

doi: 103969/j.issn.0490-6756.2017.01.008

中度振幅浅水波模型的行波解

石义霞, 钟吉玉

(岭南师范学院数学与统计学院, 湛江 524048)

摘要: 本文利用平面动力系统定性分析方法研究了一个中度振幅单向传播的浅水波模型的行波解. 根据可积系统的动力学性质, 本文讨论了该模型行波系统的分岔, 进而得到了光滑孤立波解, 周期波解, 周期尖波解, 紧孤立波解, 扭波解及反扭波解的存在条件, 并给出了这些解的精确表达形式. 进一步, 利用数学软件 Maple 18, 本文给出了这些有界行波解的数值模拟.

关键词: 平面动力系统; 行波解; 中度振幅; 周期尖波解

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)01-0047-08

Traveling wave solutions of a moderate amplitude shallow water wave model

SHI Yi-Xia, ZHONG Ji-Yu

(School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang 524048, China)

Abstract: We study the traveling wave solutions of a shallow water wave model with moderate amplitude by qualitative analysis methods of planar dynamical system. Using the dynamical properties of the integrable system, we discuss the bifurcations of its traveling wave system, from which we obtain the existence conditions of the bounded traveling solutions, including solitary wave solution, periodic wave solution, kink-like wave solutions and antikink-like wave solutions, and the exact expressions of these traveling wave solution. Furthermore, we simulate these solutions to verify our results.

Keywords: Planar dynamical system; Traveling wave solution; Moderate amplitude; Periodic cusp wave solution

(2010 MSC 34C25, 34C37, 76B25)

1 引言

各种水波所呈现的奇特现象或共有的现象一直都吸引着众多学者的关注. 近年来, 很多学者致力于水波方程解的研究^[1,2], 但水波的复杂性使得人们往往无法对所建立的非线性波方程直接求解, 因此人们往往通过探索波方程行波解的性质来揭示水波内在规律. 以孤立波为代表的行波解的研究^[3-13]是当今数学物理科学研究的重要内容

之一. 但由于方程的复杂性, 目前还没有统一的、系统的方法. 最近, 有学者利用动力系统分支理论研究非线性方程的行波解, 取得了新的进展和丰富的成果. 如李继彬利用平面动力系统方法讨论了耦合 KdV 方程^[3]和两个广义的 Boussinesq 系统^[4]的行波解, 得到了孤立波解和周期波解的精确表达式, 并给出参数的具体取值范围. 又如郭柏灵、邓圣福利用平面动力系统方法讨论了广义的 Camassa-Holm-Degasperis-Procesi 方程^[5]和

收稿日期: 2016-04-21

基金项目: 国家自然科学基金(11371314); 广东省高等学校高层次人才基金(QBS201501); 岭南师范学院自然科学研究培育项目基金(YL1504); 湛江市非资助科技攻关计划项目基金(2016B01141)

作者简介: 石义霞(1974-), 女, 山东莱芜人, 讲师, 主要研究方向为微分方程及动力系统. Email: yixiaoshi2010@163.com

通讯作者: 钟吉玉. Email: zhong-jiyu@163.com

Green-Naghdi 系统^[6]的行波解,得到了孤立波解、周期波解、尖波孤立解、紧波解、扭波解以及反扭波解的精确表达式,并给出参数具体取值范围.

本文讨论下面中度振幅浅水波方程的行波解,

$$u_t + u_x + \frac{3\alpha}{2}uu_x - \frac{3\alpha^2}{8}u^2u_x + \frac{3\alpha^3}{16}u^3u_x + \frac{\beta^2}{12}(u_{xxx} - u_{xxt}) + \frac{7\alpha\beta^2}{24}(u_{xxx} + 2u_xu_{xx}) = 0 \quad (1)$$

其中 $\alpha = \frac{a}{h}, \beta = \frac{h}{\lambda}a$ 为振幅, λ 为波长, h 为深度.

