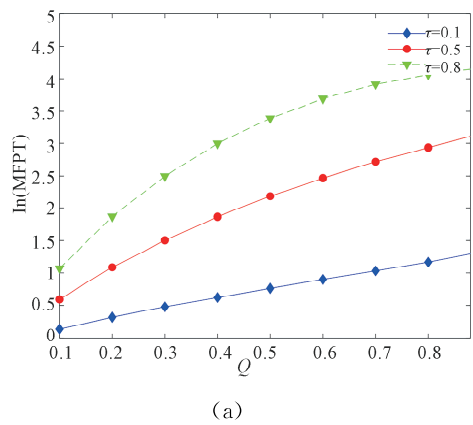


图 8 给出了 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 作为噪声强度 Q 和非对称系数 r 的函数随着噪声关联时间 τ 的变化曲线, 在 τ 的取值较小时, 曲线均呈现单调递减的趋势, 说明随着噪声能量的增加, 跃迁的概率增加, 粒子首次跃迁所用时间变短.

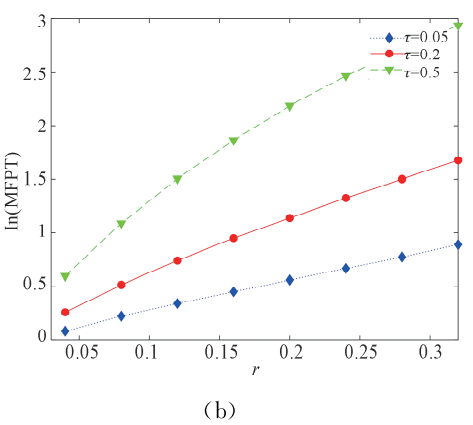


图 7 (a) 不同 τ 值时 $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 随 Q 的变化, $A=0.5, \Omega=0.1, r=0.1$; (b) 不同 τ 值时 $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ 随 r 的变化, $A=0.5, \Omega=0.1, Q=0.6$
Fig. 7 (a) The change of $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ with Q at different values of τ , where $A=0.5, \Omega=0.1, r=0.1$; (b) the change of $\text{MFPT}(x_1 \rightarrow x_2)$ with r at different values of τ , where $A=0.5, \Omega=0.1, Q=0.6$

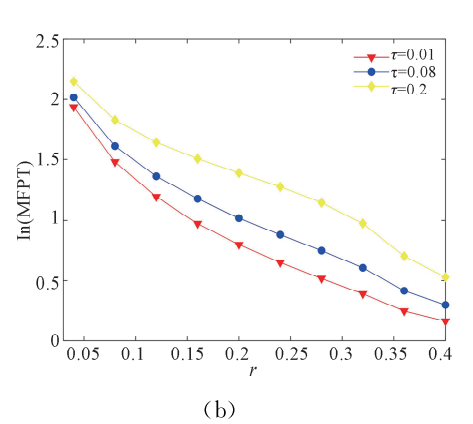
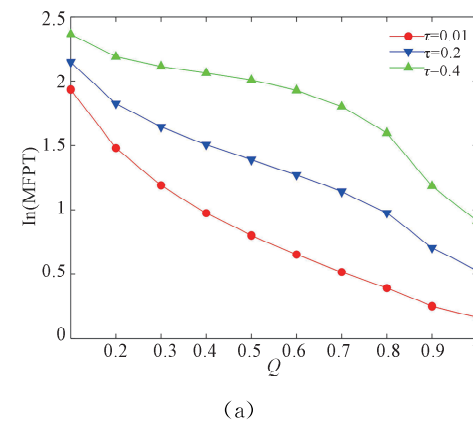


图 8 (a) 不同 τ 值时 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 随 Q 的变化, $A=0.05, \Omega=0.2, r=0.1$; (b) 不同 τ 值时 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 随 r 的变化, $A=0.05, \Omega=0.2, Q=0.6$
Fig. 8 (a) The change of $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ with Q at different values of τ , where $A=0.05, \Omega=0.2, r=0.1$; (b) the change of $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ with r at different values of τ , where $A=0.05, \Omega=0.2, Q=0.6$

