

基于坐标旋转变换意义下的三维全局耦合离散混沌系统对称与隐藏动力学的识别与分析

姚潇悦¹, 李险峰¹, 江俊², 梁以德³, 王淑英²

(1. 兰州交通大学数理学院, 兰州 730070;
2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049;
3. 香港城市大学建筑与土木工程学系, 中国香港 999077)

摘要: 本文用一维 Logistic 映射代替平均场, 全局耦合构造了一类三维混沌映射, 并利用坐标旋转变换对耦合系统的复杂动力学和隐藏动力学分析和识别. 通过展示耦合系统的吸引子、分岔图及共存吸引域在坐标旋转前后的对比, 我们发现原耦合系统经由坐标旋转后, 其吸引子及其共存吸引域在旋转平面上的投影均具有很好的三角对称性. 此外, 我们在双参数稳态分布图上增加了余维 1 与余维 2 分岔线, 提供了一种在参数平面域内发现可能存在的吸引子共存的方法. 双参数稳态分布虽然与坐标旋转变换无关, 但其正交变换的特性可大幅提高运算效率.

关键词: 混沌映射; 坐标旋转变换; 三角对称性; 识别; 投影

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.044003

Recognition and analysis of symmetric dynamics and hidden dynamics of a three-dimensional global coupling discrete chaotic system based on the coordinate rotation transformation

YAO Xiao-Yue¹, LI Xian-Feng¹, JIANG Jun², LIANG Yi-De³, WANG Shu-Ying²

(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;
2. State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
3. Department of Civil and Architectural Engineering, City University of HongKong, HongKong 999077, China)

Abstract: A three-dimensional chaotic map is created with global coupling by replacing the mean field with standard 1-D Logistic map. The complex dynamics and hidden dynamics of the coupled system are analyzed and identified by coordinate rotation transformation. The attractors and the bifurcation structure together with the coexisting attraction domain of the coupled system, are shown in respective diagram before and after utilizing the coordinate rotation transformation. The comparison among them shows that the projection of the attractors and the coexisting basin of attraction of the original coupled system on the rotated plane are of triangular symmetry. Co-dimension 1 and 2 bifurcation lines are superimposed on the two-parameter steady-state diagrams. It provides a way to recognize possible coexisting attractors in parameter domains. Both two-parameter steady state distribution diagram and bifurcation lines are independent of coordinate rotation transformation. However, their computation speed

收稿日期: 2022-01-13
基金项目: 国家自然科学基金(11962011, 11772243); 甘肃省自然科学基金(20JR10RA223)
作者简介: 姚潇悦(1998—), 女, 山东济宁人, 硕士研究生, 主要研究领域为非线性动力学. E-mail: yaoxiaoyue@163.com
通讯作者: 李险峰. E-mail: lixf@lztu.edu.cn

would be greatly accelerated with the help of orthogonal transformation.

Keywords: Chaotic map; Coordinate rotation transformation; Triangular symmetry; Recognition; Projection

1 引言

计算机图形图像处理技术是现代信息技术领域中的一个重要分支,在许多领域内都有广泛的应用. 计算机图形图像处理技术的发展在研究非线性动力系统的过程中发挥着关键作用,不但可呈现可视化的结果,而且在某种意义上还决定了非线性动力学的发展方向. 通过计算机图形图像处理技术,对非线性现象进行数学建模、图形渲染和模拟仿真等方式^[1],既可以提供清晰和准确的视觉图像,将其中的复杂动力学行为可视化,又可为复杂系统中非线性现象的研究提供较为可靠的理论分析和仿真结果.

坐标变换在农作物建模、车辆定位、分析圆筒混合机的运动和空间直线度误差评定等许多领域都具有广泛的应用^[2-5]. 坐标变换是通过两个坐标系之间的对应关系来实现的. 它可以表述为向量与矩阵之间的计算,最终等价于在另一个坐标系下对点的位置的重新表述. 目前对低维离散系统动力学行为分析及应用的研究,尤其是低维耦合动力学行为的研究比较深入,而对高维离散系统的研究较少^[6]. 高维系统与实际生活密切相关,例如复杂的生物种群系统,复杂的网络系统等^[7]. 因而高维系统的动力学行为及混沌现象具有重要的研究意义. 对于高维系统来说,坐标变换尤为重要,它不仅可以将复杂问题简单化,将抽象图像可视化,还是一种识别隐藏动力学的有力工具.