该方程是在 Johnson 方程^[14]

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\epsilon uu_x + \frac{\delta^2}{12}u_{xxx} - \frac{\delta^2}{12}u_{xxt} + \frac{7\epsilon\delta^2}{24}uu_{xxx} + \frac{4\epsilon\delta^2}{3}u_xu_{xx} = 0 \quad (2)$$

的基础上推导出的,同时方程(2)可作为欧拉方程的近似方程.对于方程(1),一些学者借助不同的理论和研究方法得到了丰富的结果^[15-20],如,Geyer^[15]讨论了方程(1)孤立波解及其解的定性性质;Gasull 和 Geyer^[16]利用动力系统方法对方程(1)孤立子解和周期行波解等行波解的存在性进行了详细的探究;Zhou 和 Mu^[17]讨论了方程(1)全局解的存在性;Liu 和 Liu^[18]研究了方程(1)水波的爆破现象.

本文借助平面动力系统方法讨论方程(1)的行波解.我们分析了方程(1)的行波系统在不同参数范围内的动力学性质,给出了行波系统存在同宿轨和周期轨的参数条件,从而给出了方程(1)有界行波解的参数取值范围.根据这些参数范围,我们计算了方程(1)精确有界行波解的表达式,如孤立波解、周期波解、周期尖波解、扭波解以及反扭波解,特别计算出当积分常数为零,波速满足 $-1 < c < c_0$ 时,系统存在周期尖波解,其中 $c_0 \approx 0.6211380657$.最后,为了验证结果的正确性,我们通过数学软件 Maple18 模拟了这些有界波解.

2 行波系统

设方程(1)的行波解有形式 $u(\xi) = \frac{au(t,x)}{2}$,

其中 $\xi = \frac{(x-ct)}{\beta}$, 非零常数 c 表示波速.将它们代入方程(1)中得

$$-cu_\xi + u_\xi + 3uu_\xi - \frac{3}{2}u^2u_\xi + \frac{3}{2}u^3u_\xi + \frac{1+c}{12}u_{\xi\xi\xi} + \frac{7}{12}(uu_{\xi\xi\xi} + 2u_\xi u_{\xi\xi}) = 0 \quad (3)$$

方程(3)关于 ξ 积分一次得

$$-cu + u + \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{8}u^4 + \frac{1+c}{12}u_{\xi\xi} + \frac{7}{24}(u_\xi^2 + 2u_\xi u_{\xi\xi}) + A = 0.$$

整理得

$$u_{\xi\xi} = \frac{12cu - 12u - 18u^2 + 6u^3 - \frac{9}{2}u^4 - 12A - \frac{7}{2}u_\xi^2}{1+c+7u} \quad (4)$$

其中 A 为积分常数.令 $v = u_\xi$.方程(4)可写为

$$\begin{aligned} u_\xi &= v, \\ v_\xi &= \frac{12cu - 12u - 18u^2 + 6u^3 - \frac{9}{2}u^4 - 12A - \frac{7}{2}v^2}{1+c+7u} \end{aligned} \quad (5)$$

由系统(5)的动力学性质,我们可以得到方程(1)所有的行波解.系统(5)存在一条奇异直线 $1+c+7u=0$,为避免奇异性,令 $d\xi = (1+c+7u)d\tau$ 可把系统(5)转化为正则系统

$$\begin{aligned} u_\tau &= (1+c+7u)v, v_\tau = 12cu - 12u - 18u^2 + \\ &6u^3 - \frac{9}{2}u^4 - 12A - \frac{7}{2}v^2 = \tilde{f}(u) - \frac{7}{2}v^2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\tilde{f}(u) = 12cu - 12u - 18u^2 + 6u^3 - \frac{9}{2}u^4 - 12A$.系统(5)和(6)的首次积分为

$$\begin{aligned} H(u, v) &= -\frac{9}{10}u^5 + \frac{3}{2}u^4 - 6u^3 + 6(c-1)u^2 - \\ &12Au - \frac{1+c}{2}v^2 - \frac{7}{2}uv^2 \end{aligned} \quad (7)$$

在拓扑意义下,除了奇直线 $1+c+7u=0$ 外,系统(5)和系统(6)有相同的相图.因此,我们可以通过研究系统(6)的动力学性质得到系统(5)的相应性质,从而进一步得到方程(1)的行波解.对于给定的初值,利用(7)式和文献[21]中的公式可以得到方程(1)行波解的参数表达形式.