4 模拟分析与实验验证

4.1 自适应粒子群算法优化参数

在进行仿真模拟前, 我们先将系统参数进行优化, 以便达到更优的输出结果, 并将非对称双稳系统与经典双稳系统比较优劣. 基于随机共振对系统参数的敏感性, 适当地调整参数可以使系统达到最优水平. 我们利用自适应粒子群算法 (APSO)^[24] 对系统参数进行调整, 模拟了信号最优输出结果. APSO 是粒子群的改进算法, 它能够自适

应地更新权值, 保证了粒子有更快的收敛速度和全局搜索能力.

算法设计: 在目标搜索空间中, 有若干个粒子组成的一个群体, 每个粒子都是一个潜在的解, 代入目标函数之后算出其适应值, 再根据适应值的大小判断解的优劣. 粒子需要经过多次迭代获得最优解, 每经过一次迭代都会更新一次位置. 将适应度最好的粒子位置作为当前粒子群的最优位置, 再对粒子的步长和位置进行调整, 计算粒子更新后的适应度, 将每个粒子的适应度与全体粒子所经历的

最好位置比较,直到达到最优解.

APSO 流程如下:

- (1) 初始化粒子的步长和位置,将每个粒子当前位置暂设为各自的最优位置 P_best .
- (2) 计算每个函数的适应度,存储它们的最佳位置和适应度,并选择适应度最好的粒子位置作为当前最优秀位置 Q_best ,然后调整粒子的步长和位置.
- (3) 计算粒子更新后的适应度,再把其适应度与之前所经历的 P_best 对应的适应度对比,取最优作为当前 P_best .
- (4) 将每个粒子的适应度与全体粒子的 Q_best 对比,取最优作为当前 Q_best .
- (5) 如果达到最大迭代次数或最优适应度,则停止迭代,并输出最优解;如果未达到以上终止条件,则返回步骤 2.

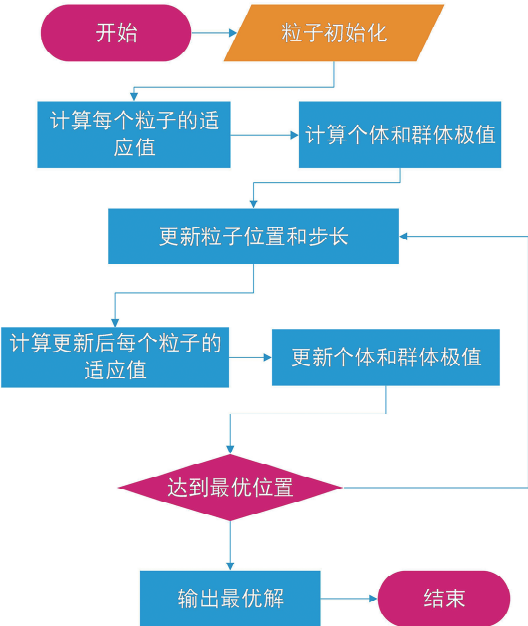
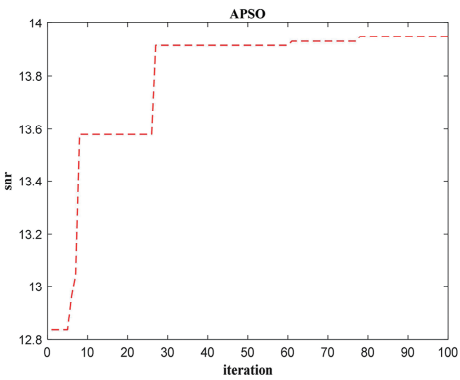
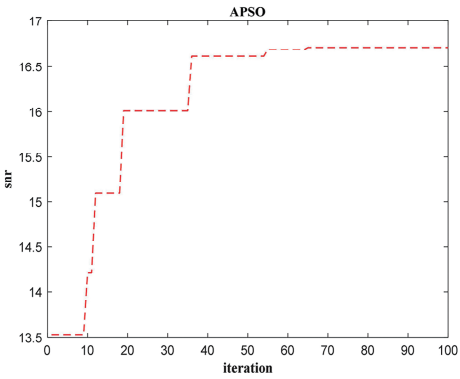


