

doi: 103969/j.issn.0490-6756.2017.01.003

General Improved KdV 方程的 三层加权平均线性差分格式

赵红伟¹, 胡兵¹, 郑茂波²

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064; 2. 成都工业学院, 成都 611730)

摘要: 本文对广义 Improved KdV 方程的初边值问题进行了数值研究, 提出了一个三层加权平均线性差分格式, 分析了差分解的存在唯一性, 证明了格式的二阶收敛性和稳定性. 数值实验验证了差分格式的有效性.

关键词: GIKdV 方程, 线性差分格式, 收敛性, 稳定性

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)01-0012-07

Three-level average linear difference scheme for the general improved KdV equation

ZHAO Hong-Wei¹, HU Bing¹, ZHENG Mao-Bo²

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Chengdu Technological University, Chengdu 611730, China)

Abstract: In this paper, a numerical method for initial-boundary value problem of the general improved KdV equation is considered. A three-level average linear-implicit finite difference scheme is proposed and the existence and uniqueness are discussed. It is shown that the finite difference scheme is of second-order convergence and unconditionally stable. Numerical experiments verify the theoretical results.

Keywords: GIKdV equation; Linear difference scheme; Convergence; Stability

(2010 MSC 65M60)

1 引言

1895年, 瑞典数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 建立了流体中单向孤立波传播的数学模型, 即 KdV 方程^[1]:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Abdullov^[2] 等人在研究非线性波动方程时提出了广义 improved KdV (GIKdV) 方程:

$$u_t + \alpha(u^p)_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxt} = 0,$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma > 0$ 和 $p > 0$ 是确定的常数.

在该模型初边值问题的数值方法研究中,

文献[3]提出了一种具有二阶精度的两层非线性隐式差分格式, 但在求解过程中需要进行迭代计算. 文献[4]提出一种具有二阶精度的三层线性隐式差分格式, 计算时间上优于文献[3]的非线性隐式差分格式, 精度相差不大.

本文利用文献[5]及加权平均的思想对广义的 improved KdV 方程提出一个三层加权平均线性差分格式, 分析了差分解的存在唯一性, 收敛性以及离散能量的守恒性. 数值试验验证了在不同加权系数下差分解的收敛性及收敛阶. 相对于文献[3, 4]的格式, 本文提出的格式的计算精度有所

收稿日期: 2016-04-11

作者简介: 赵红伟(1991-), 女, 河北唐山人, 硕士研究生, 主要研究方向为计算数学. E-mail: zhaohongwei1010@163.com

通讯作者: 胡兵. E-mail: hubingscu@scu.edu.cn

提高.

本文结构如下: 第二节给出了常用记号及预备知识; 第三节对于广义 improved KdV 方程提出了加权平均线性的差分格式, 运用 Browder 不动点定理^[6]证明了差分格式的解的存在唯一性、稳定性与收敛性, 收敛阶是 $o(\tau^2 + h^2)$; 第四节通过数值实验验证了理论结果.

2 记号及引理

将区间 $[x_l, x_r] \times [0, T]$ 进行剖分, $x_j = x_l + jh, 0 \leq j \leq J, h = \frac{x_r - x_l}{J}$ 为空间步长, $t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N (N = \lceil \frac{T}{\tau} \rceil)$ 为时间步长. 记 $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ 和 $Z_h^0 = \{u = (u_j) \mid u_0 = u_J = 0, j = 0, 1, 2, \dots, J\}$. 并定义如下记号:

$$\begin{aligned} (u_j^n)_x &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, & (u_j^n)_{\bar{x}} &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, \\ (u_j^n)_{\bar{x}} &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2h}, & (u_j^n)_i &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau}, \\ (u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, & \bar{u}_j^n &= \frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2}, \\ \|u^n\|^2 &= (u^n, u^n), & (u^n, v^n) &= h \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n v_j^n, \\ \|u^n\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq J-1} |u_j^n|. \end{aligned}$$

在本文中, C 表示一个正常数, 在不同的位置取值不同.

