doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 01. 001

广义 Rosenau 方程的有限元方法

何　挺，胡　兵，徐友才
（四川大学数学学院，成都 610064）

摘　要：本文对于广义的 Rosenau 方程提出了全离散 Galerkin 有限元格式，证明了此格式的有限元解的存在唯一性，并导出了误差估计，最后给出了数值算例验证了此方法的可靠性与有效性.

关键词：广义 Rosenau 方程；Euler 向后差分方法；全离散格式
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2016)01-0001-06

Finite element method for the generalized Rosenau equatoin

HE Ting，*HU Bing*，*XU You-Cai*
(College of Mathematics，Sichuan University，Chengdu 610064，China)

Abstract：In this paper，we present finite element method for the generalized Rosenau equation. We prove the uniqueness and existence solutions of the fully discretization and derive related optimal error estimates. Finally，we give example to show our method is stable and efficient.

Key words：Generalized Rosenau equation；Backward Euler method；Fully discretization
(2000 MSC 65M60)

1　引　言

在对离散系统稠密性的动态性研究中，波-波与波-墙交互的情形不能被著名的 Korteweg-de（KdV）方程所描述. 为了克服这一困难，Rosenau[1,2]提出了 Roseanu 方程

$$u_t+u_{xxxxt}+u_x+uu_x=0,\quad (x,t)\in[0,L]\times[0,T] \tag{1}$$

Park[3]对 Rosenau 方程的初边值问题做了数值研究. 为了对非线性波的进一步研究，在上述 Rosenau 方程中增加了黏性项 $-u_{xx}$，即

$$u_t+u_{xxxxt}-u_{xx}+u_x+uu_x=0,\quad (x,t)\in(0,L)\times(0,T] \tag{2}$$

进而为了考虑其初边值条件

$$\begin{cases}u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,L),\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & \\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(L,t)=0, & t\in(0,T]\end{cases} \tag{3}$$

文献[4]～[7]对问题(2)-(3)研究了其解的性质；文献[8]～[10]对问题(2)-(3)提出了很多新的有限差分格式方法；Hu，Xu，Hu(文献[11])对问题(2)-(3)给出了 Crank-Nicolson 有限差分格式方法，并通过数值算例验证了此格式对该问题的有效性；文献[12]对问题(2)-(3)提出了拟紧致 C-N 守恒差分格式；文献[13]对问题(2)-(3)提出了加权隐式差分方法；文献[14]首次把 Galerkin 有限元方法应用到求解问题(2)-(3)，研究了在全离散格式下的数值解的存在唯一性.

本文考虑如下广义的 Rosenau 方程：求 $u(x,t)$ 满足

收稿日期：2015-04-29
作者简介：何挺(1989－)，男，四川巴中人，硕士，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：hefengxigo2013@gmail.com
通讯作者：胡兵. E-mail：hubingscu@scu.edu.cn

$$u_t + u_{xxxxt} + f_x(u) = 0,$$
$$(x,t)\in(0,L)\times(0,T] \qquad (4)$$

以及如下初边值条件：

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x), \quad x\in(0,L). \\ u(0,t)=u(L,t)=0, \\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(L,t)=0, \quad t\in(0,T] \end{cases} \qquad (5)$$

这里 $f(u)=u+\dfrac{1}{p+1}u^{p+1}$，$p$ 是非负整数. 文献[15]对该问题给出了三层差分格式，并通过数值算例验证了此格式对于问题(4)-(5)的有效性，但并未见到用有限元方法求解该问题. 本文则针对该方程进行了 Galerkin 有限元研究.

本文结构如下：在第二节中对问题(4)-(5)的广义解的存在唯一性给出了证明. 在第三节中提出了全离散格式并讨论了该格式下的解的误差估计. 在第四节中给出了数值算例验证了此方法的有效性.