系统(6)在平衡点 (u_0, v_0) 的雅可比行列式为

$$\begin{pmatrix} 7v_0 & 1+c+7u_0 \\ \tilde{f}'(u_0) & -7v_0 \end{pmatrix}.$$

令 $D = -49v_0^2 - \tilde{f}'(u_0)(1+c+7u_0)$,它的迹为 $T = 0$.根据可积系统的动力学性质^[22],当 $D < 0$ 时,平衡点 (u_0, v_0) 为鞍点;当 $D > 0$ 时,平衡点 (u_0, v_0) 为中心;当 $D = 0$ 时,平衡点 (u_0, v_0) 为退化奇点.下面分别在积分常数 A 为零和非零的情况下研究系统(6)的解.

3 $A=0$

此时方程(1)的有界行波解对应于系统

$$u_t = (1+c+7u)v, v_t = 12cu - 12u - 18u^2 - 6u^3 - \frac{9}{2}u^4 - \frac{7}{2}v^2 = f(u) - \frac{7}{2}v^2 \quad (8)$$

的有界积分曲线,它的首次积分为

$$G(u, v) = -\frac{9}{10}u^5 + \frac{3}{2}u^4 - 6u^3 + 6(c-1)u^2 - \frac{1+c}{2}v^2 - \frac{7}{2}uv^2 \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} f(u) &= 12cu - 12u - 18u^2 + 6u^3 - \frac{9u^4}{2} = \\ &u(12c - 12 - 18u + 6u^2 - \frac{9u^3}{2}) = up(u), \\ p(u) &= 12c - 12 - 18u + 6u^2 - \frac{9u^3}{2}, \\ p'(u) &= -18 + 12u - \frac{27u^2}{2}. \end{aligned}$$

易证 $p'(u)=0$ 无实根, 又 $p(+\infty) < 0, p(-\infty) > 0$, 所以 $p(u)=0$ 有唯一实根 $u=u_c$, 可知系统(8)在 u 轴上最多有两个平衡点 $(0,0), (u_c,0)$. 根据三次方程解的公式可得 $u_c = 1/9(M^{1/3} - 92M^{-1/3} - 4)$, 其中 $M = -1556 + 972c + 36\sqrt{2469 - 2334c + 729c^2}$. 为书写简便下设 $\tilde{c} = -\frac{1+c}{7}$. 下面分四种情形讨论系统(8)不动点的定性性质: (i) $c > 1$; (ii) $c < -1$; (iii) $-1 < c < 1$; (iv) $c = 1$ 或 $c = -1$.

情形 1 若

$$c > 1 \quad (10)$$

根据方程特点可推得

$$p(u) = 12c - 12 - 18u + 6u^2 - \frac{9}{2}u^3 = 0$$

的解 $u_c > 0$, 易得 $f'(0) > 0, f'(u_c) < 0, (1+c+7u_c) > 0$, 所以

$$\begin{aligned} D_{(0,0)} &= -f'(0)(1+c) < 0, D_{(u_c,0)} = \\ &-f'(u_c)(1+c+7u_c) > 0, \end{aligned}$$

即平衡点 $(0,0)$ 为鞍点, $(u_c,0)$ 为中心(见图 1(a)).

情形 2 若

$$c < -1 \quad (11)$$

此时 $u_c < 0$, 可得 $D_{(0,0)} > 0, D_{(u_c,0)} < 0$, 平衡点 $(0,0)$ 为鞍点, $(u_c,0)$ 为中心(见图 1(b)).

情形 3 若

$$-1 < c < 1 \quad (12)$$

可知此时 $u_c > 0$, 易得 $f'(0) = 12(c-1) < 0, f'(u_c) > 0$. 由系统(8)的特点, 我们可计算出波速 c 的一个特殊值 $c_0 \approx 0.6211380657$, 满足 $-\frac{1+c_0}{7} = u_c$ 及 $f(-\frac{1+c_0}{7}) = 0$. 当

$$c_0 < c < 1 \quad (13)$$

时, $u_c > \tilde{c}, D_{(0,0)} = -f'(0)(1+c) > 0, D_{(u_c,0)} = f'(u_c)(1+c+7u_c) < 0$, 此时平衡点 $(0,0)$ 为中心, $(u_c,0)$ 为鞍点(见图 1(c)). 当

$$-1 < c < c_0 \quad (14)$$

时, $u_c < \tilde{c}$, 可得 $D_{(0,0)} > 0, D_{(u_c,0)} > 0$, 此时奇线上存在两平衡点 $(\tilde{c}, v_c), (\tilde{c}, -v_c)$, 其中

$$\begin{aligned} v_c &= \\ &\frac{1}{341}\sqrt{-63c^4 - 840c^3 - 72114c^2 - 26712c + 44625}. \end{aligned}$$

