doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.006

基于 H(div)型有限元的非定常 Navier-Stokes 方程的涡旋黏性法

樊新玉[1]，李 辉[2]，冯民富[1]
(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 四川石油天然气建设工程有限责任公司，成都 610200)

摘 要：本文结合涡旋黏性思想与 H(div)型有限元(如 RT 元和 BDM 元)逼近，对不可压非定常 Navier-Stokes 方程提出了一种新的稳定化有限元格式. 这种格式不但满足守恒条件，而且克服了对流占优引起的振荡. 通过半离散有限元格式，本文得到了与约化雷诺数相关而与雷诺数无关的误差估计.

关键词：非定常不可压 Navier-Stokes 方程；子格涡旋黏性法；高雷诺数；H(div)稳定元
中图分类号：O242.21 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)06-1159-10

H(div) element-based eddy viscosity method for time-dependent Navier-Stokes equation

FAN Xin-Yu[1], *LI Hui*[2], *FENG Min-Fu*[1]
(1. College of Mathmatics, Sichuan Univerity, Chengdu 610064, China;
2. Sichuan Petroleum and Gas Construction Engineering Co. Ltd., Chengdu 610200, China)

Abstract: A new stabilized finite element formulation for incompressible time-dependent Navier-Stokes equation with high Reynolds number is presented. This formulation combines subgrid eddy viscosity methods with H(div) finite element (for example,RT and BDM finite element) approximation, satisfies the conservation condition,and controls spurious oscillations in the velocities. The stability and error estimate for finite element semidiscrete scheme are derived. The constants in these error estimates are independent of the Reynolds number as well as rely on a reduced Reynolds number.

Keywords: Impressible Navier-Stokes equations; Subgrid eddy viscosity method; High Reynolds number; H(div) stable elements
(2010 MSC 65M60, 76D05)

1 引 言

为了求解具有高雷诺数的非定常 Navier-Stokes 方程，我们结合涡旋黏性方法与 H(div)稳定元，得到一个稳定的有限元格式.

稳定的混合有限元方法是求解 Navier-Stokes 方程的基础. 速度-压力逼近满足 inf-sup 条件的重要性是众所周知的. 已经有一些满足 inf-sup 条件的混合有限元，比如 Mini 元、Scott 元及 H (div)稳定元. 然而，当我们使用 LBB 稳定元时，具有高雷诺数的非定常 Navier-Stokes 方程的数值解会产生激烈振荡.

目前，由于 SUPG(SD)方法具有很好的稳定性和精度，我们常用此方法来解决上述缺陷. 不

收稿日期：2015-10-31
作者简介：樊新玉(1988－)，女，硕士，主要研究方向为计算数学. E-mail：1270474147@qq.com
通讯作者：冯民富. E-mail：fmf@wtjs.cn

过，SUPG 方法也有一些我们不希望出现的性质，特别是:引进了额外的速度和压力的非线性耦合项;在边界处出现振荡的数值解;且当使用高阶元时需要求二阶导数. 而稳定的有限元方法——如变分多尺度(VMS)方法[1-5] 和局部投影稳定性(LPS)方法[6-10]——不仅有很好的精度，而且也避免了 SUPG 方法的弊端.

作为一种稳定对流占优的有限元方法,近年来涡旋黏性方法受到了人们的广泛关注. 涡旋黏性法在子网格上添加具有低阶导数的人工黏性项. 这个思想首先是由 Guermond[11] 提出,他在原有的有限元空间上采用泡函数作为子格空间的增强. 之后，Layton 将此方法推广到定常的对流扩散问题[2]，得到可与 SUPG 方法相比的误差估计. John 和 Kaya 则将此方法推广到非定常的 Navier-Stokes 方程[1]，得到与雷诺数相关的误差估计. 此外,LPS 方法也可作为子格涡旋黏性法的特例. Chen 将此方法推广到非定常的 Navier-Stokes 方程[12]，得到与雷诺数无关的误差估计. 基于这种思想，我们也可以用满足 inf-sup 条件的不稳定元，通过全离散有限元格式来求解非定常的 Navier-Stokes 方程[4,5].

上述的研究都是基于连续的速度逼近. 而 Kaya[13] 提出了不连续的子格涡旋黏性方法来求解非定常的 Navier-Stokes 方程，得到与雷诺数相关的误差估计.

一般来说，满足 LBB 稳定性条件的 $H^1\times L^2$ 协调元或不连续的 Galerkin 元所对应的有限元逼近很难满足守恒性条件 $\nabla\cdot u^h(x)=0$. 守恒性条件 $\nabla\cdot u^h(x)=0$(散度为 0)需要数值解 u^h 属于 Sobolev 空间 $H(\mathrm{div},\Omega)$. 当守恒性条件需要满足时，不连续的 Galerkin 方法[2,14] 是不可用的. 另一方面，$H^1\times L^2$ 协调有限元方法需要 u^h 是连续的，所以不满足守恒性的条件. 综上，$H(\mathrm{div},\Omega)$稳定元来逼近 Navier-Stokes 方程的解是合适的.

当前有许多 $H(\mathrm{div},\Omega)$稳定元，如定义在三角形或四面体上的 RT 类型元 $RT_k(K)$，三角形或四面体上的 BDM 类型元 $BDM_k(K)$，定义在矩形上的 BDM 类型元 $BDM_{[k]}(K)$，等. 文献[15,16]已经用 $H(\mathrm{div},\Omega)$稳定元分别讨论了静态的 Stokes 方程和 Navier-Stokes 方程，得到满足守恒性条件的解. 本文继续用 H(div)稳定元来研究具有高雷诺数的非定常的 Navier-Stokes 方程. 通过将涡旋黏性思想与 H(div)型有限元逼近(比如 RT 元和 BDM 元)相结合,本文对不可压非定常 Navier-Stokes 方程提出了一种新的稳定化有限元格式. 利用半离散有限元格式,我们得到了稳定的与约化雷诺数相关的误差估计.

文章安排如下. 第 2 节介绍一些预备的知识，引入一些标准的 Sobolev 记号. 第 3 节建立有限元格式. 第 4 节给出半离散有限元格式的误差估计.

2 预备知识

不可压的非定常 Navier-Stokes 方程如下:

$$\begin{cases} u_t-v\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=f \text{ in } \Omega \\ \quad \text{for } 0<t\leqslant T, \\ \nabla\cdot u=0 \text{ in } \Omega \text{ for } 0<t\leqslant T, \\ u=u_0 \text{ in } \Omega \text{ for } t=0, \\ u=0 \text{ on } \partial\Omega \text{ for } 0<\leqslant T \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u(x,t)$ 是流体速度，$u_0(x)$ 是初始速度，$p(x,t)$ 是压力，$f(x,t)$ 是作用在流体上的外部单位体积力，$\nu=\mathrm{Re}^{-1}$ 是黏性系数，Re 是雷诺数，$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通流体区域，且 $\int_\Omega p=0$.