2 广义解的存在唯一性

本文沿用常用的 Sobolev 空间和范数的记号(见文献[16]). $L^2(\Omega)$ 表示在内积$(\cdot,\cdot)$下的平方可积函数空间，其上的范数或半范数分别记为$\|\cdot\|$和$|\cdot|$. 对于非负整数 m，$H^m(\Omega)$表示通常的 Sobolev 空间，其范数和半范数分别记为$\|\cdot\|_m$和$|\cdot|_m$. 首先定义如下空间：

$$V=\{v\in H^2(\Omega): v=0, \quad v_{xx}=0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

这里 Ω 是一维区间$[0,L]$. 在方程(4)等号两边同时乘以 $\chi\in V$ 并做内积，并运用格林公式和初边值条件(5)，得到下述变分形式：对 $t\in[0,T]$，求 $u(\cdot,t)\in V$ 满足

$$(u_t,\chi)+(u_{xxt},\chi_{xx})=(f(u),\chi_x),$$
$$\forall\chi\in V \qquad (6)$$
$$u(x,0)=u_0 \qquad (7)$$

为了便于分析，引入如下范数：$\forall u\in V$

$$|||u|||^2=\|u\|^2+\|u_{xx}\|^2.$$

由格林公式得到下面两个重要的不等式

$$\|u_x\|\leqslant|||u|||,\quad \|u\|_{H^2}\leqslant C|||u||| \qquad (8)$$

推论 2.1 设 u 是问题(6)-(7)的解，如果 $u_0\in V$，则有如下等式成立.

$$|||u(t)|||^2=|||u_0|||^2, \forall t\in(0,T] \qquad (9)$$

且存在一个正的常数 C 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\leqslant C|||u_0|||.$$

成立.

证明　在(6)式中令 $\chi=u$ 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u\|^2+\|u_{xx}\|^2]=\int_\Omega f(u)\,u_x\mathrm{d}x \qquad (10)$$

实际上，我们有

$$(f(u),u_x)=(u,u_x)+(\frac{1}{p+1}u^{p+1},u_x).$$

因为在边界上 $u=0$，所以

$$(f(u),u_x)=0 \qquad (11)$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|||u|||^2=0 \qquad (12)$$

上式两边关于 t 积分，就完成了对(9)的证明.

由(8)，(9)式与 Sobolev 嵌入不等式[16]，可得 $\|u\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\leqslant C\|u\|_{L^\infty(H^2)}\leqslant C|||u_0|||$.

对问题(6)-(7)解的存在唯一性，有如下结论：

定理 2.2　设 $u_0\in V$. 对于任意的 $T>0$，存在唯一的 $u(x,t)$ 满足式(6)，(7).

证明　设$\{\varphi_i\}(i=1,2,\ldots\infty)$是 V 的一组正交基，$V^m=span\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots\varphi_{N_h},\}$对于$t>0$ 定义

$$u^m(x,t)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)\varphi_j(x).$$

满足方程

$$(u_t^m,\chi)+(u_{xxt}^m,\chi_{xx})=(f(u^m),\chi_x),\ \chi\in V^m \qquad (13)$$
$$u^m(0)=u_{0,m} \qquad (14)$$

(13)，(14)式可以写成常微分方程的形式. 由 Picard′s 存在定理[17]可知，此方程有唯一的局部解. 因此，我们只需要延拓到全局即可.

因为

$$\|f(u^m)\|^2=\int_\Omega\left(\frac{1}{p+1}(u^m)^{p+1}+u^m\right)^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C(\Omega)\int_\Omega(u^m)^{2p+2}dx+C(\Omega)\int_\Omega(u^m)^2\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\,|||u_0|||^2 \qquad (15)$$

即 $f(u^m)$在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$是有界的.

因为$\{\varphi_j\}$在 V 是稠密的，再由弱收敛性的性质可知方程(6)的解对于任意 $t>0$ 均成立.

下面考虑唯一性：设 u,v 是方程(6)-(7)的两个解. 在(6)式中取 $w=u-v$，有

$$(w_t,\chi)+(w_{xxt},\chi_{xx})=$$
$$(f(u)-f(v),\chi_x),\quad\forall\chi\in V \qquad (16)$$

令 $\chi=w$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|||w(t)|||^2\leqslant C|||w(t)|||^2.$$

上式两边关于 t 积分

$$|||w(t)|||^2\leqslant|||w(0)|||^2+C\int_0^t|||w(s)|||^2\,\mathrm{d}s.$$

因为 $w(0)=0$，由 Gronwall 引理[18]得

$$\|w(t)\|^2 \leqslant e^{Ct}\|w(0)\|^2=0.$$

因此 $u=v$,即对于方程(6)-(7)存在唯一的弱解.