引理 2.1^[7] 对于任意的网格函数: $u, v \in Z_h^0$, 成立

$$\begin{aligned} ((u_j)_x, v_j) &= -(u_j, (v_j)_x), \\ ((u_j)_x, v_j) &= -(u_j, (v_j)_{\bar{x}}), \\ (u_j, (v_j)_{\bar{x}\bar{x}}) &= -((u_j)_x, (v_j)_x), \\ (u_j, (u_j)_{\bar{x}\bar{x}}) &= -((u_j)_x, (u_j)_x) \\ &\quad - \|u_x\|^2, \\ (u_j, (u_j)_{\bar{x}\bar{x}}) &= 0, \end{aligned}$$

引理 2.2(Browder 不动点定理)^[6] 设 H 是有限维内积空间, $g: H \rightarrow H$ 是连续算子, 且存在 $\alpha > 0$ 使得任意 $x \in H, x = \alpha$ 有 $(g(x), x) > 0$. 则存在 $x^* \in H$, 使得 $g(x^*) = 0$ 且 $x^* \leq \alpha$.

引理 2.3(离散的 Sobolev 不等式)^[7] 存在常数 C_1 和 C_2 使得 $u^n_\infty \leq C_1 u^n + C_2 \|u_x^n\|$.

引理 2.4(离散的 Grownall 不等式)^[7] 设 $\omega(k), \rho(k)$ 为非负网格函数, 且 $\rho(k)$ 是非递减. 若 $C > 0$, 并且 $\omega(k) \leq \rho(k) + C\tau \sum_{l=0}^{k-1} \omega(l)$, 对任意的 k 成立, 则 $\omega(k) \leq \rho(k)e^{C\tau k}$ 对任意的 k 成立.

3 General Improved KdV 方程的三层加权平均线性差分格式

本节考虑下面的广义的 Improved KdV 方程的初边值问题:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha(u^\rho)_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxt} &= 0, \\ x \in [x_l, x_r], t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1}$$

初始条件:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in [x_l, x_r] \tag{2}$$

边界条件:

$$\begin{aligned} u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, u_x(x_l, t) = u_x(x_r, t) = \\ 0, t \in [0, T] \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $u_0(x)$ 是已知的光滑函数.

容易验证, 初边值问题(1)~(3)满足如下两个守恒律:

$$\begin{aligned} Q(t) = \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx = \int_{x_l}^{x_r} u_0(x, 0) dx = Q(0) \\ E(t) = \|u\|_{L^2}^2 + \gamma \|u_x\|_{L^2}^2 = E(0) \end{aligned} \tag{4}$$

$$E(t) = \|u\|_{L^2}^2 + \gamma \|u_x\|_{L^2}^2 = E(0) \tag{5}$$

3.1 差分格式的建立

由于 $(u^\rho)_x = \theta p u^{\rho-1} u_x + (1-\theta)(u^\rho)_x$, 其中 $\theta \in \mathbf{R}$. 针对初边值问题(1)~(3)给出如下有限差分格式:

$$\begin{aligned} (u_j^n)_i - \gamma(u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}} + \beta(\bar{u}_j^n)_{\bar{x}\bar{x}} + P_\theta(u_j^n, \bar{u}_j^n) &= 0, \\ 0 \leq j \leq J-1, 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \tag{6}$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), 0 \leq j \leq J \tag{7}$$

$$u_0^n = u_j^n = 0, (u_0^n)_x = (u_j^n)_x = 0, 1 \leq n \leq N \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} P_\theta(u_j^n, \bar{u}_j^n) &= \alpha [p\theta(u_j^n)^{\rho-1}(\bar{u}_j^n)_x + \\ (1-\theta)((u_j^n)^{\rho-1}\bar{u}_j^n)_x] \end{aligned} \tag{9}$$

定理 3.1 假设 $u_0 \in H_0^1[x_l, x_r]$. 仅当 $\theta = \frac{1}{p+1}$ 时, 差分格式(6)~(8)是离散能量守恒的, 即

$$\begin{aligned} E^n &= \frac{1}{4} (\|u^{n+1}\|^2 + \|u^n\|^2) + \\ &\quad \frac{\gamma}{4} (\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2) = E^{n-1} = \dots = E^0 \end{aligned} \tag{10}$$

