

doi: 103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 01. 010

# 不确定分数阶非线性多智能体系统的鲁棒一致性

李 静, 方 正

(江南大学理学院, 无锡 214122)

**摘 要:** 研究了具有分数阶动力学特性的不确定非线性多智能体系统的鲁棒一致性问题. 利用分数阶系统的等价频率分布模型和李雅普诺夫稳定性理论, 证明了在一致性控制协议的作用下, 当反馈增益矩阵满足一定的线性矩阵不等式条件时, 系统中的智能体最终趋于所给定的目标状态. 运用分数阶微积分的预估—校正算法进行数值仿真, 验证了理论分析的有效性和可行性.

**关键词:** 鲁棒一致性; 多智能体系统; 分数阶

**中图分类号:** TP391.9; TP18

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0490-6756(2016)01-0054-07

## Robust consensus for fractional-order uncertain multi-agent systems with nonlinear dynamics

LI Jing, FANG Zheng

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** This paper investigates the robust consensus problem for uncertain fractional-order multi-agent systems with nonlinear dynamics. According to the frequency distributed equivalent model of fractional-order systems and the Lyapunov stability theory, it is proved that under the consensus protocol, the multiple agents in the network can eventually converge to the given objective state when the feedback gain matrix satisfies a certain LMI condition. The simulation results demonstrate the effectiveness and validity of the proposed method by using the fractional calculus predictor-corrector algorithm.

**Key words:** Robust consensus; Multi-agent systems; Fractional-order

## 1 引 言

近年来,多智能体系统的分布式协同控制问题已成为国际控制领域的研究热点. 一致性问题是多智能体系统协同控制中一个最基本也是最典型的问题. 所谓一致性是指各智能体之间通过局部耦合作用, 最终使得系统中所有的智能体状态趋于一致. 特别地, 具有领航者的多智能体系统在实际工程应用中尤为重要. 领航者是一个特殊的智能体, 它的运动不受其他智能体的干扰, 但可以对其它智

能体施加一定的影响并通过智能体之间的耦合作用从而影响整个多智能体网络的运行. 多智能体网络的一致性协同控制在群集问题<sup>[1]</sup>, 编队控制<sup>[2]</sup>和传感器网络<sup>[3]</sup>等众多领域都有非常广泛的应用.

分数阶微积分不同于经典的微积分, 它考虑了历史信息所产生的分布式影响, 因而分数阶微积分可以更好的描述现实世界中具有遗传性质的材料和某些物理模型. 近 20 年里, 其应用领域逐步涵盖了粘弹性动力学<sup>[4]</sup>, 量子力学<sup>[5]</sup>, 控制理论与机器人<sup>[6,7]</sup>, 混沌和湍流<sup>[8-9]</sup>等. 随着多智能体系统研究

收稿日期: 2015-03-06

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (JUSRP51317B)

作者简介: 李静(1991—), 女, 山西吕梁人, 硕士研究生. 主要研究方向为多智能体系统.

通讯作者: 方正. E-mail: fangzhengjd@126.com

热潮的持续高涨, 众多研究者的注意力逐渐从整数阶模型转移到分数阶模型. 例如, 文献[10]首次针对具有领航者的分数阶非线性多智能体系统的一致性进行了研究, 并给出了判定依据. 文献[11]则基于状态观测器研究了分数阶线性不确定多智能体系统的鲁棒一致性控制问题, 但是该方法难以推广到非线性领域.

基于上述讨论分析, 本文拟开展基于模型逼近的不确定分数阶非线性多智能体系统的鲁棒一致性问题的研究. 本文假设具有分数阶动力学特性的多智能体网络具有动态领航者. 文中  $\otimes$  代表矩阵的 Kronecker 积, 如果  $A$  是一个  $m \times n$  的矩阵, 而  $B$  是一个  $p \times q$  的矩阵, Kronecker 积  $A \otimes B$  则是一个  $mp \times nq$  的分块矩阵; 上标  $T$  表示矩阵的转置;  $\| \cdot \|$  代表向量的欧几里德范数, 即  $\|x(t)\| = \sqrt{x^T(t)x(t)}$ .