本文基于坐标旋转变换研究三维耦合离散 Logistic 映射,对其中的对称动力学与隐藏动力学行为在参数域内进行识别和分析. 首先,我们基于 Logistic 映射耦合构造,由于原坐标系统中坐标轴 x - y - z 的轮换等价性,采用三维坐标旋转变换,在不失系统维数的条件下,我们可以发现系统吸引子在新的坐标系统 X - Y - Z 下的投影具有严格的三角对称性. 随后,我们给出旋转变换前后坐标系统下分岔动力学行为的对比,发现在新的坐标系统下的分岔图更有助于识别到细致的周期分岔现象,但同时也可能误判耦合系统分岔机制. 基于上述原因,我们在双参数域内对等价耦合系统的动力学分布进行计算,同时采用并行延续算法计算主要分岔曲线对系统隐藏的动力学行为进行识别,找出可能存

在的吸引子共存现象的参数域,并将共存吸引子及其吸引域在 x - y 平面及 Y - X 平面上的投影进行对比,发现吸引域在 X - Y - Z 坐标系统下的投影也呈三角对称性. 这进一步验证了耦合系统在三维参数空间中关于对称轴 Δ 三角对称,且这种三角对称性对所有的参数都具有不变性.

2 三维离散系统

分岔和混沌等非线性现象广泛存在于各个领域. 根据不同需要,人们不断研究发现新的混沌系统,或从已有映射的基础上耦合构造来研究其复杂的动力学行为^[8]. 在许多物理系统、神经动力系统以及广义同步运动过程中,耦合方式并非都是近临耦合,而是远距离耦合. 全局耦合模式是平均场论中的一种重要耦合结构. 在该耦合模式中,各个独立单元相互耦合,且与它们各自的空间位置无关^[9-11]. 全局耦合映射结构为

$$U_j(n+1) = F(V_j(n)) \quad (1)$$

其中,

$$V_j = (1-\lambda)U_j(n) + \lambda \bar{U}(n) \quad (2)$$

$$\bar{U}(n) = \frac{1}{N} \sum U_i(n) \quad (3)$$

在上述全局耦合映射结构中, λ 称为耦合强度因子; $\bar{U}(n)$ 表示平均场. 本文利用一维 Logistic 映射 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 代替平均场,全局耦合构造出一类三维离散映射,其动力学方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = a\lambda y_n(1-y_n) + (1-\lambda)x_n \\ y_{n+1} = a\lambda z_n(1-z_n) + (1-\lambda)y_n \\ z_{n+1} = a\lambda x_n(1-x_n) + (1-\lambda)z_n \end{cases} \quad (4)$$

式中分岔参数 a 与一维 Logistic 映射一致,其局部动力学完全由一维 Logistic 映射诱导给出.

2.1 三角对称性

易知 x , y , z 在其坐标系统意义下具有轮换等价性,即系统在实施变换 $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$ 及 $(x, y, z) \rightarrow (z, x, y)$ 后的动力学方程仍然保持不变. 从而可得系统在三维空间中关于对称轴 Δ : 直线 $x=y=z$ 三角对称,且这种三角对称性对系统参数 a 和 λ 保持不变.

2.2 不动点分析

耦合映射系统(4)有 8 个不动点,其坐标与耦合参数 λ 没有关系,分别标记为

$A=(0,0,0);$
 $B=\left(\frac{a-1}{a},\frac{a-1}{a},\frac{a-1}{a}\right);$
 $C_1;C_2;C_3;D_1;D_2;D_3.$

其中 $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ 由六次代数方程决定, 具体代数表达式不可求. 点 A 与点 B 位于对称轴 Δ 上. 由于 x, y, z 的轮换等价性, $C_1(r, s, t), C_2(s, t, r), C_3(t, r, s)$ 和 $D_1(u, v, w), D_2(v, w, u), D_3(w, u, v)$ 分别是两个等边三角形的顶点, 它们分别位于平面 $x+y+z=C_i$ 上 (C_i 为常数, $i=1, 2, 3$, $C_1=r+s+t, C_2=u+v+w$), 且均正交于对称轴 Δ . 图 1 描述了 $a=5$ 时三维耦合映射系统(4)的 8 个不动点在三维空间中的数值结果. 我们可以清晰看到, $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ 在各自的平面上具有三角对称性.