对于 $s,r\geqslant 1$，我们定义 Sobolev 空间

$$W^{s,r}(\Omega)=\{v\in L^r(\Omega):\forall\,|m|\leqslant s,\partial^m v\in L^r(\Omega)\},$$

其中∂^m 是 v 的 $|m|$ 次偏导. 定义范数、半范数分别为$\|\cdot\|_{s,r,\Omega}$，$|\cdot|_{s,r,\Omega}$.

$H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$，$H^s(\Omega)(s\geqslant 0)$表示标准的 Sobolev 空间. 定义内积、范数、半范数分别为$(\cdot,\cdot)_{s,\Omega}$，$\|\cdot\|_{s,\Omega}$，$|\cdot|_{s,\Omega}$，其中

$$|v|_{s,\Omega}=\Big[\sum_{|\alpha|=s}\int_\Omega|\partial^\alpha v|^2\mathrm{d}\Omega\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

多重指标定义如下

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\partial^\alpha=\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}.$$

定义 $H^s(\Omega)$中的范数

$$\|v\|_{s,\Omega}=\Big(\sum_{j=0}^{s}|v|^2_{j,\Omega}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

空间 $L^2_0(\Omega)$是 $L^2(\Omega)$的一个子空间，且有

$$L^2_0(\Omega)=\Big\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\mathrm{d}\Omega=0\Big\}.$$

空间 $H(\mathrm{div};\Omega)$定义为在 Ω 上的向量值函数空间，它的每个分量函数及散度都是平方可积的，即

$H(\mathrm{div};\Omega)=$

$$\{v : v \in (L^2(\Omega))^2, \nabla\cdot v \in L^2(\Omega)\}.$$

其范数定义为

$$\|v\|_{H(div;\Omega)} = (\|v\|^2 + \|\nabla\cdot v\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $K\subset\Omega$ 是一个三角形或矩形，对任意光滑函数 w,v，由格林公式得

$$\int_K(-\Delta w)\cdot v\mathrm{d}K = (\nabla w,\nabla v)_K - \int_{\partial K}\frac{\partial w}{\partial n_K}\cdot v\mathrm{d}s \tag{2}$$

其中 n_K 是 K 的边界 ∂K 的外法向量，且

$$(\nabla w,\nabla v)_K = \sum_{i,j=1}^{2}\int_K\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}K.$$

设 τ_K 是边界 ∂K 的切向量，且 ∂K 的外法向量 n_K 与 τ_K 服从右手坐标系. 令

$$v=(v\cdot n_K)n_K+(v\cdot\tau_K)\tau_K,$$

$$w=(w\cdot n_K)n_K+(w\cdot\tau_K)\tau_K.$$

则

$$\frac{\partial w}{\partial n_K}\cdot v=\frac{\partial(w\cdot n_K)}{\partial n_K}(v\cdot n_K)+\frac{\partial(w\cdot\tau_K)}{\partial\tau_K}(v\cdot\tau_K) \tag{3}$$

定义

$$W = \{v\in H_0^1(\Omega):\nabla\cdot v = 0\},$$

$$H = \{v\in(L^2(\Omega))^2:\nabla\cdot v = 0, v\mid_{\partial\Omega} = 0\}.$$

对于任意的关于时间 t，空间 x 的函数 Φ

$$\Phi(t)(x)=\Phi(t,x),\forall t\in[0,T],x\in\Omega.$$

函数空间 Y，对应范数 $\|\cdot\|_Y,\Phi=\Phi(t,x)\in Y$. 那么对于任意 $s>0$，我们有

$$\|\Phi\|_{L^s(0,T;Y)} = \left\{\int_0^T\|\Phi(t)\|_Y^s\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{s}},$$

$$\|\Phi\|_{L^\infty(0,T;Y)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Phi(t)\|_Y.$$

向量函数 Φ 对应的张量 $\nabla\Phi$ 定义为 $(\nabla\Phi)_{i,j} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}$. 两个张量 T 和 S 的内积定义为 $T:S = \sum_{i,j}T_{i,j}S_{i,j}$.

为简单起见，我们假设是 Ω 凸多边形区域，Γ_h 是区域 Ω 的拟一致三角剖分或凸四边形剖分. 对任意的单元 $K_1,K_2\in\Gamma_h$ 的相邻边 e，在 e 上的外法向量和切向量分别是 n_1,τ_1 和 n_2,τ_2.

如果 $f\in L^2(0,T;W')$，速度 u 的初始值 $u_0\in H$，那么方程(1)存在唯一解 (u,p)，且有[17]

$$u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)\cap L^2(0,T;W).$$

本文第 4 部分的误差分析需要精确解 (u,p) 的额外正则性：$u\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)),p\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. 这个假设是合理的，如果数值选取如下[17]：$f\in L^\infty(0,T;H)$，$f_t\in L^2(0,T;W')$，$f(0)\in H$，$u_0\in H^2(\Omega)\cap W$.

泛函空间定义如下：

$$V=\{v\in(L^2(\Omega))^2:v\mid_{K_j}\in W^{2,\frac{4}{3}}(K_j),\forall K_j\in\Gamma_h\},$$

$$Q=\{q\in(L_0^2(\Omega))^2:q\mid_{K_j}\in W^{1,\frac{4}{3}}(K_j),\forall K_j\in\Gamma_h\}.$$

记 V^h 和 Q^h 分别为速度和压力的有限元空间，定义如下：

$$V^h=\{v^h\in H(\mathrm{div};\Omega): v^h\mid_K\in V_r(K),\forall K\in\Gamma_h, v^h\cdot n\mid_{\partial\Omega}=0\},$$

$$Q^h=\{q^h\in Q:q^h\mid_K\in W_m(K),\forall K\in\Gamma_h\},$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的外法向量，$V_r(K,r\geqslant 1)$ 是单元 K 上的阶数不超过 r 的向量值多项式空间，$W_m(K)$ 是在单元 K 上的阶数不超过 m 的多项式空间，且 $m\geqslant 0$. 对于不同类型的 $H(\mathrm{div})$ 元，$V_r(K)$，$W_m(K)$ 的具体形式在第 4 部分中给出.