## 2 预备知识及模型描述

### 2.1 预备知识

设  $G = (V, E)$  表示顶点集为  $V$ 、边集为  $E$  的无向图, 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  是顶点集合,  $E \subseteq V \times V$  表示边集合. 节点  $v_i$  的邻集表示为  $N_i = \{v_j \in V \mid (v_i, v_j) \in E\}$ . 一般的无向图  $G$  的连接矩阵定义为  $A = (a_{ij})_{N \times N}$ , 其中  $a_{ij} = a_{ji} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ . 本文考虑的无向图不含自环, 也就是说  $a_{ii} = 0$ . 无向图  $G$  的 Laplacian 矩阵  $L = (l_{ij})_{N \times N}$  定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} a_{ij}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

对无向图而言, Laplacian 矩阵  $L$  对称且半正定. 本文所考虑的系统由  $N$  个跟随智能体和 1 个领航智能体组成. 用  $v_i (1 \leq i \leq N)$  表示第  $i$  个跟随智能体,  $v_0$  表示领航智能体. 由领航智能体与跟随智能体组成的系统关联图用  $\bar{G}$  表示.

定义矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ , 其中  $d_i$  满足条件: 如果  $(v_0, v_i)$  是  $\bar{G}$  的一条边, 则  $d_i = 1$ ; 否则  $d_i = 0$ . 引入矩阵  $H = L + D$ , 其中  $H = (h_{ij})_{N \times N}$  满足

$$h_{ij} = \begin{cases} l_{ii} + d_i, & i = j \\ l_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

**引理 1**<sup>[12]</sup> (1) 矩阵  $H$  的特征值非负; (2) 矩阵  $H$  是正定的当且仅当图  $\bar{G}$  是连通的.

定义 1<sup>[13]</sup> 函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶 Riemann-Liouville 积分定义.

$$I_\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

其中 gamma 函数  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$ .

显然,  $I_\alpha(f(t)) = h_\alpha(t) * f(t)$ , 其中  $*$  表示卷积, 脉冲函数  $h_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ , 分数阶积分算子  $I_\alpha(s)$  即为  $h_\alpha(t)$  的 Laplace 变换, 且  $I_\alpha(s) = L(h_\alpha(t)) = s^{-\alpha}$ .

分数阶微分是分数阶积分的对偶运算, 假设  $y(t)$  是  $v(t)$  的  $\alpha$  阶积分, 则

$$y(t) = I_\alpha(v(t))$$

$$v(t) = D^\alpha(y(t))$$

易证  $h_\alpha(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) e^{-\omega t} d\omega$ , 其中  $\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \omega^{-\alpha}$ .

**引理 2**<sup>[14]</sup> 考虑如下分数阶非线性系统.

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)),$$

其等价频率分布模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + f(x(t)) \\ x(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $z(\omega, t)$  为系统(2)的状态变量.

**引理 3**<sup>[15]</sup> 对给定适当维数的对称矩阵  $\Omega$  和矩阵  $M, N$ , 如果存在矩阵  $\Delta$ , 满足  $\Delta^T \cdot \Delta \leq I$ , 则不等式

$$\Omega + M\Delta N + (M\Delta N)^T < 0 \quad (3)$$

成立的充分必要条件是存在常数  $\epsilon > 0$ , 使得

$$\Omega + \epsilon MM^T + \epsilon^{-1} N^T N < 0 \quad (4)$$

成立.

**引理 4**<sup>[16]</sup> (Schur 补引理) 如下 LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

成立, 其中  $Q(x) = Q^T(x), R(x) = R^T(x)$ , 当且仅当  $R(x) < 0, Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0$  成立.

**引理 5**<sup>[17]</sup> 两个维数相同的实向量  $X, Y$ , 对任意  $\epsilon > 0$ , 不等式

$$X^T Y + Y^T X \leq \epsilon X^T X + \epsilon^{-1} Y^T Y \quad (6)$$

成立.