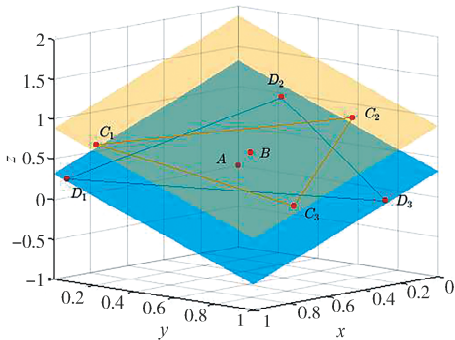


图 1 $a=5$ 时系统(4)的 8 个不动点
Fig. 1 Eight fixed points of system (4), $a=5$

2.3 坐标变换

为了方便观察系统的三角对称性和识别其中的隐藏动力学行为,我们将原本的 $x-y-z$ 坐标系转换至新的正交 $X-Y-Z$ 坐标系,即经过如图 2a 所示的旋转变换,将 z 轴旋转至对称轴 Δ ,构建新的正交坐标系.

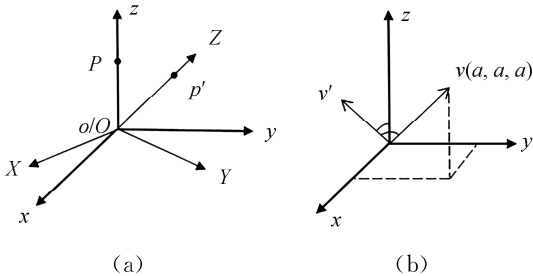


图 2 坐标旋转示意图
(a) 旋转前后坐标系; (b) 旋转变换过程
Fig. 2 Schematic diagrams of coordinate rotation
(a) Coordinate systems before and after rotation;
(b) process of rotation transformation

在图 2a 中,点 P 在原坐标系下的坐标为

$(0,0,d)$,通过旋转变换, P 旋转至点 P' , P' 在原坐标系下的坐标为 (a,a,a) ,在 $X-Y-Z$ 正交坐标系下为 $(0,0,d)$,得 $d=\sqrt{3}a$.

令 OP' 方向向量为 $v(a,a,a)$,将向量 $v(a,a,a)$ 通过旋转变换变换至 z 轴正向方向上,其对应的旋转变换与原坐标系到 $X-Y-Z$ 正交坐标系的旋转变换一致. 首先将向量 v 绕 x 轴正向旋转 α 角度,使向量 v 旋转至 $x-z$ 平面,记为向量 v' . 然后再将向量 v' 绕 y 轴正向旋转 β 角度,使向量 v' 旋转至 z 轴的正向方向上,如图 2b 所示.

基于布尔莎模型,利用两次 Givens 旋转变换可得,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = R_y(\beta)R_x(\alpha) \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中,

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

不妨假设 $v(x,y,z)^T$ 为原坐标系下的任意一点, $v'(x',y',z')^T$ 为 v 在旋转后的 $X-Y-Z$ 正交坐标系下的坐标,则由(5)式可以得原坐标系与旋转后的 $X-Y-Z$ 正交坐标系之间的坐标变换关系为:

$$v' = R_y(\beta)R_x(\alpha)v \tag{6}$$

令 $A = R_y(\beta)R_x(\alpha)$,得

$$v' = Av \tag{7}$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{8}$$

为一正交矩阵,且 $|A|=1$,即得(7)式为第一种类型的正交旋转变换.

图 3 给出了耦合系统(4)在取不同参数 a 和 λ

时的周期吸引子,极限环吸引子和混沌吸引子在原坐标系统三维空间中的相图及经坐标变换后在 $Y-X$ 平面上的投影. 图 3a 和 3b 展示了一个周期 12 吸引子($a=2.455, \lambda=1.62$),图 3c 和 3d 展示了 4 个极限环吸引子($a=3.9, \lambda=0.865$),图 3e、3f($a=2.635, \lambda=1.454$)与图 3g、3h($a=3.05, \lambda=1.19$)分别给出了两个混沌吸引子坐标变换前后的对比

图. 通过比较,我们观察到耦合系统(4)的吸引子在旋转后的 $Y-X$ 平面上的投影关于中心点(0,0)具有三角对称性. 这也就进一步验证了上述的结论,即耦合系统(4)的吸引子在三维空间中关于对称轴 $\Delta: x=y=z$ 三角对称,且这种三角对称性对系统的所有参数都保持不变. 如此经过坐标旋转变换后,将便于我们观察到系统演化轨迹的三角对称性.