下面我们列举一些常用的迹不等式和反不等式如下：

$$\|v\|_{0,e}\leqslant C(h_K^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{0,K}+h_K^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{0,K}),e\in\partial K,v\in V;$$

$$\|\nabla v\|_{0,e}\leqslant C(h_K^{-\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{0,K}+h_K^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 v\|_{0,K}),e\in\partial K,v\in V;$$

$$\|v\|_{L^4(e)}\leqslant C(h_K^{-\frac{3}{4}}\|v\|_{0,K}+h_K\|\nabla v\|_{0,K}),e\in\partial K,v\in V;$$

$$\|v^h\|_{0,e}\leqslant C(h_K^{-\frac{1}{2}}\|v^h\|_{0,K}),\forall e\in\partial K,v^h\in V^h;$$

$$\|\nabla v^h\|_{0,e}\leqslant C(h_K^{-\frac{1}{2}}\|\nabla v^h\|_{0,K}),\forall e\in\partial K,v^h\in V^h;$$

$$\|\nabla v^h\|_{0,K}\leqslant C(h_K^{-1}\|v^h\|_{0,K}),\forall v^h\in V^h;$$

$$\|v^h\|_{L^4(K)}\leqslant C(h_K^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{0,K}),\forall v^h\in V^h.$$

3　有限元格式

对问题(1)的第 1 个方程，取任意的 $v\in V$ 作为测试函数，由(2)式得

$$\sum_{K\in\Gamma_h}(u_t,v)_K+\sum_{K\in\Gamma_h}\Big(\nu(\nabla u,\nabla v)_K-\nu\int_{\partial K}\frac{\partial u}{\partial n_K}\cdot v\mathrm{d}s+(u\cdot\nabla u,v)_K\Big)-(p,\nabla\cdot v)+(\nabla\cdot u,q)=(f,v) \tag{4}$$

这里我们用到散度公式

$$\int_\Omega\nabla p\cdot v\mathrm{d}\Omega=-(p,\nabla\cdot v).$$

由于 $v \in V$，因此 $v \cdot n_K$ 在区域 Ω 的内部边界上是连续的，从而

$$\sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\frac{\partial(u)}{\partial n_K}\cdot v\mathrm{d}s = \sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\frac{\partial(u\cdot\tau_K)}{\partial n_K}v\cdot\tau_K\mathrm{d}s \tag{5}$$

我们有

$$(u_t,v)+(\nabla_h u,\nabla_h v)+\sum_{K\in\Gamma_h}(u\cdot\nabla u,v)_K-(p,\nabla\cdot v)-\nu\sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\frac{\partial(u\cdot\tau_K)}{\partial n_K}(v\cdot\tau_K)\mathrm{d}s+(\nabla\cdot u,q)=(f,v) \tag{6}$$

为简化上式中的边界积分项，我们引入了均值算子 $\{\cdot\}$ 和跳跃算子 $[\cdot]$：

1. 若内部边界 $e\in K_1\cap K_2$，我们有

$$\{\varepsilon(w)\}=\frac{1}{2}(n_1\cdot\nabla(w\cdot\tau_1)\mid_{\partial K_1}+n_2\cdot\nabla(w\cdot\tau_2)\mid_{\partial K_2}),$$
$$[w]=w\mid_{\partial K_1}\cdot\tau_1+w\mid_{\partial K_2}\cdot\tau_2.$$

2. 若 $e\in\partial K_1\cap\Omega$，则上式可写为

$$\{\varepsilon(w)\}=n_1\cdot\nabla(w\cdot\tau_1)\mid_{\partial K_1},$$
$$[w]=w\mid_{\partial K_1}\cdot\tau_1,$$

其中 ε_h 表示剖分 Γ_h 中所有单元 K 的边界集合. 对于充分光滑的速度 u，即$u\in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$，我们有

$$\int_{\partial K}\frac{\partial(u\cdot\tau_K)}{\partial n_K}(v\cdot\tau_K)\mathrm{d}s=\sum_{e\in\varepsilon_h}\int_e\{\varepsilon(u)\}[v]\mathrm{d}s \tag{7}$$

引入三线性项

$$c_1(u,v,w):=c(u,v,w)+b_1(u,v,w) \tag{8}$$

其中

$$c(u,v,w)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{K\in\Gamma_h}(u\cdot\nabla v,w)_K-\sum_{K\in\Gamma_h}(u\cdot\nabla w,v)_K\Big) \tag{9}$$

$$b_1(u,v,w)=\frac{1}{2}\sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}(u\cdot n)(v\cdot w)\mathrm{d}s \tag{10}$$

三线性项 $c_1(u,v,w)=0$ 关于后两个变量 v,w 是反对称的，即 $c_1(u,v,v)=0$. 由于在边界$\partial\Omega$ 上有 $v=0$，那么

$$\frac{1}{2}\sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}(u\cdot n)(v\cdot w)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^0}\int_e(u\cdot n)(v_L\cdot w_L-v_Rw_R)\mathrm{d}s \tag{11}$$

其中 n 是 e 边界上的一个法向量，$w|_L$，$w|_R$ 分别为 w 在边界 e 上的右边迹和左边迹，ε_h^0 是所有的内部边界的集合

$$V^h=\{v^h\in H(\mathrm{div};\Omega):v^h\mid_K\in V_r(K),\ \forall K\in\Gamma_h,v^h\cdot n\mid_{\partial\Omega}=0\},$$
$$w|_L=\lim_{t\to0^+}w(x-tn).$$
$$w|_R=\lim_{t\to0^-}w(x-tn).$$

由于 $v\in H_0^1(\Omega)^2$，我们有 $v_L=v_R$，即

$$v_L\cdot w_L-v_R\cdot w_R=v_R\cdot w_L-v_L\cdot w_R.$$

因此(8)式可改写为

$$\sum_{K\in\Gamma_h}(u\cdot\nabla v,w)_K=c(u,v,w)+\frac{1}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^0}\int_e(u\cdot n)(v_R\cdot w_L-v_Lw_R)\mathrm{d}s \tag{12}$$

记

$$S_\beta(u,v):=\nu\sum_{e\in\varepsilon_h}\int_e(\alpha h_e^{-1}[v][u]+\beta\{\varepsilon(v)\}[u])\mathrm{d}s \tag{13}$$

其中 $\alpha>0$ 是一稳定参数，$\beta=\pm1$，h_e 是 e 的长度. 当 $u\in H_0^1(\Omega)^2$，$v\in V$ 时，$S_\beta(u,v)=0$.

定义双线性泛函 $d_\beta(u,v)$和 $b(v,p)$ 如下：

$$d_\beta(u,v)=\nu(\nabla_h u,\nabla_h v)+S_\beta(u,v)-\nu\sum_{e\in\varepsilon_h}\int_e\{\varepsilon(u)\}[v]\mathrm{d}s \tag{14}$$

$$b(v,p)=(\nabla\cdot v,p) \tag{15}$$

其中

$$(\nabla_h w,\nabla_h q)=\sum_{K\in\Gamma_h}(\nabla w,\nabla q)_K.$$

我们得到问题(1)的变分形式为

$$(u_t,v)+d_\beta(u,v)+c(u,u,v)-b(v,p)+b(u,q)=(f,v),\ \forall v\in V,q\in W \tag{16}$$

$$(u(0),v)=(u_0,v),\ \forall v\in V \tag{17}$$

引入两个范数 $\|\cdot\|_Y$ 与 $\|\cdot\|_X$：

$$|v|_Y^2=|v|_{1,h}^2+\sum_{e\in\varepsilon_h}h_e^{-1}|[v]|_e^2 \tag{18}$$

$$\|v\|_X^2=\|v\|_Y^2+\sum_{e\in\varepsilon_h}h_e\|\{\varepsilon(v)\}\|_e^2 \tag{19}$$