### 2.2 模型描述

本文中的网络拓扑图是无向且连通的. 考虑如下含有不确定项的分数阶非线性系统

$$\begin{cases} D^\alpha x_0(t) = (A + M\Delta N)x_0(t) + f(x_0(t)) \\ D^\alpha x_i(t) = (A + M\Delta N)x_i(t) + \\ \quad f(x_i(t)) + Bu_i(t) \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $x_0(t)$ ,  $f(x_0(t)) \in R^n$  分别为领航智能体的状态变量和非线性项;  $x_i(t)$ ,  $f(x_i(t)) \in R^n$  分别为第  $i$  个跟随智能体的状态变量和非线性项;  $0 < \alpha < 1$  为系统阶次; 常数矩阵  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ;  $M, N$  为已知的适当维数的常数矩阵;  $\Delta$  为未知矩阵, 且满足  $\Delta^T \cdot \Delta \leq I$ ;  $u_i(t) \in R^n$  是第  $i$  个智能体的控制输入量. 取初值  $x_i(0) = I_{1-\alpha} x_i(t) |_{t=0} = x_0^i$ , 其中  $i = 0, 1, \dots, N$ .

**假设 1** 非线性函数  $f(\cdot): R^n \rightarrow R^n$  满足 Lipschitz 条件, 即对任意的  $x, y \in R^n$ , 存在  $\lambda > 0$ , 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad (8)$$

成立.

**定义 2** 如果对于任意的初始值  $x_i(0)$ , 智能体状态满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0 \quad (9)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 则称具有领航者的多智能体系统实现了一致性.

### 3 主要结果

在系统(7)中, 对智能体  $i$ , 设置如下的一致性协议

$$u_i(t) = K \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) + Kd_i(x_0(t) - x_i(t)) \quad (10)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $K$  是需要设计的反馈增益矩阵. 第  $i$  个跟随智能体与领航智能体之间的误差向量为  $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ , 那么  $e_i(t)$  的动力学方程可表示为

$$D^\alpha e_i(t) = (A + M\Delta N)e_i(t) + f(x_i(t)) -$$

$$f(x_0(t)) + BK \sum_{j \in N_i} a_{ij} (e_j(t) - e_i(t)) - BKd_i e_i(t),$$

其矩阵形式为

$$D^\alpha e(t) = [I_N \otimes (A + M\Delta N) - H \otimes BK]e(t) + F(e(t)) \quad (11)$$

$$\text{其中 } e(t) = (e_1(t)^T, e_2(t)^T, \dots, e_N(t)^T)^T; \\ F(e(t)) = [(f(x_1(t)) - f(x_0(t)))^T, (f(x_2(t)) - f(x_0(t)))^T, \dots, (f(x_N(t)) - f(x_0(t)))^T]^T.$$

为方便起见, 记  $\bar{A} = I_N \otimes (A + M\Delta N) - H \otimes BK$ .

**定理 1** 在式(10)的控制作用下, 如果存在对称矩阵  $W > 0$ , 实数  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & W & WN^T \\ * & -\frac{\varepsilon_1}{\lambda^2} I_n & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0$$

成立, 其中

$\Theta_1 = AW + WA^T - 2\sigma_{\min}(H)BB^T + \varepsilon_1 I_n + \varepsilon_2 MM^T$ ,  $K = B^T W^{-1}$ , 那么多智能体系统(7)最终将达到一致.

**证明** 由引理 2 可知式(11)的等价频率分布模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + \bar{A}e(t) + F(e(t)) \\ e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (12)$$

构造如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega$$

其中  $P = I_N \otimes P_1$  ( $P_1 \in R^{n \times n}$ ) 是对称且正定矩阵.

计算  $V(t)$  沿着系统(12)的状态轨迹导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_0^\infty \mu(\omega) [-\omega z^T(\omega, t) + e^T(t) \bar{A} + F^T(e(t))] P z(\omega, t) d\omega + \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) \\ &\quad P [-\omega z(\omega, t) + \bar{A}e(t) + F(e(t))] d\omega \\ &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + e^T(t) (P \bar{A} + \bar{A}^T P) e(t) + \\ &\quad e^T(t) P F(e(t)) + F^T(e(t)) P e(t) \end{aligned} \quad (13)$$

由引理 5 和假设 1 可知存在正常数  $\varepsilon_1, \lambda$  使得

$$e^T(t) P F(e(t)) + F^T(e(t)) P e(t) \leq \varepsilon_1 e^T(t) P^2 e(t) + \varepsilon_1^{-1} \lambda^2 e^T(t) e(t)$$