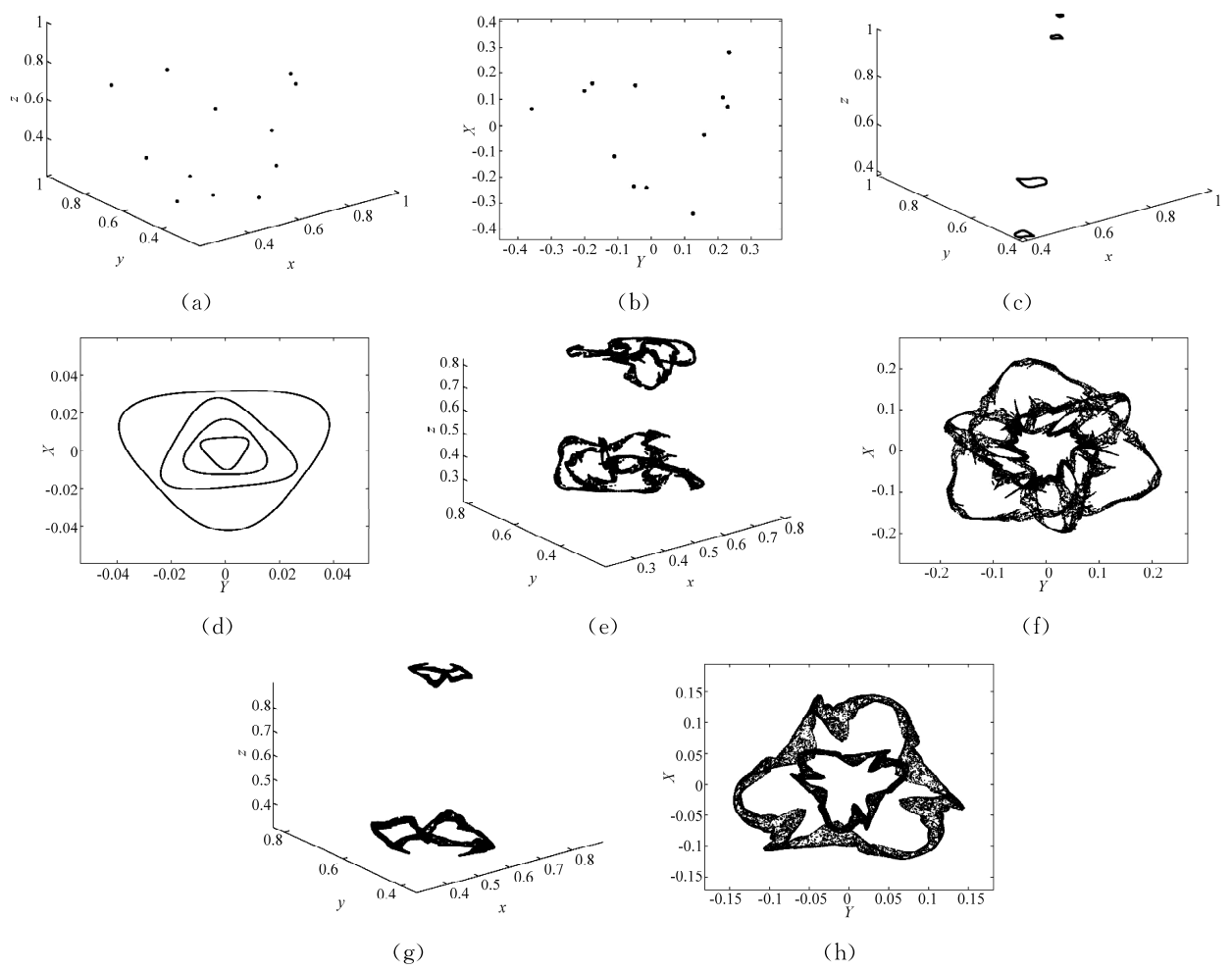


图 3 不同系统参数 a 和 λ 下,系统(4)的吸引子在原三维坐标空间及 $Y-X$ 平面上的投影
(a, c, e, g)原坐标系下吸引子;(b, d, f, h)旋转变换后在 $Y-X$ 上投影
Fig. 3 The projections of the attractors of system (4) in the original 3-D coordinate space and on the $Y-X$ plane with different system parameters a, λ
(a, c, e, g) Attractors presented in original coordinate system; (b, d, f, h) projections on the $Y-X$ plane after rotation transformation