其中

$$|v|_{1,h}^2=\sum_{K\in\Gamma_h}|v|_{1,K}^2,$$
$$\|v\|_e^2=\int_e v\cdot v\mathrm{d}s.$$

我们考虑在粗网格上引入涡旋黏性的人工扩散. 设 Γ 是一个粗网格，Γ_h 是 Γ_H 的细分网格剖分，其中 $h\ll H$. 定义 L 是张量积空间 $L^2(\Omega)^{2\times2}$. 考

虑它的有限维子空间 L_H，使得定义 $P_H:L\to L_H$ 是 L 到 L_H 上的 $L^2(\Omega)$ 正交投影. I 是恒等映射. 因此我们有

$$\|(I-P_H)\|\leqslant 1 \tag{20}$$

$$\|(I-P_H)\nabla v\|_{0,\Omega}\leqslant CH^r|v|_{r+1,\Omega} \tag{21}$$

其中 C 与 h，H 无关，$V\in(H^{r+1}(\Omega))^2$.

定义双线性泛函 $g:V^h\times V^h\to\mathbf{R}$：

$$g(v,w)=\nu_T\|(I-P_H)\nabla v\|_0^2\sum_{j=1}^{N_h}\int_{K_j}(I-P_H)\nabla v:(I-P_H)\nabla w$$

为人工涡旋黏性项. 当 $v=w$ 时，我们有

$$g(v,v)=\nu_T\|(I-P_H)\nabla v\|_0^2=\nu_T(\|\nabla v\|_0^2-\|P_H\nabla v\|_0^2)=\nu_T\left(1-\frac{\|P_H\nabla v\|_0^2}{\|\nabla v\|_0^2}\right)\|\nabla v\|_0^2=\nu_{add}\|\nabla v\|_0^2 \tag{22}$$

定义

$$\mathrm{Re}_{red}:=(\alpha_0\nu+\inf_{t\in(0,T]}\nu_{add}(\nu(t)))^{-1}.$$

由于

$$0\leqslant\|P_H\nabla v\|_0\leqslant\|\nabla v\|_0,$$

我们有 $0\leqslant\nu_{add}\leqslant\nu_T$. 因而我们得到的有限元格式为：

对于任意的 $t>0$，求 $(u_t^h(t),p_t^h(t))\in V^h\times Q^h$，对于所有的 $v^h\in V^h$，$q^h\in Q^h$，使得

$$(u_t^h,v^h)+d_\beta(u_t^h,v^h)+c_1(u^h,u^h,v^h)-b(v^h,p^h)+g(u^h,v^h)+b(u^h,q^h)=(f,v^h) \tag{23}$$

$$(u_0^h,v^h)=(u_0,v^h) \tag{24}$$

参考文献[12]，算子的有界性质及泛函分析，我们可以证明有限元格式解的存在性及唯一性.

4　误差估计

引理 4.1[17]　三线性项 $c(u,v,w)$ 有如下的性质：

(1) $\forall u,v\in V^h$，$c(u,v,v)=0$；

(2) $\forall u,v,w\in V^h$，存在与 h 无关的常数 C_1，使得 $c(u,v,w)\leqslant C_1\|u\|_X\|v\|_X\|w\|_X$.

引理 4.2[17]　若单元 $K\in\Gamma_h$，那么对于任意的函数 $f\in H^1(K)$，有

$$|f|_e^2\leqslant C(h_K^{-1}|f|_K^2+h_K|\nabla f|_K^2).$$

特别地，对 $e=K_1\cap K_2$ 和任意的 $v\in V^h$，由 $\varepsilon(v)$ 的定义有

$$h_e\|\{\varepsilon(v)\}\|_e^2\leqslant C\sum_{i=1}^{2}(\|\nabla v\|_{K_i}^2+h_{K_i}^2\|\nabla^2v\|_{K_i}^2).$$

对 $e=K_1\cap\partial\Omega$ 和任意的 $v\in V^h$，由 $\varepsilon(v)$ 的定义有

$$h_e\|\{\varepsilon(v)\}\|_e^2\leqslant C(\|\nabla v\|_{K_1}^2+h_{K_1}^2\|\nabla^2 v\|_{K_1}^2).$$

由反不等式

$$h_K\|\nabla^2v\|_{0,K_i}\leqslant C\|\nabla v\|_{0,K_i},i=1,2$$

可得

$$h_e\|\{\varepsilon(v)\}\|_e^2\leqslant C(\|\nabla v\|_{K_1}^2+\|\nabla v\|_{K_2}^2).$$

由于常数 C 与网格的尺度 h，存在与 h 无关的常数 C_1 使得

$$\|v\|_X\leqslant C_1\|v\|_Y \tag{25}$$

引理 4.3[17]　(14)式所定义的 $d_\beta(\cdot)$ 具有如下性质：

(1) 对于对称格式(即 $\beta=1$)，存在合适的、与 h 无关的参数 α_0，使得对于任意的 $v\in V^h$，有

$$d_\beta(v,v)\geqslant\nu\alpha_0\|v\|_X^2;$$

(2) 对于不对称格式(即 $\beta=-1$)，对于任意的与 h 无关的常数 α_1 以及 $v\in V^h$，有

$$d_\beta(v,v)\geqslant\nu\alpha_1\|v\|_X^2;$$

(3) 存在与 h 无关的常数 C_α，使得

$$d_\beta(u,v)\leqslant C_\alpha\nu\|u\|_X\|v\|_X.$$

假设 4.4　存在投影算子 $R_h\in\mathfrak{L}(H_0^1(\Omega);V^h)$，使得

$$b(v-R_hv,q^h)=0,\forall v\in H_0^1(\Omega),q^h\in Q^h \tag{26}$$

且

$$|v-R_hv|_{s,K}\leqslant Ch^{r+1-s}|v|_{r+1,K},K\in\Gamma_h,s=0,1. \tag{27}$$

$$\|v-R_hv\|_X\leqslant Ch^r|v|_{r+1,K},\forall v\in H^{r+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \tag{28}$$

这里 C 是只依赖于 K 的常数，ΔK_j 是包含单元 K_j 的宏元.

对于上述 H(div)稳定元，我们定义一些记号.

(1) 定义在三角形或四面体上的 RT 型元可记为 $RT_k(K)$. 令 $r=m=k$. 可取 $V_r(K)$，$W_m(K)$ 为

$$V_k(K)=(P_k(K))^2\oplus xP_k(K),$$

$$W_k(K)=P_k(K).$$

(2) 定义在三角形或四面体上的 BDM 型元可记为 $BDM_k(K)$. 令 $r=m+1=k$. 可取 $V_r(K)$，$W_m(K)$ 为

$V_k(K)=(P_k(K))^2, W_{k-1}(K)=P_k(K)$.