此时, 平衡点 $(0,0)$ 及 $(u_c,0)$ 均为中心, (\tilde{c}, v_c) 和 $(\tilde{c}, -v_c)$ 均为鞍点(见图 1(d)).

情形 4 若 $c = 1$, 则 $u_c = 0$. 此时平衡点 $(0,0)$ 为退化平衡点—尖点(见图 1(e)); 若 $c = -1$, 平衡点 $(0,0)$ 落在奇线上且为鞍点, $(u_c,0)$ 为中心(见图 1(f)); 当 $c = c_0$ 时, 平衡点 $(u_c,0)$ 落在奇线上且为鞍点, $(0,0)$ 为中心(见图 1(g)).

定理 3.1(孤立波解) 当 $A = 0$ 且式(10)成立时, 取初值 (\bar{u}_0, \bar{v}_0) , 其中 $0 < \bar{u}_0 < a_1$, 满足 $G(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = G(0,0)$. 则方程(1)有一个孤立波解 $\omega_1(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

$$\begin{aligned} \omega_1(\xi) &= \\ &\begin{cases} \frac{2}{\alpha}\varphi_1(\xi), \xi \in (-\infty, T_1), \\ \frac{2}{\alpha}\varphi_1(-\xi+2T_1), \xi \in (T_1, \infty) \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

其中 $T_1 = \int_{\bar{u}_0}^{a_1} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(0,0)-G(u,0)}} du$, $\varphi_1(\xi)$ 是 $\int_{\bar{u}_0}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(0,0)-G(u,0)}} du$ 的反函数. a_1 是 $G(u,0) = G(0,0)$ 的非零解.

同理, 当 $A = 0$ 且式(11)或(13)成立时, 方程(1)存在孤立波解.

定理 3.2(周期波解) 当 $A = 0$ 且式(10)成立时, 取初值 $(\bar{u}_0, 0)$, 满足 $0 < \bar{u}_0 < u_c$. 则方程(1)有一个周期波解 $\omega_2(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