3 动力学行为分析与隐藏动力学识别

分岔分析是研究非线性系统在参数域内动态动力学行为的一种强有力的工具. 其主要目的是在变化参数的条件下,给出非线性系统的稳态和非稳态之间的转迁过程. 复杂非线性系统通向混沌的道路是多种多样且多变的,即使是由稳态周期解到拟

周期的转迁过程也有不同的机制^[12]. 且由于视角的不同,耦合系统(4)在坐标旋转变换前后所呈现的稳态分岔过程也可能会有很大的差异. 给定参数 a ,图 4 给出了耦合系统(4)在原坐标系及 $X-Y-Z$ 坐标系下,随耦合参数 λ 变化的单变量稳态分岔图的对比效果.
图 4a 为当 $a=2.635$ 时,耦合系统(4)从唯一稳态不动点 B 随耦合参数 λ 的逐步增大的稳态响

应过程. 在 $\lambda=1.22$ 附近发生倍周期分岔(简记为 PD), 继而出现周期 2 轨道; 随后发生内依马可一沙克分岔(简记为 NS), 系统出现两个极限环; 随着参数 λ 继续增加, 两个极限环增大变形并破裂, 逐步形成奇异吸引子和混沌吸引子. 同时我们可以观察到在进入混沌区域后, 系统(4)经切分岔产生了周期 6 窗口, 随即发生 NS 分岔, 出现了 6 个极限环, 然后再次进入混沌. 图 4b 给出了 X-Y-Z 坐标系中的稳态变化过程. 然而在图 4b 中, 耦合系统(4)由周期 1 到周期 2 的 PD 分岔现象并没有直观地呈现出来, 会误认为由周期 1 解失稳随即发生 NS 分岔, 出现 1 个稳态极限环. 而实际上, 经过坐标旋转变换后, 周期 2 点在 X-Y 平面里的投影是重合的, 所以在图 4b 中表现为周期 1 轨道. 因而仅从稳态分岔图 4b 分析, 极易会出现误判为如同图 4c 这种机制下的分岔过程^[8].

然而图 4d 给出了旋转变换坐标系下数值结果的优势. 取定 $a=3.28$, 在原坐标系中, 耦合系统(4)依旧从唯一稳态不动点 B 开始衍化. 在 $\lambda=$

0.53 附近发生 NS 分岔, 出现一个稳态极限环; 然后在 $\lambda=0.93$ 附近极限环破裂, 发生切分岔(简记为 LP), 随即出现稳态多周期轨道; 随着 λ 的继续增加, 耦合系统(4)随后发生 PD 分岔通向混沌运动; 之后又发生切分岔产生周期窗口, 然后再次发生混沌. 在图 4c 所示分岔图中, 多周期窗口中周期数目难以辨析. 图 4d 给出了耦合系统(4)经坐标旋转变换后的稳态分岔过程. 其中清晰地表明了耦合系统(4)在分岔参数 $\lambda=0.93$ 附近出现的是周期 6 轨道, 历经 PD 分岔通向混沌运动.

单变量稳态分岔图可以清楚地将一维分岔行为在二维相图上展现出来. 通过不同坐标系统中的分岔图的相互比较, 可以发现耦合系统(4)经由坐标旋转变换后, 有时有助于观察具体的分岔现象, 但有时也可能造成系统所发生的分岔行为的误判. 所以单从一维分岔图去分析系统的分岔行为是不够准确的, 它会随初始值的选择、坐标系统的不同及“视角”的不同而不同.