(3) 定义在矩形上的元可记为 $BDM_{[k]}(K)$. 令 $r=m+1=k$. 可取 $V_r(K), W_m(K)$ 为

$$V_k(K)=(P_k(K))^2 \oplus curl(x_1^{k+1}x_2) \oplus curl(x_1 x_2^{k+1}),$$

$$W_{k-1}(K)=P_k(K).$$

投影 R_h 满足 $(R_h v)|_K = R_h(v|_K)$. 根据投影 R_h 的定义，有

$$b(v-R_h v, q)=0, \forall q \in Q^h.$$

当 $r=1,2,3$ 时，这样的算子是存在的[13,18-22]，即，对于 H(div)稳定元，假设 4.4 成立.

定义 L^2 投影 $r_h: L_0^2(\Omega) \to Q^h$. 由参考文献[15]，我们有下列性质：对于 $BDM_k(K)$ 与 $BDM_{[k]}(K)$ 元 ($r=m+1=k$)，有

$$|p-r_h p|_{s,k} \leqslant Ch^{k-s}|p|_{k+1,K}, \forall K \in \Gamma_h, s=0,1;$$

对于 $RT_k(K)$ 元 ($r=m=k$)，有

$$|p-r_h p|_{s,k} \leqslant Ch^{k+1-s}|p|_{k+1,K}, \forall K \in \Gamma_h, s=0,1.$$

定义 L^2 投影 $\Pi_h: L^2(\Omega) \to$ 剖分 Γ_h 上分段连续多项式函数组成的空间，且满足

$$\|\Pi_h(uv^h)-uv^h\|_0 \leqslant Ch\|u\|_{1,\infty}\|v^h\|_0, \forall u \in W^{1,\infty}(\Omega), v^h \in V^h \tag{29}$$

由引理 4.2 和迹不等式，有

$$\|v-R_h v\|_Y \leqslant C\|v\|_1 \tag{30}$$

当 $v \in H_0^2(\Omega)^2$ 时，有 $\|v\|_Y=|v|_1 \leqslant \|v\|_1$. 那么

$$\|R_h v\|_Y \leqslant C\|v\|_1 \tag{31}$$

由离散 inf-sup 条件[17,22]，有

$$\sup_{v\in V(h)} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geqslant \beta_0\|q\|, \forall q \in Q^h \tag{32}$$

对于算子 R_h，我们有

$$\sup_{v\in V(h)} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geqslant C^{-1} \sup_{v\in H_0^1(\Omega)^2} \frac{b(R_h v,q)}{\|R_h v\|_X} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega)^2} \frac{b(v,q)}{\|R_h v\|_X} \tag{33}$$

对于任意 $v \in H_0^2(\Omega)^2$，有

$$\|R_h v\|_X \leqslant \|R_h v\|_Y \leqslant C\|v\|_1 \tag{34}$$

那么

$$\sup_{v\in V(h)} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geqslant C^{-1} \sup_{v\in H_0^1(\Omega)^2} \frac{b(v,q)}{\|v\|_1} \geqslant \beta_0\|q\| \tag{35}$$

为了得到相应的误差估计，我们有下列的误差方程：

$$(u_t-u_t^h, v^h)+d_\beta(u-u^h, v^h)+c_1(u,u,v^h)-c_1(u^h,u^h,v^h)-b(v^h,p-p^h)-g(u^h,v^h)+b(u-u^h,q^h)=0, \forall v^h \in V^h, q^h \in Q^h \tag{36}$$

$$(u_0-u_0^h, v^h)=0, \forall v^h \in V^h \tag{37}$$

我们假定问题(1)的解 (u,p) 具有以下的正则性：

$$\max\{\|u\|_{t^m(0,T;H^{r+1})(\Omega))}, \|u\|_{L^\infty(0,T;X)}, \|p\|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega))}, \|u_t\|_{L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega))}, \|u\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|u_{ttt}\|_{L^2(0,T;0,T;H^2(\Omega))}, \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;0,T;H^2(\Omega))}\} \leqslant C.$$

定理 4.5 令 $(u,p) \in V \times Q$ 是问题(1)的精确解，且 $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$，$p \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，$(u^h,p^h) \in V^h \times Q^h$ 是有限元格式(23)-(24)的解. 若假设 4.4 成立，$u_t \in L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))$，$u \in L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega))$，$p \in L^\infty(0,T;H^r(\Omega))$，则存在与 h, ν, ν_T 无关的常数 C，使得如下的误差估计成立：

$$\|u-u^h\|_0^2+\frac{\mathrm{Re}_{red}^{-1}}{2}|u-u^h|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C\exp(\mathrm{Re}_{red})[h^{2r}(|u_t|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}^2+(\mathrm{Re}_{red}+\nu)|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}^2+\nu_T|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}^2)+\nu_T H^{2r}|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}^2]+h^{2r}|u_0|_{r+1,\Omega} \tag{38}$$

证明 设

$$\xi^h=u^h-R_h(u), \eta^h=p^h-r_h(p),$$

其中 $(R_h(u), r_h(p))$ 是精确解 (u,p) 的投影. 记

$$\xi=u-R_h(u), \eta=p-r_h(p),$$

且 $b(\xi,q^h)=b(\xi^h,q^h)=0$. 则由误差方程(36)有

$$b(\xi^h,q^h)-(\xi_t-\xi_t^h,v^h)+d_\beta(\xi^h,v^h)+g(\xi^h,v^h)=d_\beta(\xi,v^h)-b(v^h,p-p^h)+c_1(u,u,v^h)-c_1(u^h,u^h,v^h)+g(\xi,v^h)-g(u,v^h)+b(\xi,q^h).$$

令 $(v^h,q^h)=(\xi^h,\eta^h)$. 我们有

$$(\xi_t^h,\xi^h)+d_\beta(\xi^h,\xi^h)+g(\xi^h,\xi^h)=\underbrace{(\xi_t,\xi^h)}_{S_1}-\underbrace{b(\xi^h,\eta)}_{S_2}+\underbrace{c_1(u,u,\xi^h)-c_1(u^h,u^h,\xi^h)}_{S_3}+\underbrace{g(\xi^h,\xi^h)}_{S_5}+\underbrace{d_\beta(\xi,\xi^h)}_{S_6}.$$