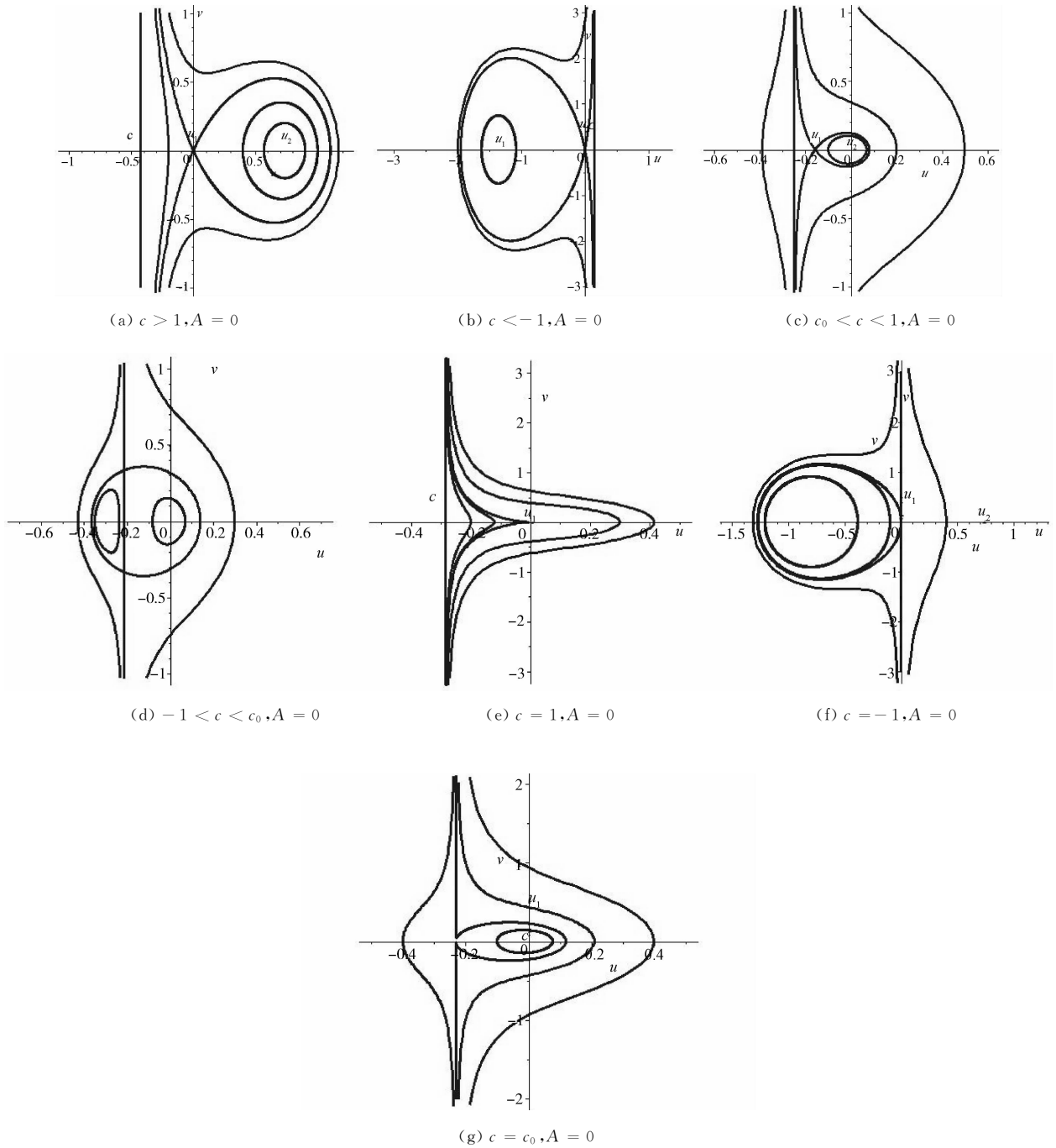


图 1 $A = 0$ 时系统(8)的相图

Fig. 1 The phase portraits of system (8) for $A = 0$

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} \varphi_2(\xi) (\xi - 2nT_2), & \xi \in (2nT_2, (2n+1)T_2], \\ \frac{2}{\alpha} \varphi_2(\xi) (-\xi + 2nT_2), & \xi \in ((2n-1)T_2, 2nT_2] \end{cases} \quad (16)$$

其中 $T_2 = \int_{\bar{u}_0}^{a_2} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(u_0,0)-G(u,0)}} du$, n 是整

数, $\varphi_2(\xi)$ 是 $\xi = \int_{\bar{u}_0}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(u_0,0)-G(u,0)}} du$ 的反函数, a_2 是方程 $G(\bar{u}_0,0) = G(0,0)$ 的非零解, 且 $a_2 > \bar{u}_0$.

同理, 当 $A = 0$ 且式(11)或(13)或(14)成立时, 方程(1)存在周期波解. 特殊情况下, $c = -1$, $A = 0$ 或 $c = c_0, A = 0$ 时, 方程(1)存在周期波解.

定理 3.3(反)扭波解 当 $A = 0$ 且式(10)成立时, 取初值 (\bar{u}_0, \bar{v}_0) , 满足 $\bar{c} < \bar{u}_0 < 0, \bar{v}_0 > 0$

(或 $\bar{v}_0 < 0$) 及 $G(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = G(0, 0)$. 则方程(1)有一个广义(反)扭波解 $\bar{\omega}_3(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

$$\omega_3(\xi) = \frac{2}{\alpha} \varphi_3(\xi), \quad \xi \in (-\infty, T_3) \quad (17)$$

或

$$\omega_3(\xi) = \frac{2}{\alpha} \varphi_3(\xi), \quad \xi \in (-T_3, \infty) \quad (18)$$

其中 $T_3 = \int_{\bar{u}_0}^{-\frac{1+c}{7}} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(0,0)-G(u,0)}} du$, $\varphi_3(\xi)$ 是

$$\xi = \int_{\bar{u}_0}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(0,0)-G(u,0)}} du \text{ 或是}$$

$$\xi = - \int_{\bar{u}_0}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(0,0)-G(u,0)}} du$$

的反函数.