图 9 自适应粒子群算法流程图
Fig. 9 Flow chart of adaptive particle swarm optimization algorithm

我们以信噪比为目标函数,采用自适应粒子群算法对经典双稳系统(Classical Bistable Stochastic Resonance, CBSR; $\frac{dx}{dt}=ax-bx^3+A\cos\Omega t+\xi(t)$)和本文的非对称双稳系统参数进行优化. 优化过程如图 9 所示,优化结果见表 1. 在 CBSR 系统中,得到最优信噪比为 13.94,参数 $a=0.2493, b=0.02$; 在 ABSR 系统中,得到的信噪比更高,最优信噪比为 16.71,参数 $r=0.5123$. 因此,在系统性能方面,ABSR 系统更优于 CBSR 系统.



(a) CBSR



(b) ABSR

图 10 以信噪比为目标函数的自适应粒子群算法迭代过程
Fig. 10 Iterative process of adaptive particle swarm optimization with SNR as objective function

表 1 APSO 算法优化结果

Tab. 1 Optimization results of APSO algorithm		
Method	SNR _{max}	Parameters
CBSR	13.94	$a=0.2493, b=0.02$
ABSR	16.71	$r=0.5123$

4.2 仿真分析

在实际的机械轴承故障诊断中,由于轴承球体滚过故障具有周期性,我们选择单边衰减脉冲函数^[25]作为仿真信号进行模拟分析,即

$$S(t)=\exp\{-d\left[t-n(t)T_d\right]^2\}\cdot A\sin(2\pi ft)$$

(12)

其中 $A\sin(2\pi ft)$ 为载波信号; A 为信号幅值; f 为载波频率; d 表示振荡衰减率; T_d 为故障信号的周期; $n(t)=\text{floor}(\frac{t}{T_d})$. 目前,大部分论文都以输出信号的信噪比作为性能的评价指标,信号信噪比表示为

$$\text{SNR}=10\log_{10}\frac{A_d}{\sum_i A_i-A_d}$$

(13)

其中 A_d 和 $\sum_i A_i-A_d$ 分别表示驱动频率和噪声总功率.

运用参数优化后的系统对仿真信号进行故障检测,图 10a 展示了仿真信号对应的功率谱密度,其中,采样频率为 10 KHz,样本大小为 2000. 从时域上看,周期脉冲淹没在噪声中;从功率谱中看,几乎所有振荡都被载波频率处的振荡遮蔽. 因此,从仿真信号中直接诊断故障十分困难. 图 10b 通过 Hilbert 变换^[26],将包络信号中的特征频率进行了

解调,但干扰成分依旧存在. 图 10c 为 CBSR 方法的输出信号,相较于图 10b 信号得到明显改善,但依旧存在部分干扰频率. 图 10d 展示了 ABSR 方法的输出信号,从时域图中可以看出具有清晰的信号周期,从功率谱图中也可以观察到几乎无干扰成分的特征频率,这说明 ABSR 方法从仿真信号中提取故障频率的有效性.