由式(13)可知, 要使  $\dot{V}(t) < 0$ , 只需

$$e^T(t)[\bar{P}A + \bar{A}^T\bar{P} + \varepsilon_1\bar{P}^2 + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)]e(t) < 0 \quad (14)$$

即可. 式(14)即为

$$e^T(t)[(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes (A + M\Delta N) - H \otimes BK) + (I_N \otimes (A^T + (M\Delta N)T) - H \otimes K^TB^T)(I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)]e(t) < 0 \quad (15)$$

由于  $H$  是对称矩阵, 所以存在正交矩阵  $U \in R^{N \times N}$ , 使得  $U^THU = \Lambda = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ , 其中  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  是矩阵  $H$  的特征值. 由引理 1 可知  $\sigma_i > 0$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N$ .

令  $\bar{e}(t) = (U \otimes I_n)e(t)$ , 则式(15)可表示为

$$\bar{e}^T(t)[(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes (A + M\Delta N) - \Lambda \otimes BK) + (I_N \otimes (A^T + (M\Delta N)T) - \Lambda \otimes K^TB^T)(I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)]\bar{e}(t) < 0 \quad (16)$$

又由引理 3 可知存在常数  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得

$$\Omega + P_1M\Delta N + N^T\Delta^TM^TP_1 < \Omega + \varepsilon_2P_1MM^TP_1 + \varepsilon_2^{-1}N^TN \quad (17)$$

成立, 其中对称矩阵

$$\Omega = I_N \otimes (P_1A + A^TP_1) - \Lambda \otimes (P_1BK + K^TB^TP_1) + \varepsilon_1(I_N \otimes P_1^2) + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)$$

由式(16)和(17)可知

$$\begin{aligned} & \bar{e}^T(t)[(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes (A + M\Delta N) - \Lambda \otimes BK) + (I_N \otimes (A^T + (M\Delta N)T) - \Lambda \otimes K^TB^T) \\ & (I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1(I_N \otimes P_1)(I_N \otimes P_1) + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)]\bar{e}(t) < \bar{e}^T(t)[I_N \otimes (P_1A + A^TP_1) \\ & - \Lambda \otimes (P_1BK + K^TB^TP_1) + I_N \otimes (\varepsilon_2P_1MM^TP_1 + \varepsilon_2^{-1}N^TN) + \varepsilon_1(I_N \otimes P_1^2) + \\ & \varepsilon_1^{-1}\lambda^2(I_N \otimes I_n)]\bar{e}(t) < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

令  $K = B^TP_1$ , 则对于第  $i$  个智能体而言, 式(18)可以表示为

$$\bar{e}_i^T(t)[P_1A + A^TP_1 - 2\sigma_iP_1BB^TP_1 + \varepsilon_2P_1MM^TP_1 + \varepsilon_2^{-1}N^TN + \varepsilon_1P_1^2 + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2I_n]\bar{e}_i(t) < 0 \quad (19)$$

要使得式(19)小于零, 只需

$$P_1A + A^TP_1 - 2\sigma_{\min}(H)P_1BB^TP_1 + \varepsilon_2P_1MM^TP_1 + \varepsilon_2^{-1}N^TN + \varepsilon_1P_1^2 + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2I_n < 0 \quad (20)$$

其中,  $\sigma_{\min}(H)$  为矩阵  $H$  的最小特征值.

在式(20)左右两边同时乘以  $P_1^{-1}$ , 并记  $W =$

$P_1^{-1}$ , 可得

$$AW + WA^T - 2\sigma_{\min}(H)BB^T + \varepsilon_2MM^T + \varepsilon_2^{-1}WN^TNW + \varepsilon_1I_n + \varepsilon_1^{-1}\lambda^2WW < 0 \quad (21)$$

由引理 4 可知式(21)等价于

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & W & WN^T \\ * & -\frac{\varepsilon_1}{\lambda^2}I_n & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中

$$\Theta_1 = AW + WA^T - 2\sigma_{\min}(H)BB^T + \varepsilon_1I_n + \varepsilon_2MM^T.$$

特别地, 当跟随智能体与领航智能体的动力学

方程为线性系统时, 即  $f(x_i(t)) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, N$ . 有下面的定理 2 成立.