同理, 当 $A = 0$ 且式(11)或(13)成立时, 方程(1)存在广义(反)扭波解.

定理 3.4(紧孤立波解) 当 $A = 0$, 且式(10)成立时, 取初值 $(\bar{u}_0, 0)$, 满足 $\bar{c} < \bar{u}_0 < 0$. 则方程(1)有一个紧孤立波解 $\bar{\omega}_4(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} \varphi_4(\xi), \xi \in (0, T_4], \\ \frac{2}{\alpha} \varphi_4(\xi), \xi \in (-T_4, 0] \end{cases} \quad (19)$$

其中 $T_4 = \int_{\bar{u}_0}^{-\frac{1+c}{7}} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(u_0,0)-G(u,0)}} du$, $\varphi_4(\xi)$

是 $\xi = \int_{\bar{u}_0}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(u_0,0)-G(u,0)}} du$ 的反函数.

同理, 当 $A = 0$ 且式(11)或(13)或(14)成立时, 方程(1)存在紧孤立波解.

定理 3.5(周期尖波解) 当 $A = 0$ 且式(14)

满足, 则系统(1)存在周期尖波解, 设 $G(\bar{c}, 0) = G(u, 0)$ 的三个解为 $u = u_1, u = u_2, u = u_3$, 且 $u_1 < u_2 < u_3$, 其中 $u_2 = \bar{c}$.

(i) 当取初值 $(u_1, 0)$ 时, 可得到周期尖波解 $\omega_5(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

$$\omega_5(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} \varphi_5(\xi)(\xi - 2nT_5), \\ \xi \in (2nT_5, (2n+1)T_5], \\ \frac{2}{\alpha} \varphi_5(\xi)(-\xi + 2nT_5), \\ \xi \in ((2n-1)T_5, 2nT_5] \end{cases} \quad (20)$$

其中 $T_5 = \int_{u_1}^{\bar{c}} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(\bar{c},0)-G(u,0)}} du$, $\varphi_5(\xi)$ 是 $\xi =$

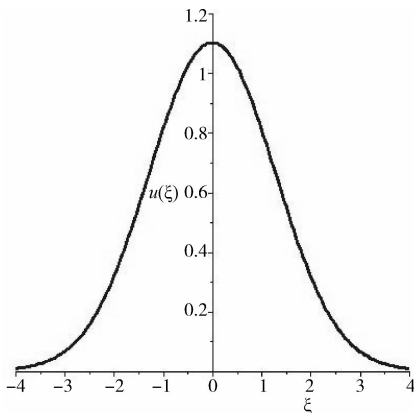
$\int_{u_1}^{\omega} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(\bar{c},0)-G(u,0)}} du$ 的反函数, n 是整数.

(ii) 当取初值 $(u_3, 0)$ 时, 可得到周期尖波解 $\bar{\omega}_6(\xi)$, 其中 $\xi = \frac{x-ct}{\beta}$,

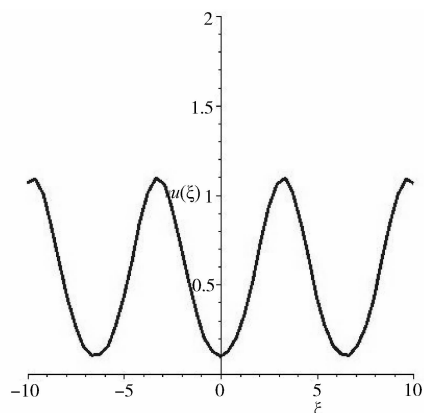
$$\omega_6(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} \varphi_6(\xi)(\xi - 2nT_6), \xi \in (2nT_6, \\ (2n+1)T_6], \\ \frac{2}{\alpha} \varphi_6(\xi)(-\xi + 2nT_6), \\ \xi \in ((2n-1)T_6, 2nT_6] \end{cases} \quad (21)$$

其中 $T_6 = \int_{\bar{c}}^{u_3} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(\bar{c},0)-G(u,0)}} du$, $\varphi_6(\xi)$ 是 $\xi =$

$\int_{\omega}^{u_3} \frac{\sqrt{2(1+c+7u)}}{2\sqrt{G(\bar{c},0)-G(u,0)}} du$ 的反函数, n 是整数.