证明 将(6)式与 $\bar{u}^n (\frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2})$ 做内积, 由边界条件(8)和引理 2.1, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\tau} (\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n-1}\|^2) + \frac{\gamma}{4\tau} (\|u_x^{n+1}\|^2 - \\ \|u_x^{n-1}\|^2) + [P_\theta(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n] = 0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& (P_\theta(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n) = \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} [p\theta(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_j^n)_x + \\
& (1-\theta)((u_j^n)^{p-1}\bar{u}_j^n)_x] \bar{u}_j^n = \\
& \alpha(1-\theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_j^n)_x + \\
& ((u_j^n)^{p-1}\bar{u}_j^n)_x] \bar{u}_j^n + \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} ((p+1)\theta-1)(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_j^n)_x \bar{u}_j^n.
\end{aligned}$$

通过边界条件(8),有

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_j^n)_x + ((u_j^n)^{p-1}\bar{u}_j^n)_x] \bar{u}_j^n = \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) + (u_{j+1}^n)^{p-1}\bar{u}_{j+1}^n - \\
& (u_{j-1}^n)^{p-1}\bar{u}_{j-1}^n] \bar{u}_j^n = \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}\bar{u}_{j+1}^n\bar{u}_j^n - (u_{j-1}^n)^{p-1}\bar{u}_j^n\bar{u}_{j-1}^n] - \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}\bar{u}_j^n\bar{u}_{j-1}^n - (u_{j+1}^n)^{p-1}\bar{u}_{j+1}^n\bar{u}_j^n] = 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& (P_\theta(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n) = \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} ((p+1)\theta-1)(u_j^n)^{p-1}(\bar{u}_j^n)_x \bar{u}_j^n,
\end{aligned}$$

也即当 $\theta = \frac{1}{p+1}$ 时

$$(P_{\frac{1}{p+1}}(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n) = 0.$$

综上所述可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\tau} (\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n-1}\|^2) + \frac{\gamma}{4\tau} (\|u_x^{n+1}\|^2 - \\
& \|u_x^{n-1}\|^2) = 0.
\end{aligned}$$

由 E^n 的定义可知(10)式成立. 证毕.

在 $\theta = \frac{1}{p+1}$ 的情况下, 差分格式(6)的非线性项的近似与文献[4]的差分格式是相同的, 并且此时差分格式是离散能量守恒的. 上述证明给出了 $\theta = \frac{1}{p+1}$ 时差分格式离散能量守恒的原因. 这种非线性项的近似方法被广泛的应用在文献[4, 8, 9]中. 并且对于本文的加权格式, 当 h 足够小趋于 0 的时候, 离散能量的大小波动并不明显.

3.2 差分格式的可解性与唯一性

定理 3.2 若时间步长 τ 足够小, 存在 $u^n \in \mathbf{Z}_h^n$ ($1 \leq n \leq N-1$), 满足差分格式(6)~(8).

证明 用数学归纳法. 假设 u^0, u^1, \dots, u^n ($1 \leq n \leq N-1$) 满足差分格式(6)~(8), 证存在 u^{n+1} 满

足差分格式:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\tau} u_j^{n+1} - \frac{1}{2\tau} \gamma(u_j^{n+1})_{xx} + \frac{1}{2} \beta(u_j^{n+1})_{xxx} + \\
& \frac{1}{2} P_\theta(u_j^n, u_j^{n+1}) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
& P_\theta(u_j^n, u_j^{n+1}) = \alpha [p\theta(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x + \\
& (1-\theta)((u_j^n)^{p-1}u_j^{n+1})_x].
\end{aligned}$$