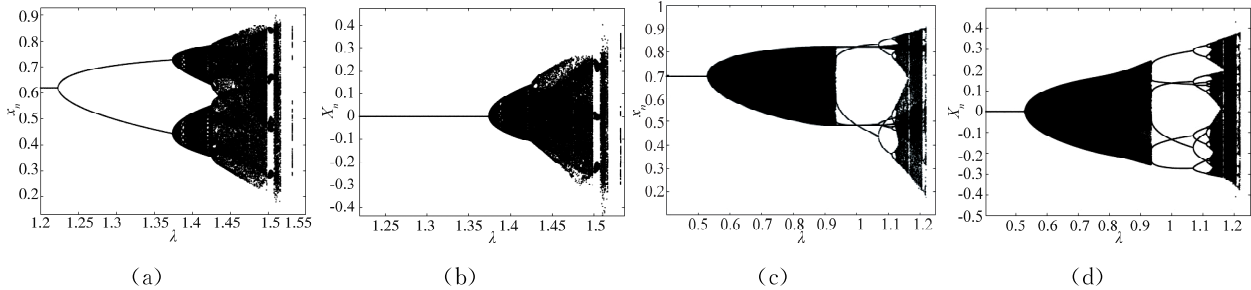


图 4 耦合系统(4)在旋转变换前后坐标系下的一维稳态分岔图的对比
(a,c)原坐标系下分岔图; (b,d)旋转坐标系下分岔图

Fig. 4 The comparisons of 1-D steady-state bifurcation diagrams of coupled system (4) before and after the coordinate rotation transformation
(a, c) Bifurcation diagram of the original coordinate system; (b, d) bifurcation diagram of the rotated coordinate system

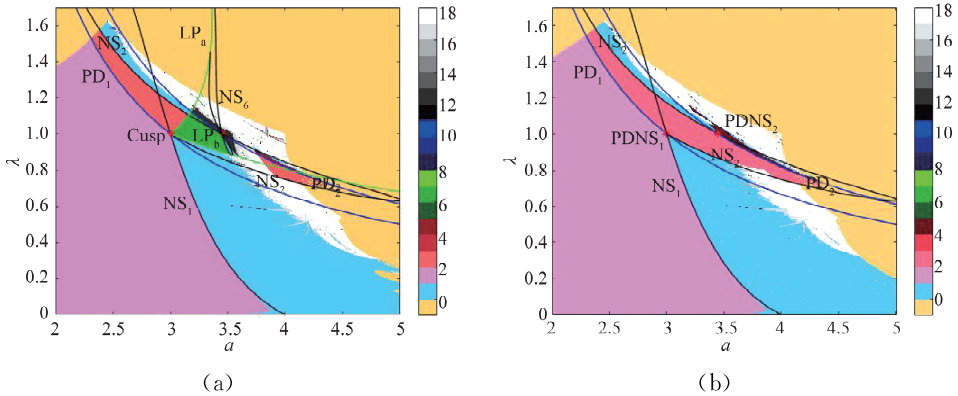


图 5 耦合系统(4)的稳态解在不同初始值条件下的分布图
(a) 初始值(0.1,0.2,0.3); (b) 初始值(0.8,0.2,0.2)

Fig. 5 Distribution diagrams of steady-state solution of coupled system (4) with different initial values
(a) With initial value(0.1,0.2,0.3); (b) with initial value(0.8,0.2,0.2)

为进一步展现由参数变化引起的系统动力学行为的变化,我们可以选择双参数联合稳态分布图,其分布仅依赖于初始值的选择,而与坐标旋转变换无关.此外,为消弭初始值对稳态运动区域的决定性影响,在双参数联合稳态分布图中还附加了计算结果与初始值条件无关的余维 1 和余维 2 分岔线.另外,在做数值计算时充分考虑到正交矩阵的数值稳定性,并能在计算高周期分岔时使用并行矩阵乘法加速运算连乘微分矩阵的乘子等关键判据.我们采用对耦合系统(4)正交变换后的等价耦合系统进行处理.图 5 描绘了在选择不同初始值下,耦合系统(4)的稳态动力学行为在双参数域 $a \times \lambda = [2, 5] \times [0, 1.7]$ 上的联合分布^[13].其中,逃逸区域标记为黄色,天蓝色区域表示拟周期运动,紫红色区域表示稳态周期 1 区域,橘红色区域表示稳态周期 2 区域,直至浅灰色区域表示稳态周期 16,对应的周期数目用右侧的颜色栏给出.更高稳态周期域由于在当前比例下,相较于低周期区域过于狭窄,所以连同混沌区域都归类为白色区域.黑色线表示 NS 分岔,蓝色线表示 PD 分岔,绿色线是由周期 6 点检测到的极限点集(标记为 LP).余维 2 分岔尖点(Cusp)与倍周期-内依马可-沙克分岔点(简记为 PDNS)也一并表示.事实上,随着初始值选择的改变,稳态周期 6 区域的范围也随之呈现动态的变化,图 5a 中的 LP_a 与 LP_b 分别为稳态周期 6 区域的上、下边界.