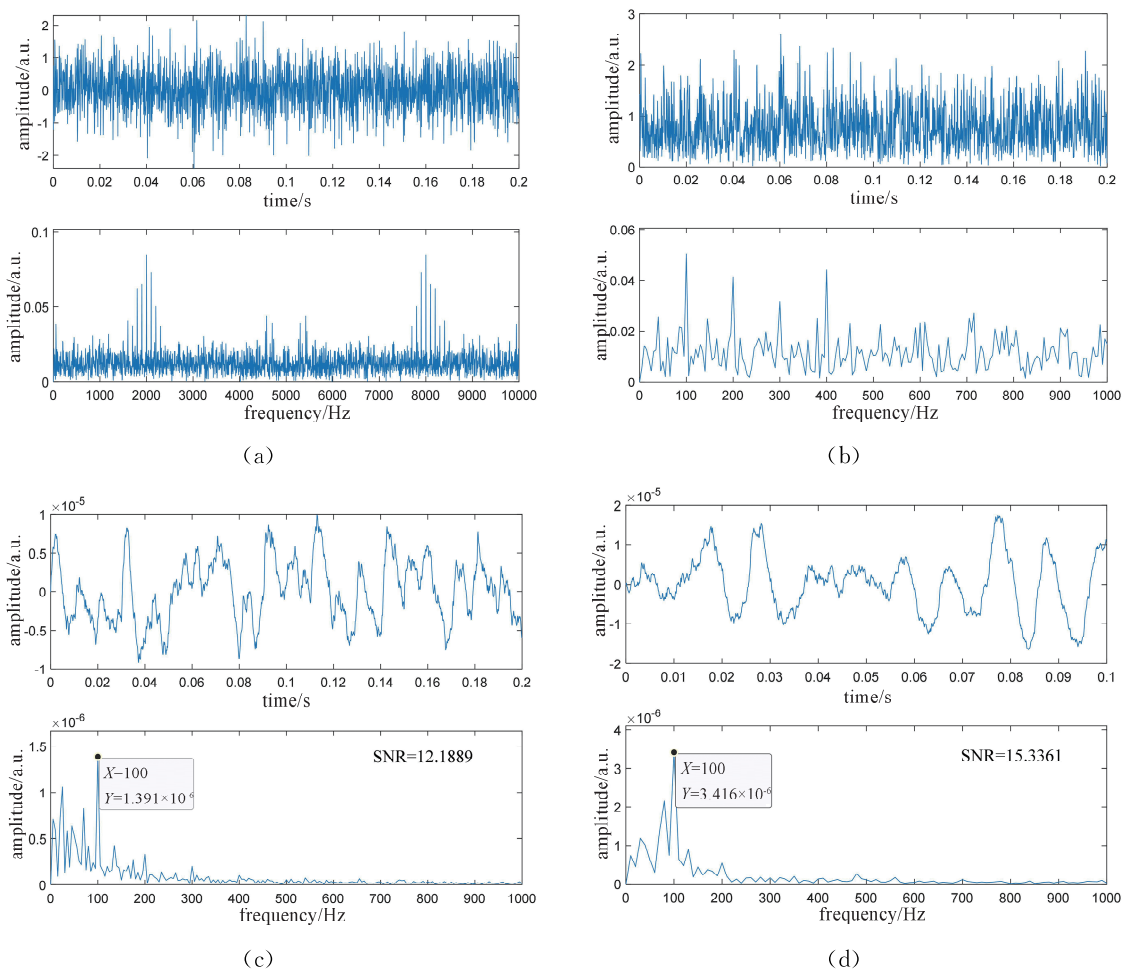


图 11 不同方法处理单边衰减脉冲信号的结果: (a) 仿真信号; (b) 包络信号; (c) CBSR 方法输出; (d) ABSR 方法输出
Fig. 11 Results of processing unilateral attenuated pulse signals by different methods: (a) simulation signal; (b) envelope signal; (c) CBSR method output; (d) ABSR method output

4.3 实验验证

为了测试 ABSR 方法的性能,本节对一组缺陷轴承数据进行测试. 轴承数据来自凯斯西储大学(CWRU)数据中心^[27]的实验装置(图 11). 本实验使用的轴承为 6205-2RS SKF,其详细几何形状见图 12. 在轴外滚道引入单点故障,图 13 为外滚道缺陷信号的分析. 原始信号及其功率谱如图 13a 所示,从波形中无法找到故障脉冲. 经过包络提取

后,分析结果如图 13b 所示,从功率谱中可以看出球经过外滚道缺陷的频率,由于旋转频率的调制作用,影响了故障特征频率的解调和准确判断. 分别采用 CBSR 方法和 ABSR 方法对该信号分析,结果如图 13c 和图 13d 所示,波形排列都更加整齐,故障脉冲也都可以被清晰识别,而 ABSR 方法得到的特征频率更高,因此诊断性能更好.