令上式(11)与 u^{n+1} 做内积

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\tau} \|u^{n+1}\|^2 + \frac{\gamma}{2\tau} \|u_x^{n+1}\|^2 + \\
& \frac{1}{2} (P_\theta(u^n, u^{n+1}), u^{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x + ((u_j^n)^{p-1}u_j^{n+1})_x] u_j^{n+1} = \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n)^{p-1}u_{j+1}^{n+1} - \\
& (u_{j-1}^n)^{p-1}u_{j-1}^{n+1}] u_j^{n+1} = \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}u_{j+1}^{n+1}u_j^{n+1} - (u_{j-1}^n)^{p-1}u_j^{n+1}u_{j-1}^{n+1}] - \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}u_j^{n+1}u_{j-1}^{n+1} - (u_{j+1}^n)^{p-1}u_{j+1}^{n+1}u_j^{n+1}] = 0,
\end{aligned}$$

并且由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}
& (P_\theta(u^n, u^{n+1}), u^{n+1}) = \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} [p\theta(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x + \\
& (1-\theta)((u_j^n)^{p-1}u_j^{n+1})_x] u_j^{n+1} = \alpha(1-\theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x + ((u_j^n)^{p-1}u_j^{n+1})_x] u_j^{n+1} + \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} [((p+1)\theta-1)(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x] u_j^{n+1} = \\
& \alpha h \sum_{j=1}^{J-1} [((p+1)\theta-1)(u_j^n)^{p-1}(u_j^{n+1})_x] u_j^{n+1} \leq \\
& Ch \sum_{j=1}^{J-1} |(u_j^{n+1})_x| \|u_j^{n+1}\| \leq C(u^{n+1,2} + u_x^{n+1,2}),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \|u^{n+1}\|^2 + \gamma \|u_x^{n+1}\|^2 \leq \\
& 2\tau C (\|u^{n+1}\|^2 + \|u_x^{n+1}\|^2).
\end{aligned}$$

当 τ 足够小, 且满足 $1 - 2\tau C > 0$ 和 $\gamma - 2\tau C > 0$ 时 $\|u^{n+1}\| = 0, \|u_x^{n+1}\| = 0$ 成立. 证毕.

3.3 差分格式的收敛性与稳定性

引理 3.3 设 $u_0 \in H_0^1[x_l, x_r]$, 则初边值问题(1)~(3)的解满足 $\|u\|_{L^2} \leq C, \|u_x\|_{L^2} \leq C$, 进一步可得 $\|u\|_\infty \leq C$.

证明 由(5)式可得 $\|u\|_{L^2} \leq C, \|u_x\|_{L^2} \leq$

C, 应用 Sobolev 不等式可得 $\|u\|_\infty \leq C$.

引理 3.4 设 $u_0 \in H_0^1[x_l, x_r]$, 则成立如下不等式 $\|u^n\| \leq C, \|u_x^n\| \leq C$, 并且 $\|u^n\|_\infty \leq C$.

证明 由 (10) 式我们得到 $\|u^n\| \leq C, \|u_x^n\| \leq C$, 再由引理 2.3 可得 $\|u^n\|_\infty \leq C$.

定理 3.5 设 $u_0 \in H_0^1[x_l, x_r]$, 差分格式 (6) ~ (8) 的解 u^n 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛到 $v(x, t)$, 收敛阶是 $o(\tau^2 + h^2)$.

证明 定义 v_j^n 是原方程的解, u_j^n 是差分格式的解, r_j^n 是截断误差,

$$\begin{aligned} e_j^n &= v_j^n - u_j^n, \\ r_j^n &= (e_j^n)_i - \gamma(e_j^n)_{xx} + \beta(\bar{e}_j^n)_{xx} + R_{1,j} + \\ &R_{2,j} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{1,j} &= p\alpha\theta[(v_j^n)^{\rho-1}(\bar{v}_j^n)_x - (u_j^n)^{\rho-1}(\bar{u}_j^n)_x], \\ R_{2,j} &= \alpha(1-\theta)[((v_j^n)^{\rho-1}\bar{v}_j^n)_x - ((u_j^n)^{\rho-1}\bar{u}_j^n)_x]. \end{aligned}$$