由于参数联动变化及初始值的影响会导致耦合系统(4)呈现出复杂的动力学行为,在同一参数下出现多种吸引子共存的现象,在图 5a 中不同颜

色区域与分岔线的交叉部分存在吸引子共存的可能性.由对称周期 2 到极限环的 NS_2 分岔线与周期 6 区域的交叉部分就存在周期 6 吸引子与极限环的共存现象,分别如图 6a 和 6b 所示.图 6a 展示了在参数 $a=3.2, \lambda=1.1$ 时,周期 6 吸引子与极限环吸引子的共存现象在 x_0-y_0 初始值平面上的投影,黑色点集为周期 6 吸引子,蓝色区域为其吸引域,红色不变曲线为两个极限环,其吸引域为黄色区域.图 6b 为在同一组参数值下,吸引子的共存现象在 Y_0-X_0 初始值平面上的投影.

除此之外,实际上由对称周期 2 失去对称性产生的 NS_2 分岔线与 PD_2 分岔线所围成的区域与图 5a 中重合部分的周期 6 区域,周期 12 区域,由对称周期 6 吸引子失对称性产生的 NS 分岔后拟周期运动区域(六个极限环),混沌区域均存在共存吸引子.图 6c 展示了在参数 $a=3.53, \lambda=0.9$ 时,周期 2 吸引子与六个极限环的共存在 x_0-y_0 初始值平面上的投影,蓝色区域为六个极限环的吸引域,黄色区域为周期 2 吸引子的吸引域.图 6d 为同一组参数值下,吸引子的共存现象在 Y_0-X_0 初始值平面上的投影,其中周期 2 点在 Y_0-X_0 平面上的投影是重合的,显示为同一个点.

由于该三维系统中的 x, y, z 具有轮换等价性,所以吸引子与吸引域在原坐标系各二维平面上的投影都是相同的,所以在图 6 中只展示了在 x_0-y_0 平面上的投影.相较于在 x_0-y_0 平面上的投影,可以发现吸引子及其共存吸引域在 Y_0-X_0 平面上的投影都具有很好的三角对称性.

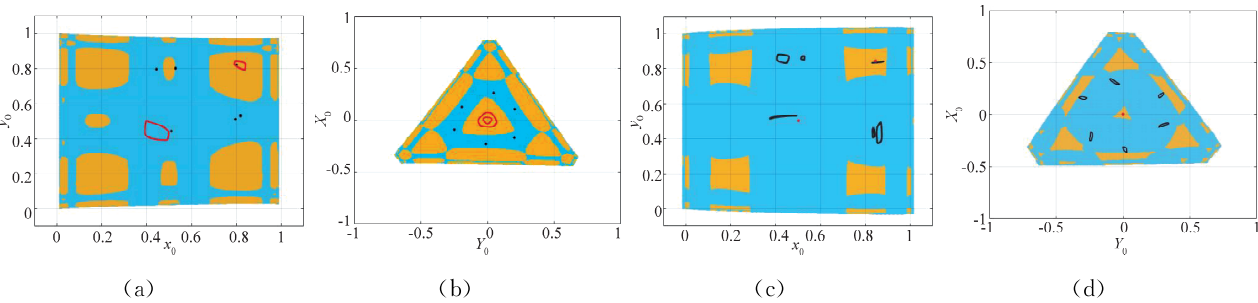


图 6 不同参数下耦合系统(4)的共存吸引子及其吸引域在旋转变换前后坐标系下初始值平面上的投影
(a, c) 原坐标系下投影; (b, d) 旋转后坐标系下投影

Fig. 6 The projections of the coexisting attractors and their attraction domains of the coupled system (4) on the initial value plane before and after the coordinate rotation transformation with different parameters
(a, c) Projections of the original coordinate system; (b, d) projections of the rotated coordinate system