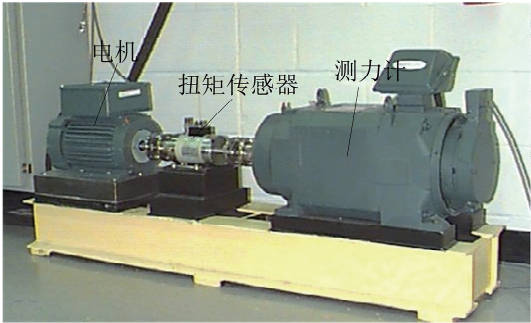


图 12 CWRU 实验台
Fig. 12 Bearing test stand from CWRU

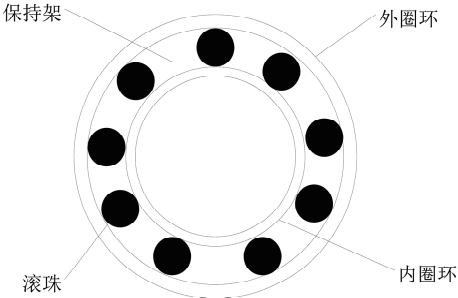


图 13 轴承截面图
Fig. 13 Cross-section of bearing

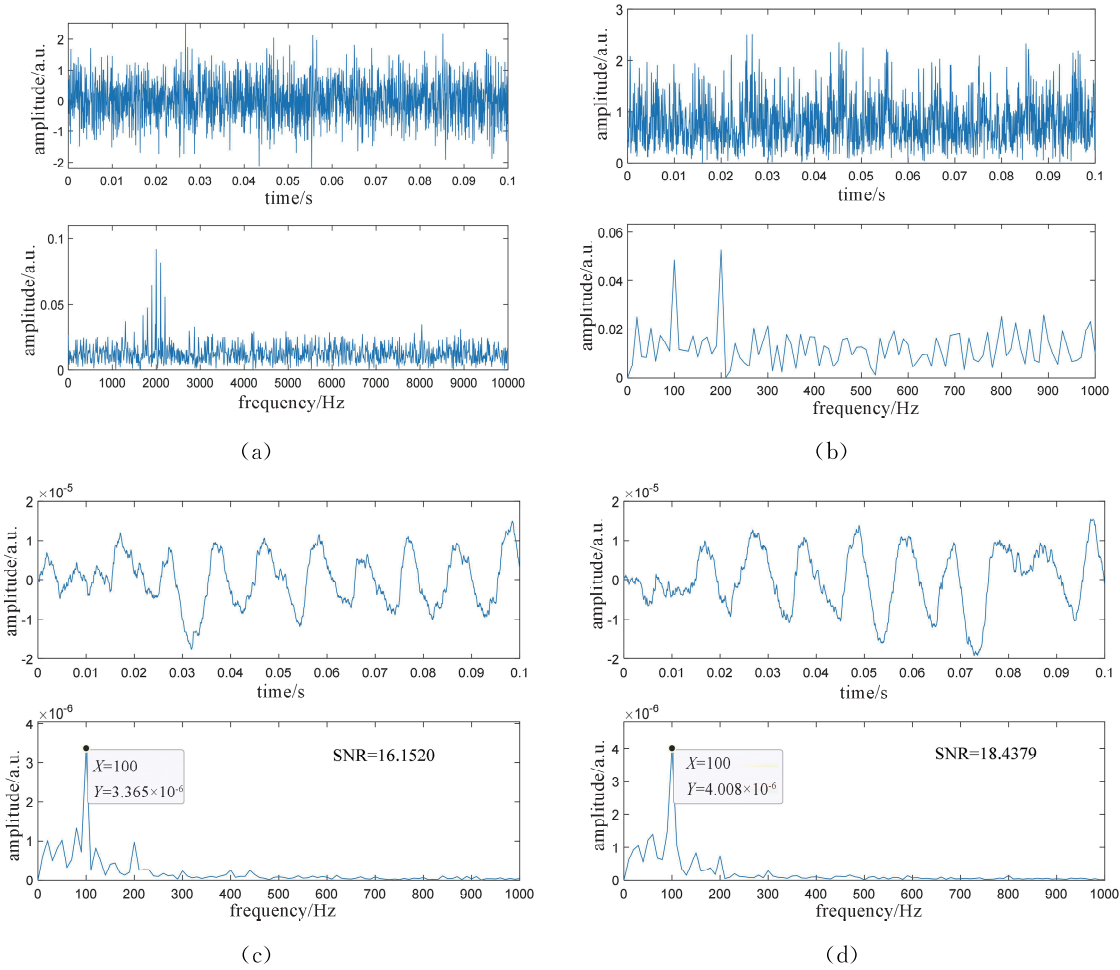


图 14 不同方法处理外滚道缺陷信号的结果: (a) 原始信号; (b) 包络信号; (c) CBSR 方法输出; (d) ABSR 方法输出
Fig. 14 Results of processing defect signals of outer raceway by different methods: (a) original signal; (b) envelope signal; (c) CBSR method output; (d) ABSR method output

5 结 论

本文研究了高斯色噪声激励下的非对称双稳系统的随机共振. 首先,我们通过对信噪比曲线的分析发现,随着噪声强度和非对称系数的变化,系统会出现随机共振现象. 其次,我们分别研究了噪声关联时间、信号的频率、信号的幅值对信噪比的

影响,发现信噪比关于噪声强度与非对称系数随各个参数变化的趋势类似. 即:适当地降低噪声关联时间有利于随机共振现象的发生,与之相反,适当地提高信号的频率和幅值也有利于随机共振现象的发生. 然后,我们分别探讨了非对称双稳系统的两个不同方向的 MFPT 与其他参数之间的关系,发现随着信号关联时间的增加,MFPT($x_1 \rightarrow x_2$)也

随之增加,但 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 随之减小. 所以在 $\text{MFPT}(x_2 \rightarrow x_1)$ 方向上增加信号关联时间 τ 有利于实现粒子在两者之间的过渡,提高了粒子在两种状态之间的跃迁速率. 此外,我们观察到在非对称双稳系统中,噪声强度、非对称系数和噪声关联时间对不同方向上的平均首次通过时间的作用是相反的. 最后,我们将单边衰减脉冲函数作为仿真信号,说明了 ABSR 方法从仿真信号中提取故障频率的有效性,并采用 CWRU 轴承数据进行了验证. 鉴于非对称性的重要性,我们扩展了对非对称性双稳模型的研究,希望能在一定程度上推动今后的研究和应用的发展.