由 $d_\beta(\cdot)$ 的强制性，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi^h\|_0^2+\alpha_0\nu\|\xi^h\|_X^2+\nu_T\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|_0^2 \leqslant (\xi_t^h,\xi^h)+d_\beta(\xi^h,\xi^h)+\nu_T g(\xi^h,\xi^h).$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式，Young 不等式及引理 4.3，我们有如下估计：

$$S_1 \leqslant \|\xi_t\|_0\|\xi^h\|_0 \leqslant C\|\xi^h\|_0^2 + h^{2r+2}|u_t|_{r+1}^2,$$

$$S_2 = 0.$$

由格林公式，$\nabla \cdot u = 0$，和 $c(u,v,v)=0$，我们有

$$\begin{aligned}
&|c(u,u,\xi^h)-c(u^h,u^h,\xi^h)| = \\
&\Big|-c(\xi^h,\xi^h,\xi)-c(\xi,\xi,\xi^h)+c(u,\xi,\xi^h)+ \\
&\frac{1}{2}((u-u^h)\cdot\nabla u,\xi)+\frac{1}{2}((u^h-u)\cdot\nabla\xi^h,u)\Big| \leqslant \\
&\underbrace{|c(\xi^h,\xi^h,\xi)|}_{R_1}+\underbrace{|c(\xi,\xi,\xi^h)|}_{R_2}+\underbrace{|c(u,\xi,\xi^h)|}_{R_3}+ \\
&\frac{1}{2}\underbrace{|(\xi^h\cdot\nabla u,\xi^h)|}_{R_4}+\frac{1}{2}\underbrace{|(\xi\cdot\nabla u,\xi^h)|}_{R_5}+ \\
&\frac{1}{2}\underbrace{|(\xi\cdot\nabla\xi^h,u)|}_{R_6}+\frac{1}{2}\underbrace{|(\xi^h\cdot\nabla\xi^h,u)|}_{R_7}.
\end{aligned}$$

由格林公式，Hölder 不等式及反不等式，我们有

$$\begin{aligned}
|R_1| &\leqslant \frac{1}{2}|(\xi^h\cdot\nabla\xi^h,\xi)|+\frac{1}{2}|(\xi^h\cdot\nabla\xi,\xi^h)| \leqslant \\
&C(\|\xi^h\|_{0,\infty}\|\nabla\xi\|_0\|\xi\|_0+\|\xi^h\|_0\|\nabla\xi\|_{0,\infty}\|\xi^h\|_0) \leqslant \\
&\frac{\alpha_0\nu+\nu_{add}}{12}|\xi^h|_1^2+\frac{C}{\alpha_0\nu+\nu_{add}}\|\xi^h\|_0^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leqslant \frac{1}{2}|(\xi\cdot\nabla\xi,\xi^h)|+\frac{1}{2}|(\xi\cdot\nabla\xi^h,\xi)| \leqslant \\
&C(\|\xi\|_0\|\nabla\xi\|_0\|\xi^h\|_{0,\infty}+\|\xi\|_0\|\nabla\xi^h\|_{0,\infty}\|\xi\|_0) \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}h^{2r}|u|_{r+1}^2+C\|\xi^h\|_0^2+\frac{\alpha_0+\nu_{add}}{12}|\xi^h|_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leqslant |(u\cdot\nabla\xi,\xi^h)|+\frac{1}{2}|(\nabla\cdot u,\xi\xi^h)|+\frac{1}{2}\left|\sum_{e\in\varepsilon_h}\int_e(un)(\xi\xi^h)\mathrm{d}s\right| \leqslant \\
&C(\|u\|_{0,\infty}\|\nabla\xi\|_0\|\xi^h\|_0+\|\nabla u\|_{0,\infty}\|\xi\|_0\|\xi^h\|_0+ \\
&\sum_{e\in\varepsilon_h}\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\|\xi\|_{L^2(e)}\|\xi^h\|_{L^2(e)}) \leqslant \\
&C\|\xi^h\|_0^2+Ch^{2r}|u|_{r+1}^2,
\end{aligned}$$

$$|R_4| \leqslant \|\nabla u\|_{0,\infty}\|\xi^h\|_0^2 \leqslant C\|\xi^h\|_0^2,$$

$$|R_5| \leqslant \|\nabla u\|_{0,\infty}\|\xi\|_0\|\xi^h\|_0 \leqslant Ch^{2r}|u|_{r+1}^2+C\|\xi^h\|_0^2,$$

$$|R_6| \leqslant C\|\nabla\xi^h\|_0\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\cdot\|\xi\|_0 \leqslant Ch^{2r}|u|_{r+1}^2+\|\xi^h\|_0^2,$$

$$|R_7| \leqslant C\|\nabla\xi^h\|_0\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\cdot\|\xi^h\|_0 \leqslant \frac{\alpha_0+\nu_{add}}{20}|\xi^h|_1^2+\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}\|\xi^h\|_0^2.$$

接下来我们估计 $b_1(u,u,\xi^h)-b_1(u^h,u^h,\xi^h)$. 首先,我们有以下分解：

$$b_1(u,u,\xi^h)-b_1(u^h,u^h,\xi^h)=b_1(\xi,u,\xi^h)-b_1(\xi^h,u,\xi^h)+b_1(u^h,\xi,\xi^h).$$

然后,根据定义有

$$b_1(u,v,w):=\frac{1}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^0}\int_e u\cdot n(v_R\cdot[w]-[v]\cdot w_R)\mathrm{d}s.$$

那么

$$\begin{aligned}
b_1(\xi,u,\xi^h) &:= \frac{1}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^0}\int_e\xi\cdot n(u_R\cdot[\xi^h]-[u]\cdot\xi_R^h)\mathrm{d}s \leqslant \\
&\sum_{e\in\varepsilon_h^0}(\|\xi\|_{L^2(e)}\|u_R\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\|[\xi^h]\|_{L^2(e)}+\|\xi\|_{L^2(e)}\|[u]\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\|\xi_R^h\|_{L^2(e)}) \leqslant \\
&\sum_{e\in\varepsilon_h^0}(\|\xi\|_0\|\xi^h\|_0) \leqslant Ch^r|u|_{r+1}^2+C\|\xi^h\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1(u^h,\xi,\xi^h) &\leqslant |b_1(\xi,\xi,\xi^h)|+|b_1(\xi^h,\xi,\xi^h)|+|b_1(u,\xi,\xi^h)| \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}h^{2r}|u|_{r+1,\Omega}^2+\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}\|\xi^h\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1(\xi^h,u,\xi^h) &= \frac{1}{2}(\xi^h\cdot\nabla u,\xi^h)+\frac{1}{2}(\xi^h\cdot\nabla\xi^h,u)+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\xi^h,\xi^h u) \leqslant \\
&C\|\xi^h\|_{0,\Omega}^2\|\nabla u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}+\|\xi^h\|_{0,\Omega}\|\nabla\xi^h\|_{0,\Omega}\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}+ \\
&\|\xi^h\|_{0,\Omega}\|\nabla\cdot\xi^h\|_{0,\Omega}\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}\|\xi^h\|_{0,\Omega}^2+\frac{\alpha_0+\nu_{add}}{20}|\xi^h|_1^2.
\end{aligned}$$

综上,我们有

$$\begin{aligned}
S_3 &= c_1(u,u,\xi^h)-c_1(u^h,u^h,\xi^h) \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha_0+\nu_{add}}(h^{2r}|u|_{r+1,\Omega}^2+\|\xi^h\|_{0,\Omega}^2)+\frac{\alpha_0+\nu_{add}}{4}|\xi^h|_1^2.
\end{aligned}$$