4 结 论

本文用一维 Logistic 映射代替平均场,全局耦合构造了一类三维混沌映射,其局部动力学完全由一维 Logistic 映射诱导给出.耦合系统在原坐标系中具有轮换等价性,在三维空间中关于对称轴 $\Delta: x=y=z$ 三角对称.坐标旋转变换是一种特殊的正交变换,可将原耦合系统等价表示.我们利用坐标旋转变换,给出了系统吸引子在原坐标系及旋转后在相平面上的投影对比效果.我们证实了耦合系统的吸引子在三维空间中关于对称轴 Δ (直线 $x=y=z$) 三角对称,且这种三角对称性对系统的所有参数都保持不变.

本文利用单参数稳态分岔图,双参数稳态动力学行为在参数域上的分布对全局耦合系统的复杂动力学行为和隐藏动力学进行分析讨论与识别.耦合系统经由坐标旋转变换后,单参数稳态分岔图会随坐标系统的不同而显得不同,甚至可能误判为耦合系统发生的分岔行为的机制.这也意味着仅从一维稳态分岔图判别系统的分岔行为不够精确.耦合系统的双参数稳态动力学分布仅与初始值的选择有关,为此在分布图中我们增加了与初值条件无关的余维 1 和余维 2 分岔线,从而提供了一种在参数域内识别可能存在的共存吸引子的方法.虽然耦合系统的双参数稳态动力学分布与坐标旋转变换无关,但使用正交变换后的等价耦合系统可加速运算.最后本文通过数值结果证明了耦合系统的吸引子及共存吸引域在相平面的投影都具有很好的三角对称性.

参考文献:

[1] Overveld C. Beyond bump maps: nonlinear mappings for the modeling of geometric details in computer graphics [J]. *Comput Aided Design*, 1992, 24: 201.

[2] 王继利,贾庆祥,杨新义.基于坐标变换的玉米根

茬三维模型建立[J]. *农业机械学报*, 2011, 42: 158.

- [3] 焦雨琪,牛蕊,夏志.基于坐标变换的交互多模型车载定位研究[J]. *信息技术与网络安全*, 2018, 37: 80.
- [4] 蔡洪涛,杜润生,杨叔子.偏心圆筒混合机的运动及混合机理分析[J]. *华中科技大学学报:自然科学版*, 2006, 34: 84.
- [5] 张新宝,谢江平.空间直线度误差评定的逼近最小包容圆柱法[J]. *华中科技大学学报:自然科学版*, 2011, 39: 6.
- [6] Dmitriev A S, Shirokov M, Starkov S O. Chaotic synchronization in ensembles of coupled maps [J]. *IEEE T Circuits I*, 1997, 44: 918.
- [7] 徐丽丽,董一鸿,王雄,等.基于 K-sup 稠密子图的大规模复杂网络概要算法及可视化[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2019, 31: 400.
- [8] Li X F, Leung A Y T, Jiang J. Synchronizability and mode-locking of two scaled quadratic maps via symmetric direct-coupling [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2018, 115: 239.
- [9] Batista C A S, Viana R L. Chaotic maps with non-local coupling: lyapunov exponents, synchronization of chaos, and characterization of chimeras [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2020, 131: 109501.
- [10] Singha J, Gupte N. Chimera states in globally coupled sine circle map lattices: Spatiotemporal intermittency and hyperchaos [J]. *Phys Lett A*, 2020, 384: 126225.
- [11] López-Ruiz R, Pérez-García C. Dynamics of maps with a global multiplicative coupling [J]. *Chaos Soliton Fract*, 1991, 1: 511.
- [12] Reick C, Mosekilde E. Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems [J]. *Phys Rev E*, 1995, 2: 1418.
- [13] Li X F, Chu Y D, Zhang H. Fractal structures in a generalized square map with exponential terms [J]. *Chin Phys B*, 2012, 21: 030203.

引用本文格式:

中 文: 姚潇悦,李险峰,江俊,等.基于坐标旋转变换意义下的三维全局耦合离散混沌系统对称与隐藏动力学的识别与分析[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2022, 59: 044003.

英 文: Yao X Y, Li X F, Jiang J, *et al.* Recognition and analysis of symmetric dynamics and hidden dynamics of a three-dimensional global coupling discrete chaotic system based on the coordinate rotation transformation [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2022, 59: 044003.