**定理 2** 在式(10)的控制作用下, 如果存在对称矩阵  $W > 0$ , 实数  $\varepsilon_1 > 0$ , 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & WN^T \\ * & -\varepsilon_1I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

成立, 其中

$\Theta_2 = AW + WA^T - 2\sigma_{\min}(H)BB^T + \varepsilon_1MM^T$ ,  $K = B^TW^{-1}$ , 那么多智能体系统(7)最终将达到一致.

## 4 数值仿真

**例 1** 考虑二维的分数阶线性多智能体系统, 其拓扑结构如图 1 所示. 在式(7)所示的系统中, 选择

系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0.5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \alpha = 0.8;$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix};$$

$$\Delta = \text{diag}(\sin\theta, 0.5\cos\theta), \theta \in R.$$

由图 1 可看出该网络的 Laplacian 的矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $H$  为

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

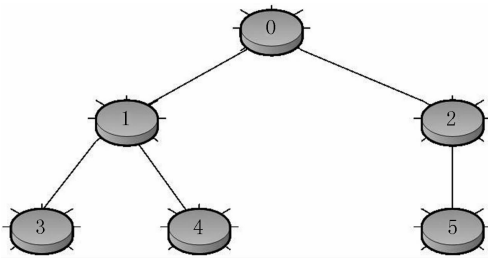


图 1 通信拓扑图

Fig.1 Communication topology

经计算  $\sigma_{\min}(H) = 0.2679$ ; 取初始值  $x_i(0) = (i, 2i)^T, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . 通过 MATLAB 的 LMI 工具箱得到式 (23) 的一个可行解  $K = [5.6626 \quad -5.5408]$ . 在控制器(10)的作用下, 跟随智能体与领航智能体之间的误差演化图如图 2 所示.

**例 2** 考虑三维的分数阶非线性多智能体系统, 其拓扑结构如图 3 所示. 各智能体的动力学方程为如下分数阶 Lorenz 系统(图 4 给出分数阶 Lorenz 系统的相位图)

$$D^\alpha x_i = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix}$$

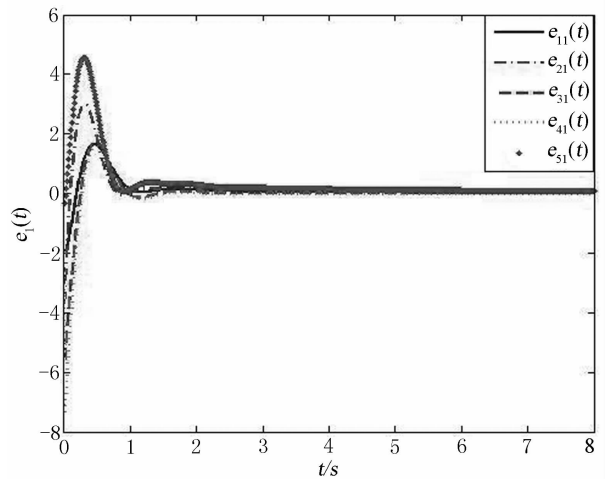
其中,  $\alpha = 0.95, x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T, i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

在式(7)所示的系统中, 选择系统参数为

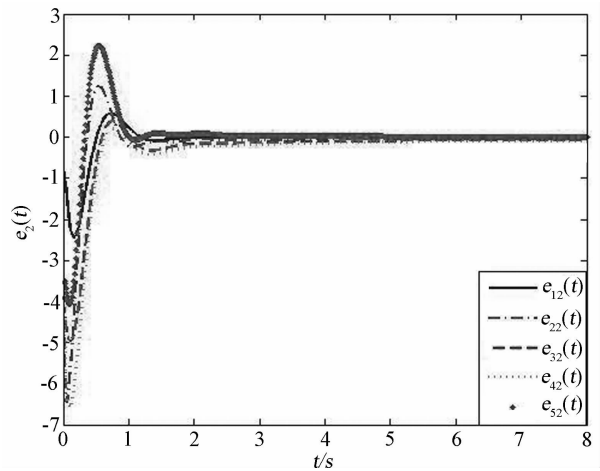
$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$