3　Galerkin 方法的全离散格式及误差估计

在本节中我们介绍 Galerkin 方法的全离散格式，其中在时间方向上应用 Euler 向后差分格式，在空间方向上则使用 Galerkin 有限元方法. 同时给出了在此格式下解的误差估计.

Euler 向后差分方法:设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ 是$[0,T]$的 划分. $\Delta t=\dfrac{T}{N}$ 表示时间步长,于是 $t^n=n\Delta t, n=0,1,2,\cdots,N$. 对于光滑函数 $u(x,t)$,定义

$$u^n=u(t^n),\ \partial_t u^n=\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}.$$

对 Ω 进行单元剖分,$J_i=[x_{i-1},x_i]$表示每个剖分单元,引入如下有限元空间:

$$V_h=\{v\in V: v|_{J_i}\in P_3\},$$

于是得到全离散格式:求 $U^n\in V_h$，满足

$$(\partial_t U^n,\chi)+(\partial_t U^n_{xx},\chi_{xx})=(f(U^n),\chi_x),\quad \partial\chi\in V_h \tag{17}$$

$$U^0=u_{0,h} \tag{18}$$

仿照推论 2.1 的证明,可以得到如下结论:

推论 3.1　设 U^n是问题(17)-(18)的一个解. 则有如下等式成立:

$$\|U^J\|^2=\|U^0\|^2,\quad 1\leqslant J\leqslant N \tag{19}$$

且存在一个正常数 C 使得

$$\|U^J\|_\infty\leqslant C\|U^0\|,\quad 1\leqslant J\leqslant N \tag{20}$$

成立.

对问题(17)-(18)解的存在唯一性有如下结论:

定理 3.2　已知 $U^0,U^1,\cdots,U^{n-1}$. 则当 Δt 足够小时存在一个唯一的解 $U^n(n>1)$ 满足方程(17)-(18).

证明　定义 V_h是希尔伯特空间 H,并且对 $\chi\in H$ 定义映射 g 如下:

$$(g(\chi),W)=(\chi-U^{n-1},W)+(\chi_{xx}-U^{n-1}_{xx},W_{xx})-\triangle t(f(\chi),W_x),\quad W\in V_h.$$

很明显 g 是连续的.

令 $W=\chi$. 由 Poincaré[18]不等式,存在常数 C 使得

$$\begin{aligned}(g(\chi),\chi)&=\|\chi\|^2+\|\chi_{xx}\|^2-(U^{n-1},\chi)-(U^{n-1}_{xx},\chi_{xx})\geqslant\\&\|\chi\|^2+\|\chi_{xx}\|^2-\|U^{n-1}\|\cdot\|\chi\|-\|U^{n-1}_{xx}\|\cdot\|\chi_{xx}\|\geqslant\\&\|\chi\|(\|\chi\|-C\|U^{n-1}\|).\end{aligned}$$

当$\|\chi\|\|=C\|U_{n-1}\|\|+1$ 时,有 $(g(\chi),)\chi>0$. 由 Brouwer 不动点定理[19]，存在 χ^*，满足 $g(\chi^*)=0$. 令 $U^n=\chi^*$. 于是,我们证明了问题(17)-(18)解的存在性.

对于唯一性,设 V^n是方程(17)-(18)的另一组解. 令 $E^n=U^n-V^n$得到

$$\frac{1}{\Delta t}(E^n-E^{n-1},\chi)+\frac{1}{\Delta t}(E^n_{xx}-E^{n-1}_{xx},\chi_{xx})=(f(U^n)-f(V^n),\chi_x),\quad \chi\in V_h \tag{21}$$

令 $\chi=E^n$ 可得

$$\begin{aligned}\|E^n\|^2&=\Delta t(f(U^n)-f(V^n),E^n_x)+(E^{n-1},E^n)+(E^{n-1}_{xx},E^n_{xx})\leqslant\\&\Delta t\|f(U^n)-f(V^n)\|\cdot\|E^n_x\|+\frac{1}{2}(\|E^{n-1}\|^2+\|E^n\|^2)+\\&\frac{1}{2}(\|E^{n-1}_{xx}\|^2+\|E^n_{xx}\|^2)\leqslant\\&\Delta t M\cdot\|U^n-V^n\|\cdot\|E^n_x\|+\frac{1}{2}\|E^{n-1}\|^2+\frac{1}{2}\|E^n\|^2\end{aligned} \tag{22}$$

此处 $M>0$. 上式移项可得

$$\|E^n\|^2\leqslant 2M\Delta t\cdot\|E^n\|\cdot\|E^n_x\|+\|E^{n-1}\|^2\leqslant 2M\Delta t\cdot\|E^n\|^2+\|E^{n-1}\|^2.$$

因此

$$(1-2M\Delta t)\|E^n\|^2\leqslant\|E^{n-1}\|^2.$$

当 Δt 足够小,再由 $E^0=0$ 可得 $E^n=0$. 即解是唯一的.