(10) 式与 $2\bar{e}^n$ (*i. e.* $e^{n+1} + e^{n-1}$). 做内积, 我们得到

$$\begin{aligned} (r_j^n, 2\bar{e}^n) &= \frac{1}{2\tau}(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^{n-1}\|^2) + \\ &\frac{1}{2\tau}\gamma(\|e_x^{n+1}\|^2 - \|e_x^{n-1}\|^2) + \beta(\bar{e}_{xxx}^n, 2\bar{e}^n) + \\ &(R_1, 2\bar{e}^n) + (R_2, 2\bar{e}^n) \end{aligned} \tag{13}$$

由于 $(\bar{e}_{xxx}^n, 2\bar{e}^n) = 0$, (13) 式简化成

$$\begin{aligned} (\|e^{n+1}\|^2 - \|e^{n-1}\|^2) + \gamma(\|e_x^{n+1}\|^2 - \\ \|e_x^{n-1}\|^2) &= 2\tau(r_j^n, 2\bar{e}^n) + 2\tau(-R_1, 2\bar{e}^n) + \\ &2\tau(-R_2, 2\bar{e}^n) \end{aligned} \tag{14}$$

通过引理 3.3 和引理 3.4, 我们得到

$$\begin{aligned} |v_j^n| \leq C, |u_j^n| \leq C, |(u_j^n)_x| \leq C, \\ j = 0, 1, 2, \dots, J; n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

又通过 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} (-R_1, 2\bar{e}^n) &= \\ -2p\alpha\theta h \sum_{j=1}^{J-1} [(v_j^n)^{\rho-1}(\bar{v}_j^n)_x - (u_j^n)^{\rho-1}(\bar{u}_j^n)_x] \bar{e}_j^n &= \\ -2p\alpha\theta h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n)^{\rho-1}(\bar{e}_j^n)_x \bar{e}_j^n - \\ 2p\alpha\theta h \sum_{j=1}^{J-1} [(v_j^n)^{\rho-1} - (u_j^n)^{\rho-1}] (\bar{u}_j^n)_x \bar{e}_j^n &= \\ -2p\alpha\theta h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n)^{\rho-1}(\bar{e}_j^n)_x \bar{e}_j^n - \\ 2p\alpha\theta h \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=0}^{\rho-2} (v_j^n)^{\rho-2-k} (u_j^n)^k (\bar{u}_j^n)_x \bar{e}_j^n &\leq \\ Ch \sum_{j=1}^{J-1} |(\bar{e}_j^n)_x| \cdot |\bar{e}_j^n| + Ch \sum_{j=1}^{J-1} |e_j^n| \cdot \\ |\bar{e}_j^n| &\leq C(\|\bar{e}_x^n\|^2 + \|e^n\|^2 + \|\bar{e}^n\|^2) \leq \\ C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \end{aligned}$$

$$\|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (-R_2, 2\bar{e}^n) &= -2\alpha(1 - \\ \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [((v_j^n)^{\rho-1}\bar{v}_j^n)_x - ((u_j^n)^{\rho-1}\bar{u}_j^n)_x] \bar{e}_j^n &= \\ 2\alpha(1 - \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [(v_j^n)^{\rho-1}\bar{v}_j^n - (u_j^n)^{\rho-1}\bar{u}_j^n] (\bar{e}_j^n)_x &= \\ = 2\alpha(1 - \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n)^{\rho-1} \bar{e}_j^n (\bar{e}_j^n)_x + \\ 2\alpha(1 - \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [(v_j^n)^{\rho-1} - (u_j^n)^{\rho-1}] \bar{u}_j^n (\bar{e}_j^n)_x &= \\ 2\alpha(1 - \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n)^{\rho-1} \bar{e}_j^n (\bar{e}_j^n)_x + 2\alpha(1 - \\ \theta)h \sum_{j=1}^{J-1} [e_j^n \sum_{k=0}^{\rho-2} (v_j^n)^{\rho-2-k} (u_j^n)^k] \bar{u}_j^n (\bar{e}_j^n)_x &\leq \\ Ch \sum_{j=1}^{J-1} |(\bar{e}_j^n)_x| \cdot |\bar{e}_j^n| + Ch \sum_{j=1}^{J-1} |e_j^n| \cdot |(\bar{e}_j^n)_x| &\leq \\ C(\|\bar{e}_x^n\|^2 + \|e^n\|^2 + \|\bar{e}^n\|^2) &\leq \\ C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \\ \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2) \end{aligned} \tag{16}$$