参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance [J]. J Phys A: Math Gen, 1981, 14: 453.
- [2] Bahar S, Neiman A B, Jung P, *et al.* Introduction to focus issue: nonlinear and stochastic physics in biology [J]. Chaos: Interdiscip J Nonlinear Sci, 2011, 21: 047501.
- [3] Yamakou M E, Hjorth P G, Martens E A. Optimal self-induced stochastic resonance in multiplex neural networks: electrical vs. chemical synapses [J]. Front Comput Neurosci, 2020, 14: 62.
- [4] Shukla B, Bidelman G M. Enhanced brainstem phase-locking in low-level noise reveals stochastic resonance in the frequency-following response (FFR) [J]. Brain Res, 2021, 1771: 147643.
- [5] 李资源, 邱新秀, 高庆宗, 等. 基于分数阶 CPG 和小世界神经网络的同步和随机共振研究 [J]. 中国科技信息, 2019, 22: 78.
- [6] Shi P M, Li Q, Han D Y. Stochastic resonance and MFPT in an asymmetric bistable system driven by correlated multiplicative colored noise and additive white noise [J]. Int J Mod Phys B, 2017, 31: 12.
- [7] Lin L F, Yu L, Lv W Y, *et al.* Ratchet motion and current reversal of Brownian motors coupled by birth-death interactions in the crowded environment [J]. Chin J Phys, 2020, 68: 808.
- [8] Ma T, Xu F, Hu J, *et al.* Double Gaussian potential stochastic resonance method and its application in centrifugal fan blade crack detection [J]. Chin J Phys, 2021, 74: 279.
- [9] Lin Y, Ye C. Adaptive stochastic resonance quantified by a novel evaluation index for rotating machinery fault diagnosis [J]. Measurement, 2021, 184: 109920.
- [10] Guderian A, Dechert G, Zeyer K P, *et al.* Stochastic resonance in chemistry. 1. The belousov-zhabotinsky reaction [J]. J Phys Chem, 1996, 100: 4437.
- [11] Davtyan A, Platkov M, Gruebele M, *et al.* Stochastic resonance in protein folding dynamics [J]. Chem Phys Chem, 2016, 17: 1305.
- [12] Petrov V, Ouyang Q, Swinney H L. Resonant pattern formation in a chemical system [J]. Nature, 1997, 388: 655.
- [13] Wagner T, Talkner P, Bayer J C, *et al.* Quantum stochastic resonance in an ac-driven single-electron quantum dot [J]. Nature Phys, 2019, 15: 330.
- [14] Hussein R, Kohler S, Bayer J C, *et al.* Spectral properties of stochastic resonance in quantum transport [J]. Phys Rev Lett, 2020, 125: 206801.
- [15] Gillard N, Belin É, Chapeau B F. Stochastic resonance with unital quantum noise [J]. Fluct Noise Lett, 2019, 18: 1950015.
- [16] Li Y, Gao C, Dong W, *et al.* Coherence and resonance effects in the ultra-intense laser-induced ultrafast response of complex atoms [J]. Sci Rep, 2016, 6: 18529.
- [17] Zhang Y, Sun X. Research on laser coded signal extraction technology based on stochastic resonance [J]. Optik, 2018, 155: 43.
- [18] Kravtsov N V, Lariontsev E G, Chekina S N. Stochastic resonance at a subharmonic of a periodic modulation signal in solid-state lasers [J]. Quantum Electron, 2013, 43: 10.
- [19] Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system [J]. Phys Lett A, 1983, 97: 5.
- [20] 杨蓉. 复杂噪声环境下时滞非对称双稳系统的随机共振现象研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2015.
- [21] 周丙常, 徐伟. 周期混合信号和噪声联合激励下的非对称双稳系统的随机共振 [J]. 物理学报, 2007, 56: 6.
- [22] 胡岗. 随机力与非线性系统 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- [23] 范泽宁, 李鹏飞, 陶原野, 等. 相关噪声驱动下一种特殊非对称非线性系统的随机共振的研究 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 927.
- [24] Li M D, Shi P M, Zhang W Y, *et al.* A novel underdamped continuous unsaturation bistable stochastic resonance method and its application [J]. Chaos Solitons Fractals, 2021, 151: 111228.
- [25] Fu Y X, Kang Y M, Liu R N. Novel bearing fault diagnosis algorithm based on the method of mo-

ments for stochastic resonant systems [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2020, 70: 1.

[26] Javorskyj I, Yuzefovych R, Matsko I, *et al.* Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: low-frequency modulation [J]. Digit Signal Process, 2021, 116: 103113.

[27] Bearing Data Center. CWRU [EB/OL]. (2022-03-14) [2022-03-15]. <http://engineering.case.edu/bearingdatacenter>.

引用本文格式:

中 文: 陈杨, 张建刚. 基于非对称双稳系统的随机共振及应用[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 044002.

英 文: Chen Y, Zhang J G. Stochastic resonance based on asymmetric bistable systems and its applications [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 044002.