对问题(17)-(18)解的收敛性有如下结论:

定理 3.3　设 $U^0=\tilde{u}(0)$当空间步长 h,时间步长 Δt 足够小时,存在一个不依赖 h 与 Δt 的正常数 C 使得

$$\|u^n-U^n\|\leqslant C(u)(h^2+\triangle t),1\leqslant n\leqslant N \tag{23}$$

成立.

证明　在 $t=t^n$ 时刻,令

$$e^n=u(t^n)-U^n=(u(t^n)-\tilde{u}(t^n))-(U^n-\tilde{u}(t^n))=\eta^n-\theta^n.$$

$\tilde{u}$ 是 u 的多项式插值. 从 (17)式中减去(6) 得到

$$\left(\frac{\theta^n-\theta^{n-1}}{\Delta t},\chi\right)+\left(\frac{\theta_{xx}^n-\theta_{xx}^{n-1}}{\Delta t},\chi_{xx}\right)=$$
$$\left(\frac{\eta^n-\eta^{n-1}}{\Delta t},\chi\right)+\left(\frac{\eta_{xx}^n-\eta_{xx}^{n-1}}{\Delta t},\chi_{xx}\right)+$$
$$\left(u_t(t^n)-\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t},\chi\right)-(f(u^n)-$$
$$f(U^n),\chi_x)+\left(u_{xxt}(t^n)-\frac{u_{xx}^n-u_{xx}^{n-1}}{\Delta t},\chi_{xx}\right)\leqslant$$
$$\|f(u^n)-f(U^n)\|^2+\frac{\|\eta^n-\eta^{n-1}\|^2}{\Delta t}+$$
$$\frac{\|\eta_{xx}^n-\eta_{xx}^{n-1}\|^2}{\Delta t}+$$
$$\|u_t(t^n)-\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}\|^2+\|u_{xxt}(t^n)-$$
$$\frac{u_{xx}^n-u_{xx}^{n-1}}{\Delta t}\|^2+C\|\chi\|^2=$$
$$G_1+G_2+G_3+G_4+G_5+G_6=\sum_{i=1}^{6}G_i \tag{24}$$

下面逐步估计(24)式的 $G_i(i=1,2,\ldots,6)$.

由 f 的定义可得

$$G_1=\|f(u^n)-f(U^n)\|^2\leqslant$$
$$C\|u^n-U^n\|^2\leqslant C\|u^n-\tilde{u}(t^n)+$$
$$\tilde{u}(t^n)-U^n\|^2\leqslant C\|\theta^n-\eta^n\|^2\leqslant$$
$$C(\|\theta^n\|^2+\|\eta^n\|^2) \tag{25}$$

因为

$$\eta^n-\eta^{n-1}=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_t\,\mathrm{d}t$$

由 Hölder 不等式

$$\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_t\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant(\Delta t)\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\eta_t)^2\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$\|\eta^n-\eta^{n-1}\|^2\leqslant(\Delta t)\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\eta_t)^2\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$G_2\leqslant\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\eta_t\|^2\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

类似的,对于 G_3 有

$$G_3\leqslant\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\eta_{xxt}\|^2\,\mathrm{d}t \tag{27}$$

并注意

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})u_{tt}(s)\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}t\mathrm{d}u_t(t)-\frac{t_{n-1}}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}u_{tt}(s)\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{\Delta t}(t_nu_t(t_n)-t_{n-1}u_t(t_{n-1})-$$
$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}u_t(t)\mathrm{d}t-\frac{t_{n-1}}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}u_{tt}(t)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{t_nu_t(t_n)}{\Delta t}-\frac{t_{n-1}u_t(t_{n-1})}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta t}u(t_n)+$$
$$\frac{1}{\Delta t}u(t_{n-1})-\frac{t_{n-1}}{\Delta t}u_t(t_n)+\frac{t_{n-1}}{\Delta t}u_t(t_{n-1})=$$
$$u_t(t_n)-\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}.$$