(a) 孤立波解



(b) 周期波解

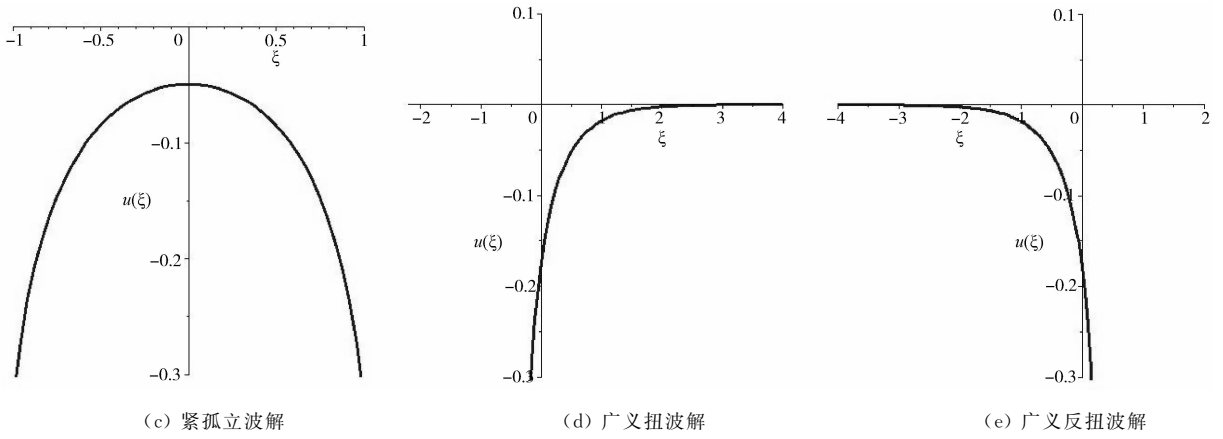


图 2 当 $A = 0$ 且 $c_0 < c < 1$ 或 $c > 1$ 时方程(1)的有界行波解
 Fig. 2 the bounded traveling waves of Equation (1) while $A = 0$ and $c_0 < c < 1$ or $c > 1$

注 1 取 $c = 2, A = 0$. 从方程 $G(0, 0) = 0.5, -0.5$. 可得紧波, 见图 2(c); 取初值 $(-0.1762349690, 0.5)$. 可得扭波, 见图 2(d); 取初值 $(1.102863738, 0)$. 可得孤立波, 见图 2(a); 取初值 $(0.1, 0)$. 可得周期波, 见图 2(b); 取初值 $(-0.1762349690, -0.5)$. 可得反扭波, 见图 2(e).