最后,由 $g(\cdot,\cdot)$ 的定义, Young 不等式及(20)(21)式,有

$$S_4 \leqslant$$
$$C\nu_T \|(I-P_H)\nabla\xi\|_{0,\Omega}\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|_{0,\Omega} \leqslant$$
$$C\nu_T h^{2r}|u|^2_{r+1,\Omega} + \frac{\nu_T}{4}\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|^2_{0,\Omega}$$
$$S_4 \leqslant$$
$$C\nu_T \|(I-P_H)\nabla u\|_{0,\Omega}\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|_{0,\Omega} \leqslant$$
$$C\nu_T H^{2r}|u|^2_{r+1,\Omega} + \frac{\nu_T}{4}\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|^2_{0,\Omega}$$

以及

$$S_6 \leqslant C\nu\|\xi\|_X\|\xi^h\|_X \leqslant$$
$$C\nu\|\xi\|^2_X + \nu\|\xi^h\|^2_X \leqslant$$
$$C\frac{\nu}{\alpha_0}h^{2r}|u|^2_{r+1} + \frac{\alpha_0\nu}{2}\|\xi^h\|^2_X.$$

综上,我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi^h\|^2_{0,\Omega} + \frac{\alpha_0\nu}{2}\|\xi^h\|^2_X +$$
$$\frac{\nu_T}{2}\|(I-P_H)\nabla\xi^h\|^2_{0,\Omega} \leqslant$$
$$Ch^{2r}\left[\left(\frac{1}{\alpha_0\nu+\nu_{add}}+\nu\right)|u|^2_{r+1,\Omega} + |u_t|^2_{r+1,\Omega}\right] +$$
$$\nu_T|u|^2_{r+1,\Omega} + C\nu_T H^{2r}|u|^2_{r+1,\Omega} +$$
$$\frac{\alpha_0\nu+\nu_{add}}{4}|\xi^h|^2_1 + \frac{1}{\alpha_0\nu+\nu_{add}}\|\xi^h\|^2_0.$$

依据 ν_{add} 的定义以及范数 $\|\cdot\|_X$ 的定义,我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi^h\|^2_{0,\Omega} + \frac{\alpha_0\nu+\nu_{add}}{4}|\xi^h|^2_1 \leqslant$$
$$Ch^{2r}\left[\left(\frac{1}{\alpha_0\nu+\nu_{add}}+\nu\right)|u|^2_{r+1,\Omega} + |u_t|^2_{r+1,\Omega} +\right.$$
$$\left.\nu_T|u|^2_{r+1,\Omega}\right] + C\nu_T H^{2r}|u|^2_{r+1,\Omega} +$$
$$\frac{\alpha_0\nu+\nu_{add}}{4}|\xi^h|^2_1 + \frac{1}{\alpha_0\nu+\nu_{add}}\|\xi^h\|^2_0.$$

从而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi^h\|^2_{0,\Omega} + \frac{\mathrm{Re}^{-1}_{red}}{2}|\xi^h|^2_1 \leqslant$$
$$Ch^{2r}[(\mathrm{Re}^{-1}_{red}+\nu)|u|^2_{r+1,\Omega} + |u_t|^2_{r+1,\Omega} +$$
$$\nu_T|u|^2_{r+1,\Omega}] + C\nu_T H^{2r}|u|^2_{r+1,\Omega} + \mathrm{Re}^{-1}_{red}\|\xi^h\|^2_0.$$

上式两边从 0 到关于时间 t 积分,注意到 $\|\xi^h(0)\|_0$ 是 h^r 阶的,利用 Gronwall 引理可得

$$|\xi^h|^2_0 + \frac{\mathrm{Re}^{-1}_{red}}{2}|\xi^h|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant$$
$$C\exp(\mathrm{Re}_{red})[h^{2r}(\mathrm{Re}_{red}+\nu)|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}{}^2 +$$
$$|u_t|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}{}^2 + \nu_T|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}) +$$
$$\nu_T H^{2r}|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}] + h^{2r}|u_0|_{r+1,\Omega}.$$

因此,由上面的分析可得

$$|u-u^h|^2_0 + \frac{\mathrm{Re}^{-1}_{red}}{2}|u-u^h|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant$$
$$C\exp(\mathrm{Re}_{red})[h^{2r}(|u_t|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))} + (\mathrm{Re}_{red}+$$
$$\nu)|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))} + \nu_T|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}) +$$
$$\nu_T H^{2r}|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}] + h^{2r}|u_0|_{r+1,\Omega}.$$

证毕.

定理 4.5 的收敛阶 r 取决于逼近空间

$$V^h = \{v^h \in H(\mathrm{div};\Omega): v^h|_K \in V_r(K),$$
$$\forall K \in \Gamma_h, v^h\cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$Q^h = \{q^h \in Q: q^h|_K \in W_m(K), \forall K \in \Gamma_h\}$$

的多项式次数(光滑性)和正则性. 对于 $H(\mathrm{div})$ 型有限元 $BDM_k(K)$, $BDM_{[k]}(K)$ 和 $RT_k(K)$,第 4 部分已经给出了对应 $V_r(K)$, $W_m(K)$ 的具体形式以及 r,m,k 之间的关系 $r=k, m=k-1, m=k-1,k$,并且上述误差估计对于文献[23]中所有的 $H(\mathrm{div})$ 元都是成立的.

为方便起见,我们定义

$$H^2(u) =$$
$$\exp(\mathrm{Re}_{red})[h^{2r}(|u_t|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))} +$$
$$(\mathrm{Re}_{red}+\nu)|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))} +$$
$$\nu_T|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}) +$$
$$\nu_T H^{2r}|u|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}] + h^{2r}|u_0|^2_{r+1,\Omega}.$$

下面我们给出压力 p 的误差估计

定理 4.6 在定理 4.5 的条件下,我们有下列误差估计

$$|p^h - r_h(p)|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant$$
$$C(|u^h_t - u_t|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} +$$
$$\nu_T H^r|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))} + h^r|p|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))}) +$$
$$Ch^{-1}(1+h^{-1}H(u))H(u).$$

证明 对于任意的 $v^h \in V^h$,我们有误差方程

$$-b(v^h, p^h - r_h(p)) = (u_t - u^h_t, v^h) +$$
$$d_\beta(u-u^h, v^h) + g(u-u^h, v^h) +$$
$$c_1(u,u,v^h) - c_1(u^h,u^h,v^h) -$$
$$g(u,v^h) - b(v^h, p - r_h(p)).$$

由 inf-sup 条件有

$$\sup_{v\in V(h)}\frac{b(v^h,q^h)}{\|v^h\|_X} \geqslant \beta_0\|q^h\|_0, \forall q^h \in Q_h.$$

令 $q^h = p^h - r_h(p)$. 存在 $v^h \in V^h$,使得

$$b(v^h, p^h - r_h(p)) = (u_t - u^h_t, v^h) +$$
$$d_\beta(u-u^h, v^h) + g(u-u^h, v^h) +$$
$$c_1(u,u,v^h) - c_1(u^h,u^h,v^h) -$$
$$g(u,v^h) - b(v^h, p - r_h(p)).$$