应用 Hölder 不等式有

$$G_4=\|u_t(t_n)-\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}\|^2=$$
$$\|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})u_{tt}(s)\mathrm{d}s\|^2\leqslant$$
$$\Delta t\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{28}$$

对 G_5 用同样的方法,得到

$$G_5=\|u_{xxt}(t^n)-\frac{u_{xx}^n-u_{xx}^{n-1}}{\Delta t}\|^2\leqslant$$
$$\Delta t\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{xxtt}(s)\|^2\mathrm{d}s \tag{29}$$

在(24)式中令 $\chi=\theta^n+\theta^{n-1}$,可得到

$$\left(\frac{\theta^n-\theta^{n-1}}{\Delta t},\theta^n+\theta^{n-1}\right)+$$
$$\left(\frac{\theta_{xx}^n-\theta_{xx}^{n-1}}{\Delta t},\theta_{xx}^n+\theta_{xx}^{n-1}\right)\leqslant$$
$$\|f(u^n)-f(U^n)\|^2+\frac{\|\eta^n-\eta^{n-1}\|^2}{\Delta t}+$$
$$\frac{\|\eta_{xx}^n-\eta_{xx}^{n-1}\|^2}{\Delta t}+\|u_t(t^n)-\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}\|^2+$$
$$\|u_{xxt}(t^n)-\frac{u_{xx}^n-u_{xx}^{n-1}}{\Delta t}\|^2+C\|\theta^n+\theta^{n-1}\|^2.$$

结合式(25)~(29)得到

$$\frac{1}{\Delta t}(\|\theta^n\|^2-\|\theta^{n-1}\|^2)\leqslant C(\|\theta^n\|^2+$$
$$\|\eta^n\|^2)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\eta_t\|^2\mathrm{d}s+$$
$$\Delta t\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s+C\|\theta^n+\theta^{n-1}\|^2.$$

对 n 从 1 到 J 累加并注意 $\theta^0=0$,得到

$$\|\theta^J\|^2-\|\theta^0\|^2\leqslant C(\Delta t)\sum_{n=1}^{J}\|\eta^n\|^2+$$
$$\Delta t\int_0^T\|\eta_t\|^2\mathrm{d}s+(\Delta t)^2\int_0^T\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s+$$
$$\Delta t\cdot\sum_{n=1}^{J}\|\theta^n\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{J}\|\theta^{n-1}\|^2.$$

上式移项可得

$$(1-\Delta t)\|\theta^J\|^2 \leqslant C(\Delta t)\left(\sum_{n=1}^{J}\|\eta^n\|^2+\int_0^T\|\eta_t\|^2\mathrm{d}s+\Delta t\int_0^T\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s\right)+\Delta t\sum_{n=1}^{J-1}\|\theta^n\|^2.$$

因此

$$\|\theta^J\|^2 \leqslant C(\Delta t\sum_{n=1}^{J}\|\eta^n\|^2+\Delta t\int_0^T\|\eta_t\|^2\mathrm{d}s+(\Delta t)^2\int_0^T\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s)+\frac{\Delta t}{1-\Delta t}\sum_{n=1}^{J-1}\|\theta^n\|^2.$$

再由离散的 Gronwall 引理[18]得到

$$\|\theta^J\|^2 \leqslant C\left(\Delta t\cdot\sum_{n=1}^{J}\|\eta^n\|^2+\Delta t\int_0^T\|\eta_t\|^2\mathrm{d}s+(\Delta t)^2\int_0^T\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s\right).$$

最后由插值误差估计[18]就完成了证明. 证毕.