(a)



(b)

图 2 各跟随者与领航者之间的误差演化图

Fig.2 The error trajectories between the leader and each agent

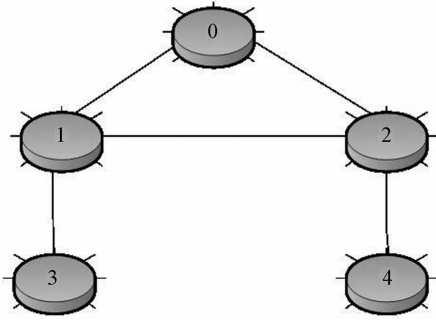


图 3 通信拓扑图

Fig. 3 Communication topology

$$\Delta = \text{diag}(\sin(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta)), \theta \in R;$$

$$f(x_i(t)) = [0 \quad -x_{i1}x_{i3} \quad x_{i1}x_{i2}]^T.$$

由图 3 可看出该网络的 Laplacian 的矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $H$  为

$$H = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

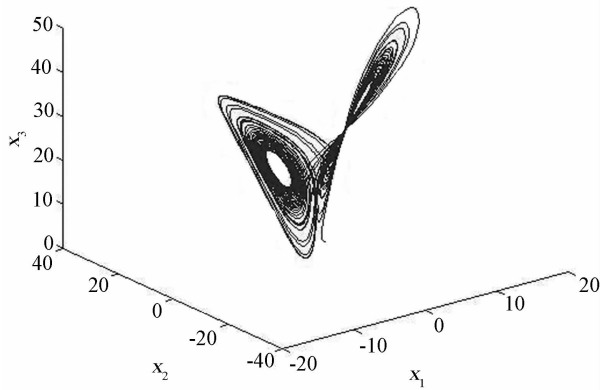
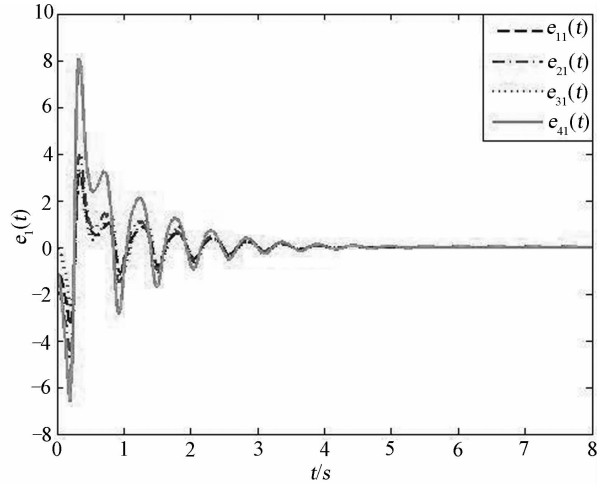