并且有

$$\begin{aligned} (r^n, 2\bar{e}^n) &= (r^n, e^{n+1} + e^{n-1}) \leq \\ \|r^n\|^2 + \frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2) \end{aligned} \tag{17}$$

因此由式 (14) ~ (17) 可得

$$\begin{aligned} (\|e^{n+1}\|^2 - \|e^{n-1}\|^2) + \gamma(\|e_x^{n+1}\|^2 - \\ \|e_x^{n-1}\|^2) \leq C\tau(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \\ \|e_x^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \\ \|e^n\|^2) + 2\tau\|r^n\|^2 \end{aligned} \tag{18}$$

令 $B^n = (\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2) + \gamma(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2)$. 则 (18) 式变成

$$\begin{aligned} B^n - B^{n-1} &\leq 2\tau\|r^n\|^2 + C\tau(B^n + B^{n-1}) \\ (1 - C\tau)(B^n - B^{n-1}) &\leq 2\tau\|r^n\|^2 + 2C\tau B^{n-1}. \end{aligned}$$

如果 τ 足够小, 满足 $1 - C\tau > 0$, 则

$$B^n - B^{n-1} \leq C\tau\|r^n\|^2 + C\tau B^{n-1} \tag{19}$$

把 (19) 式对上标从 1 到 n 相加求和, 得到

$$B^n \leq B^0 + C\tau \sum_{k=1}^n |r^k|^2 + C\tau \sum_{k=1}^n B^k.$$

又因为

$$\begin{aligned} \tau \sum_{k=1}^n \|r^k\|^2 &\leq n\tau \max_{1 \leq k \leq n} \|r^k\|^2 \leq \\ T \cdot o(\tau^2 + h^2)^2, \end{aligned}$$

并且有 $e^0 = 0$, 先用两层 C-N 格式计算出具有两阶精度的 u^1 , 使之满足 $B^0 = o(\tau^2 + h^2)^2$. 因此

$$B^n \leq o(\tau^2 + h^2)^2 + C\tau \sum_{k=0}^{n-1} B^k.$$

由引理 2.4, 我们得到 $B^n \leq o(\tau^2 + h^2)^2$, 即

$$\|e^n\| \leq o(\tau^2 + h^2), \|e_x^n\|^2 \leq o(\tau^2 + h^2).$$

再由引理 2.3, 得到 $\|e^n\|_\infty \leq o(\tau^2 + h^2)$. 证毕.

定理 3.6 在定理 3.5 的条件下, 差分格式 (6)~(8) 的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定.

4 数值试验

为了验证本文数值分析的正确性, 我们采用下面的孤立子解^[8],

$$u(x, t) = \beta^{-1} \sqrt{\frac{2+3(\beta-1)+(\beta-1)^2}{2}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{\beta-1}} \left(\frac{\beta-1}{2\sqrt{2}}(x-t) \right),$$

参数 $\alpha = 1/\beta, \beta = 1, \gamma = 1$. 由于差分格式 (6)~(8) 是一个三层格式, 不是自启动的, 需要用其他的方法(如两层 C-N 格式)先计算出 u^1 , 然后利用初始

值 u^0 , 才可以计算出 $u^2, u^3 \dots$. 但差分格式 (6)~(8) 是关于 u_j^{n+1} 的一个线性方程组, 可以用“追赶法”来求解. 在数值试验中, 固定 $x_l = -20, x_r = 60, p = 2$, 取

$$u_0(x) = 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x \right),$$

并与文献[3,4]中的结果做比较. 记中文文献[3]的差分格式为格式 3, 文献[4]的差分格式为格式 2, 本文差分格式为格式 1, 格式 1 中 $\theta = 1/3$ 的情况即是格式 2 中 $p = 1$ 的情况, 此时离散能量守恒. 表格 1, 2 给出在 L_2 -范数下, 对于不同步长 h, τ 计算到 $t = 20$ 时, 差分格式数值解的误差情况以及收敛速度. 表格 3 给出格式 1 在 $\tau = h = 0.05$, 不同加权系数下不同时刻的离散能量. 表格 4 给出在 $\theta = -1/3$, 不同 h, τ 下离散能量的情况.