4　数值试验

考虑当 $p=2$ 时的非齐次方程

$$u_t+u_{xxxxt}+u_x+u^2u_x=g(x,t),$$
$$\forall(x,t)\in(0,1)\times(0,1],$$

其中

$$g(x,t)=3xu^2\mathrm{e}^{-t}(x^6\mathrm{e}^{-2}(x-1)^6+1)(2x-1)(x-1)^2-72\mathrm{e}^{-t}(x-1)^2-108x\mathrm{e}^{-t}(2x-2)-x^3\mathrm{e}^{-t}(x-1)^3-72x^2\mathrm{e}^{-t},$$

初始值设为

$$u(x,0)=x^3(x-1)^3,$$

在边界上满足

$$u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t),\quad t\in(0,1].$$

其精确解为

$$u(x,t)=e^{-t}x^3(x-1)^3.$$

表 1　收敛阶的验证(L^2 误差)

Tab. 1　Verification for the convergence order(L^2 error estimates)

	$h=\frac{1}{16},\ \tau=h^2$	$h=\frac{1}{32},\ \tau=h^2$	$h=\frac{1}{64},\ \tau=h^2$	$h=\frac{1}{128},\ \tau=h^2$
$t=0.1$	4.62925e−006	1.13456e−006	2.83069e−007	7.08026e−008
$t=0.2$	9.60565e−006	2.36302e−006	5.94633e−007	1.48676e−007
$t=0.3$	1.48333e−005	3.71457e−006	9.33135e−007	2.33890e−007
$t=0.4$	2.06813e−005	5.15354e−006	1.29795e−006	3.24741e−007
$t=0.5$	2.66626e−005	6.69405e−006	1.68466e−006	4.20111e−007
$t=0.6$	3.31151e−005	8.28611e−006	2.08702e−006	5.21478e−007
$t=0.7$	3.97534e−005	9.91817e−006	2.50147e−006	6.25908e−007
$t=0.8$	4.61662e−005	1.15739e−005	2.91547e−006	7.27886e−007
$t=0.9$	5.27108e−005	1.31828e−005	3.32324e−006	8.33103e−007
$t=1.0$	5.89516e−005	1.47334e−005	3.71173e−006	9.27929e−007

将上述方程按格式(17)-(18)离散，表 1 列出了不同剖分下的误差估计. 根据表格 1 中的数据结果可以看出当空间步长逐渐变小时计算结果也逐渐变好.

参考文献：

[1] Rosenaul P. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line[J]. Physica Scripta, 1986, 34: 827.

[2] Rosenaul P. Dynamics of dense systems[J]. Prog Theor Phys, 1998, 79: 1028.

[3] Park M A. On the Rosenau equation[J]. Appl Comput, 1990, 9: 145.

[4] Liu L, Mei M. A better asymptotic profile of Rosenau-Burgers equation[J]. Appl Math Comput, 2002, 131: 147.

[5] Mei M. Long-time behavior of solution for Rosenau-Burgers equation (I)[J]. Appl Anal, 1996, 63: 315.

[6] Mei M. Long-time behavior of solution for Rosenau-Burgers equation (II)[J]. Appl Anal, 1998, 68: 333.

[7] Liu L P, Mei M, Wong Y S. Asymptotic behavier of solutions to the Rosenau equation with a periodic

initial boundary [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67: 2527.

[8] 刘艳,阿布都热西提·阿布都外力. Rosenau-Burges方程一种新的数值解法[J]. 工程数学学报, 2011, 28(5): 665.

[9] 邵新慧,薛冠宇,沈海龙. Rosenau-Burges方程的一种新的差分方法[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(10): 1693.

[10] Du Y, Xu Y, Hu B. Three level finite difference scheme for Rosenau-Burgers equation[J]. J Sichuan Univ: Nat SCi Ed, 2010, 47(1): 1.

[11] Hu B, Xu Y, Hu J. Crank-Nicolson finite difference scheme for the Rosenau-Burgers equation[J]. Appl Mathe Comp, 2008, 204(1): 311.

[12] 傅雨泽, 胡兵, 郑茂波. Rosenau-RLW方程的拟紧致C-N守恒差分格式[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2014, 51(6): 1143.

[13] 廖光源, 胡兵, 郑茂波. Rosenau-Burgers方程的加权隐式差分方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2014, 51(6): 1108.

[14] 吕小芳, 胡兵, 闵心畅. Rosenau-Burgers方程的Galerkin有限元方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2011, 2: 283.

[15] Wang M, Li D, Cui P. A conservative finite difference scheme for the generalized Rosenau equation. Int J Pure Appl Math, 2011, 71(4): 539.

[16] Adams R A . sobolev spaces[M]. New York: Academic Press,1975.

[17] 张伟年,杜正东,徐冰. 常微分方程[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[18] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[19] Kesavan S. Topics in functional analysis and applications[M]. New Delhi: Wiley, 1989.