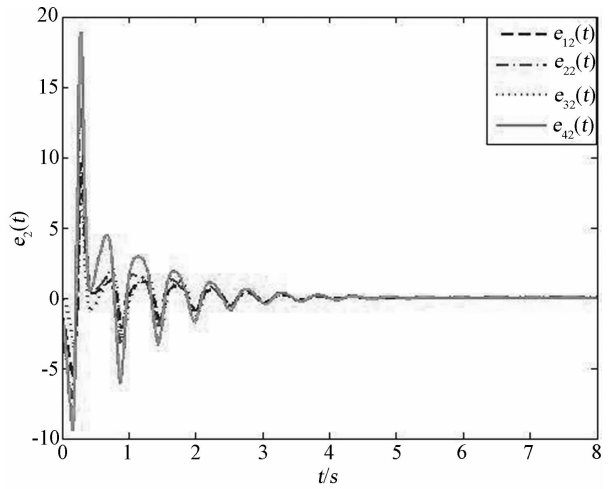
图 4 分数阶 Lorenz 系统的相位图

Fig. 4 Phase diagram for fractional-order Lorenz system

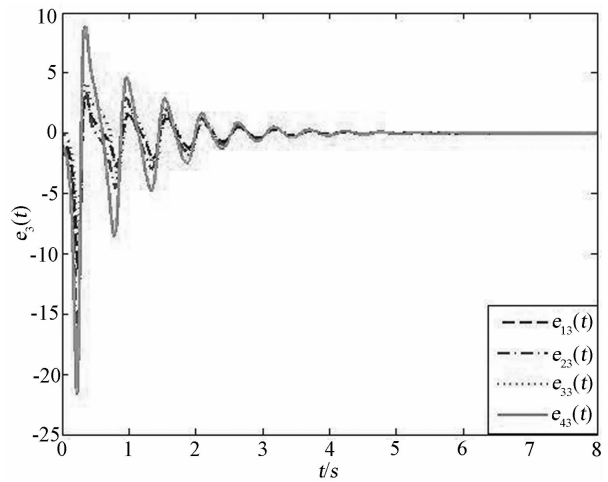
经计算  $\sigma_{\min}(H) = 0.3028$ ; 取初始值  $x_i(0) = (i, 2i, 3i)^T, i = 0, 1, 2, 3, 4$ . 通过 Matlab 的 LMI 工具箱得到式 (22) 的一个可行解  $K = [18.9640 \quad -4.1673 \quad 3.2414]$ . 在控制器(10)的作用下, 跟随智能体与领航智能体之间的误差演化图如图 5 所示.



(a)



(b)



(c)

图 5 各跟随者与领航者之间的误差演化图

Fig. 5 The error trajectories between the leader and each agent

## 5 结束语

本文利用分数阶系统的等价频率分布模型和李雅普诺夫稳定性理论,研究了具有领航者的不确定分数阶非线性多智能体系统的鲁棒一致性问题.利用预估-校正算法进行数值仿真,验证了理论分析的有效性与可行性.在今后的工作中,我们将致力于研究更多实际模型的一致性行为,如多个动态领航者,时滞,随机因素等对模型的干扰,将更具有实际意义.

### 参考文献:

- [1] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic system; algorithms and theory [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2006, 51(3): 401.
- [2] Lin Z Y, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2005, 50(1): 121.
- [3] Cortes J, Martinez S, Karatas T, *et al.* Coverage control for mobile sensing networks [J]. IEEE Trans Robotics Automat, 2004, 20(2): 243.
- [4] Chatterjee A. Statistical origins of fractional derivatives in viscoelasticity [J]. J Sound Vib, 2005, 284(3): 1239.
- [5] Baleanu D, Muslish S I. About fractional supersymmetric quantum mechanics [J]. Czech J Phys, 2005, 55(9): 1063.
- [6] Delavari H, Lanusse P, Sabarier J. Fractional order controller design for a flexible link manipulator robot [J]. Asian J Contr, 2013, 15(3): 783.
- [7] 张凡弟. 不同维数分数阶混沌系统的 Q-S 同步 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2014, 51(2): 331.
- [8] Aghababa M P. Robust stabilization and synchronization of a class of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17(6): 2670.
- [9] 卫一恒, 朱敏, 彭程, 等. 不确定分数阶时滞系统的鲁棒稳定性判定准则 [J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 511.
- [10] Yu Z Y, Jiang H J, Hu C. Leader-following consensus of fractional-order multi-agent systems under fixed network topology [J]. Neurocomputing, 2015, 149: 613.
- [11] 吴忠强, 王洋. 分数阶不确定多智能体系统的鲁棒一致性控制 [J]. 电机与控制学报, 2013, 17(4): 97.
- [12] Ni W, Cheng D Z. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies [J]. Sys Contr Letters, 2010, 59(3-4): 209.
- [13] Monie C A, Chen Y Q, Vinagre B M, *et al.* Fractional-order systems and controls; Fundamentals and applications [M]. London: Springer Verlag, 2010.
- [14] Trigeassou J C, Maamri N, Sabarier J. State variables and transients of fractional-order differential systems [J]. Comput Math Appl, 2012, 64(10): 3117.
- [15] Xie L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty [J]. Int J Contr, 1996, 63(4): 741.
- [16] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, *et al.* Linear matrix inequalities system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [17] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K L. Robust stabilization of uncertain linear systems; quadratic stability and  $H_\infty$  control theory [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1990, 35(3): 356.