根据范数 $\|\xi^h\|_X$ 的定义以及定理 4.5,我们有

$$(u_t-u_t^h,v^h)\leqslant C\|u_t-u_t^h\|_0\|v^h\|_0\leqslant \|u_t-u_t^h\|_0\|v^h\|_X,$$
$$d_\beta(u-u^h,v^h)\leqslant C\nu\|u-u^h\|_X\|v^h\|_X,$$
$$g(u-u^h,v^h)\leqslant C\mathrm{Re}_{red}^{-1}\|\nabla(u-u^h)\|_0|v^h|_X,$$
$$c_1(u,u,v^h)-c_1(u^h,u^h,v^h)= c(u,u,v^h)-c(u^h,u^h,v^h)+ b(u,u,v^h)-b(u^h,u^h,v^h).$$

我们有

$$c(u,u,v^h)-c(u^h,u^h,v^h)= c(u-u^h,u,v^h)+c(u^h,u-u^h,v^h).$$

从而令 $e_u=u-u^h$ 有

$$\begin{aligned}&|c(u,u,v^h)-c(u^h,u^h,v^h)|=\\&|c(e_u,u,v^h)+c(u^h,e_u,v^h)|\leqslant\\&C(|(e_u\cdot\nabla u,v^h)|+|(e_u\cdot\nabla v^h,u)|+\\&|(e_u\cdot\nabla e_u,v^h)|+|(e_u\cdot\nabla v^h,e_u)|+\\&|(u\cdot\nabla e_u,v^h)|+|(u\cdot\nabla v^h,e_u)|)\leqslant\\&Ch^{-1}\mathrm{Re}_{red}H(u)(1+H(u))\|v^h\|_X\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&|b(u,u,v^h)-b(u^h,u^h,v^h)|=\\&|b(e_u,u,v^h)-b(e_u,e_u,v^h)+\\&b(u,e_u,v^h)|\leqslant\\&Ch^{-1}(1+h^{-1}H(u))H(u)\|v^h\|_X.\end{aligned}$$

那么，

$$|c_1(u,u,v^h)-c_1(u^h,u^h,v^h)|\leqslant Ch^{-1}\mathrm{Re}_{red}H(u)(1+H(u))\|v^h\|_X$$
$$|g(u,v^h)|\leqslant C\nu_TH^r|u|_{r+1}\|v^h\|_X$$
$$|b(v^h,p-r_h(p))|\leqslant Ch^r|p|_{r,\Omega}\|v^h\|_X.$$

综上，

$$\begin{aligned}&\|p^h-r_h(p)\|_0\leqslant\\&C\|u_t^h-u_t\|_0+C\nu\|u^h-u\|_X+\\&C\,\mathrm{Re}_{red}^{-1}\|\nabla(u-u^h)\|_0+\\&C\nu_TH^r\|u\|_{r+1,\Omega}+\\&h^r|p|_{r,\Omega}+Ch^{-1}(1+h^{-1}H(u))H(u).\end{aligned}$$

上式两边关于时间 t 从 0 到 T 积分，由定理 4.5 结果有

$$\begin{aligned}&\|p^h-r_h(p)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant\\&C(\|u_t^h-u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\\&\nu_TH^r|u|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega))}+h^r|p|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))})+\\&Ch^{-1}(1+h^{-1}H(u))H(u).\end{aligned}$$

证毕.

参考文献：

[1] John V, Kaya S. Finite element error analysis of a variational multiscale method for the Navier-Stokes equations [J]. Adv Comput Math, 2008, 28: 43.

[2] Layton W. A connection between subgrid eddy viscosity and mixed methods [J]. App Math Comput, 2002, 133: 147.

[3] Belenli M A, Kaya S, Rebholz L G. A subgrid stabilization finite element method for incompressible megnetohydrodynamics [J]. Int J Comput Math, 2013, 90: 1506.

[4] Feng M, Bai Y, He Y, *et al*. A new stabilized subgrid eddy viscosity method based on pressure projection and extrapolated trapezoidal rule for the transient Navier-Stokes equations [J]. Int J Comput Math, 2011, 29: 415.

[5] Wen J, Feng M, He Y. Convegence analysis of a new multiscale finite element method with the P1/P0 element for the incompressible flow [J]. Comput Method Appl M, 2013, 258: 13.

[6] Becker R, Braack M. A finite element pressure gradient stabilization for the stokes equations based on local projections [J]. Calcolo, 2001, 38: 173.

[7] Braack M, Burman E. Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method [J]. SIAM J Numer Anal, 2006, 43: 2544.

[8] Matthies G, Skrzypacz P, Tobiska L. A unified convegence analysis for local projection stabilizationa applied to the Oseen problem[J]. Esaim-Math Model Num, 2007, 41: 713.

[9] Burman E, Linke A, Stabilized finite schemes for incompressible flow using Scott-Vogelius elements [J]. Appl Numer Math, 2008, 58: 1704.

[10] Qin Y, Feng M, Luo K, *et al*. Local projection stabilized finite element method for Navier-Stokes equations [J]. Appl Math Mech-Engl, 2010, 31: 651.

[11] Guermond J L. Stabilization of Galerkin approximation of transport equation by subgrid modelling [J]. J Multivariate Anal, 1999, 33: 1293.

[12] Temam R. Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis [M]. Philadelphia: SIAM, 1995.

[13] Crouzeix M, Falk R. Nonconforming finite elements for the Stokes problem[J], Math Comput, 1989, 52: 437.

[14] Cockburn B, Kanschat G, Schoyzau D, *et al*. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes systerm [J]. SIAM J Numer Anal, 2002, 40: 319.

[15] Wang J, Ye X. New finite element methods in computational fluid dynamics by H(div) elements [J]. J Comp Math, 2008, 26: 410.

[16] Wang J, Xiao X, Ye X. Finite element methods for the Navier-stokes equations by H(div) elements [J]. J Comp Math, 2008, 26: 410.

[17] 张莉，冯民富. Navier-Stokes 方程的低阶稳定化有限元方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2009，46：886.

[18] Crouzeix M, Raviart P. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equation [J], Rairo-Oper Res, 1973: 33.

[19] Fortin M, Soulie M. A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles [J]. Int J Numer Meth, 1983, 19: 505.

[20] Guzmán J, Sánchez-Uribe M. Max-norm stability of low order Tayor-Hood elements in three dimensions [J]. J Sci Comput, 2015, 65: 598.

[21] Girault V, Riviere B, Wheeler M F. A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain composition for the Stokes and Navier-Stokes problems [J]. Math Comput, 2005, 74: 53.

[22] 卓凡，冯民富. Navier-Stokes 方程的局部压力梯度稳定化有限元分析 [J]. 四川大学学报:自然科学版，2010，47：35.

[23] Brezzi F, Fortin M, Mixed and hybrid finite elements [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1991.