表 1 L_2 -范数在 $t = 20$ 的误差比较

Tab.1 Comparison of errors using L_2 -norm at $t = 20$

格式	$\tau = h = 0.2$	$\tau = h = 0.1$	$\tau = h = 0.05$
格式 3	9.641E-02	2.422E-02	6.062E-03
格式 2	1.563E-01	3.937E-02	9.868E-03
格式 1, $\theta = -2/3$	7.477E-02	1.860E-02	4.652E-03
格式 1, $\theta = -1/3$	6.741E-03	1.687E-03	4.198E-04
格式 1, $\theta = -1/6$	4.240E-02	1.059E-02	2.645E-03
格式 1, $\theta = 0$	8.065E-02	2.019E-02	5.050E-03
格式 1, $\theta = 1/6$	1.188E-01	2.981E-02	7.462E-03
格式 1, $\theta = 2/3$	1.078E+00	1.666E-01	2.721E-02

表 2 L_2 -范数在 $t = 20$ 的收敛速度比较

Tab.2 Rate of convergence using L_2 -norm at $t = 20$.

格式	$\tau = h = 0.2$	$\tau = h = 0.1$	$\tau = h = 0.05$
格式 3	---	1.995193	1.998803
格式 2	---	1.992756	1.997601
格式 1, $\theta = -2/3$	---	2.004820	1.999811
格式 1, $\theta = -1/3$	---	1.998854	2.004823
格式 1, $\theta = -1/6$	---	2.001067	2.000968
格式 1, $\theta = 0$	---	1.998505	1.999700
格式 1, $\theta = 1/6$	---	1.996284	1.998927
格式 1, $\theta = 2/3$	---	2.543756	2.474302

表 3 格式 1 在不同加权格式下, 不同时刻的离散能量 ($\tau = h = 0.05$)

Tab.5 Discrete energy of Scheme 1 when $\tau = h = 0.05$

T	$\theta = -2/3$	$\theta = -1/3$	$\theta = 0$	$\theta = 1/3$	$\theta = 2/3$
$t = 5$	18.6674975426996	18.6674950355867	18.6674934584358	18.6674927615940	18.6674947132766
$t = 10$	18.6674975771391	18.6674950113312	18.6674934129465	18.6674927615951	18.6675043287267
$t = 15$	18.6674975770375	18.6674950069940	18.6674934032963	18.6674927615940	18.6675711301835
$t = 20$	18.6674975767648	18.6674950062233	18.6674934019047	18.6674927615928	18.6680854854350

表 4 格式 1 在 $\theta = -1/3$ 时, 不同时刻、不同 h, τ 下的离散能量

Tab. 4 Discrete energy of Scheme 1 when $\theta = -1/3$

T	$\tau = h = 0.2$	$\tau = h = 0.1$	$\tau = h = 0.05$
$t = 5$	18.6661913323255	18.6671504317553	18.6674950355867
$t = 10$	18.6661761186760	18.6671500546138	18.6674950113312
$t = 15$	18.6661755053712	18.6671499858770	18.6674950069940
$t = 20$	18.6661748302052	18.6671499735472	18.6674950062233

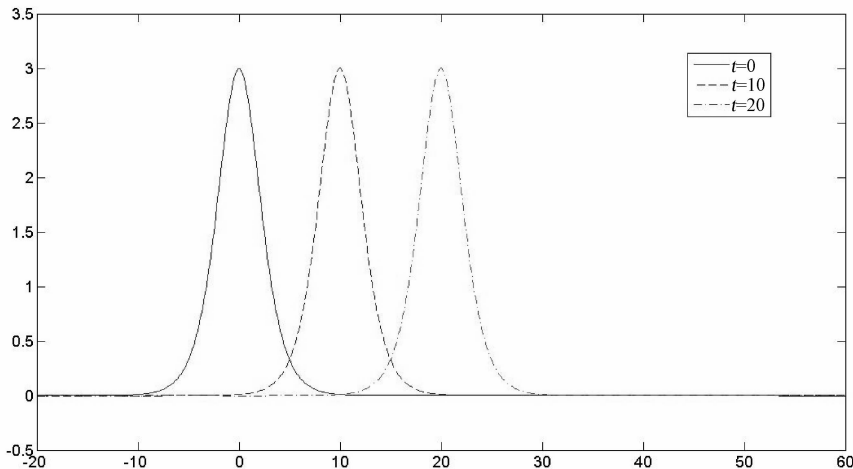


图 1 $u(x, t)$ 在 $t = 0$ 时的精确解和通过差分格式 1 ($\theta = 1/3$) 在 $t = 10$ 及 $t = 20$ 时所计算的数值解 ($h = \tau = 0.1$)

Fig. 1 Exact solutions of $u(x, t)$ at $t = 0$ and numerical solutions computed by Scheme 1 with $h = \tau = 0.1$ at $t = 10$ and $t = 20$

若固定 $p = 3$, 则 $\theta = 1/4$ 的时候是离散能量守恒的. 令 $\alpha = 1/p$, 得到不同加权格式下不同时刻的离散能量.

表 5 格式 1 在不同加权格式下, 不同时刻的离散能量 ($\tau = h = 0.05$)

Tab. 5 Discrete energy of Scheme 1 when $\tau = h = 0.05$

T	$\theta = -1/3$	$\theta = -1/4$	$\theta = 0$	$\theta = 1/4$	$\theta = 1/3$
$t = 5$	9.89931215642347	9.899307416666125	9.89929599406269	9.89928872430830	9.89928720446118
$t = 10$	9.89931230851757	9.89930752317407	9.89929600665733	9.89928872430935	9.89928714500069
$t = 15$	9.89931232038327	9.89930753078210	9.89929600646991	9.89928872430970	9.89928685232030
$t = 20$	9.89931232169614	9.89930753157557	9.89929600636367	9.89928872431005	9.89928556712431

通过表 1 可知, 本文的三层加权平均线性差分格式是收敛的, 在 $\theta \in [-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}]$ 时, 计算精度要优于其他两种格式, 尤其是当 $\theta = -1/3$ 的情况. 通过表 2 可知, 差分格式收敛阶是 $o(\tau^2 + h^2)$. 通过表 3 和 4 可知, $\theta = 1/3$ 时离散能量守恒, θ 取不同值时, 离散能量只有很小的波动, 并且波动会随着 h, τ 的减小而逐渐减小. 图 1 表明, 格式 1 适合长时间计算.

参考文献:

[1] Korteweg D J, de Vries G. On the change of form

of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves [J]. Philos Mag, 1885, 39: 422.

[2] Abdulloev K O, Bogolubsky L, Makhankov V G. One more example of inelastic soliton interaction [J]. Phys Lett A, 1976, 56: 427.

[3] 张天德, 左进明, 段伶记. 广义 Improved KdV 方程的守恒差分格式 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2011, 46: 4.

[4] 左进明, 张耀明. 广义 Improved KdV 方程的守恒线性隐式差分格式 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2011, 46: 4.

- [5] Wongsajjai B, Poochinapan K. A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and the Rosenau-RLW equation [J]. *Appl Math Comput*, 2014, 245: 289.
- [6] Browder F E. Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems [J]. *Proc Symp Appl Math*, 1965, 17: 24.
- [7] Zhou Y. Application of discrete functional analysis to the finite difference method[M]. Beijing: Inter Acad Publishers, 1990.
- [8] 陈涛, 卓茹, 胡劲松. 广义 Rosenau-Kawahara 方程的一个非线性守恒差分逼近[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2016, 53: 265.
- [9] Hu J S, Hu B, Xu Y C. Average implicit linear difference scheme for generalized Rosenau-Burgers equation [J]. *Appl Math Comput*, 2011, 271: 7557.
- [10] Ali A H A, Soliman A A, Raslan K R. Soliton solution for nonlinear partial differential equations by cosine-function method [J]. *Phys Lett A*, 2007, 369: 299.