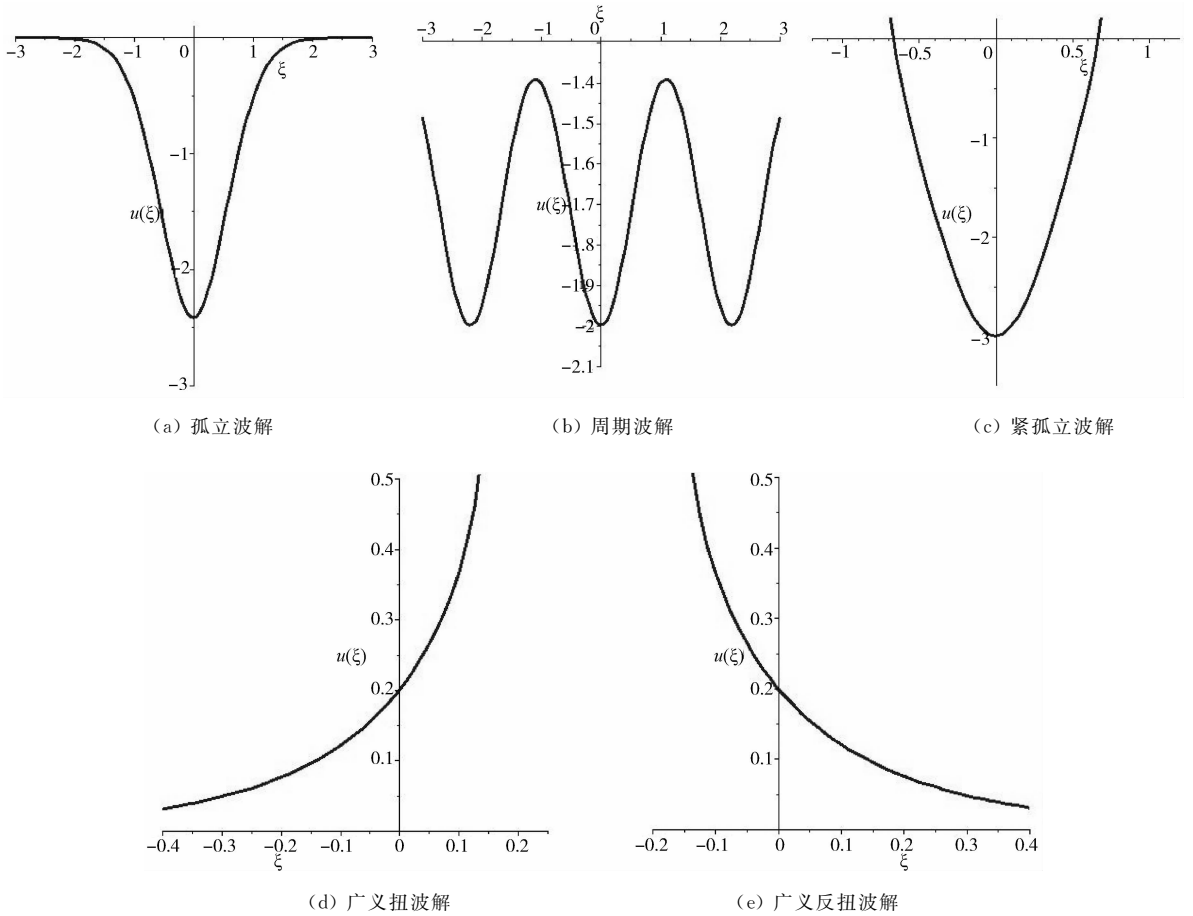


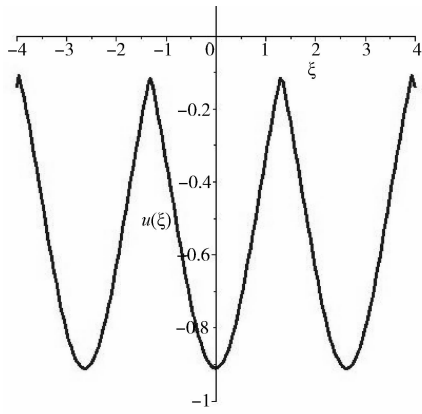
图 3 当 $c < -1, A = 0$ 时方程(1)的有界行波解曲线
 Fig. 3 The bounded traveling waves of Equation (1) while $c < -1, A = 0$

注 2 取 $c = -5, A = 0$. 从方程 $G(0, 0) = -2.417940538, 0$ 可得到孤立波, 见图 3(a); 取初值 $(-2, 0)$ 可得周期波, 见图 3(b); 取初值 $(-2.417940538, 0)$ 可得紧波, 见图 3(c); 取初值 $(-0.1762349690, 0.5)$ 可得扭波, 见图 3(d); 取初值 $(-0.1762349690, -0.5)$ 可得反扭波, 见图 3(e).

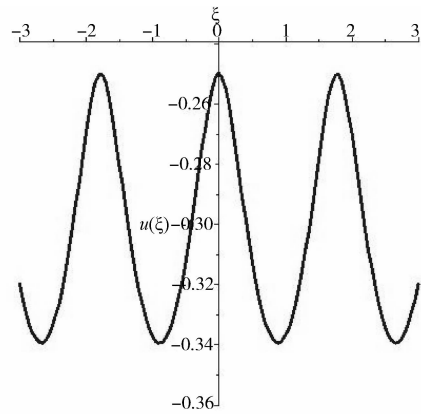
$(-3, 0)$ 可得紧波, 见图 3(c); 取初值 $(0.2, 1.069107464)$ 可得扭波见图 3(d); 取初值 $(0.2, -1.069107464)$, 可得反扭波, 见图 3(e).

注 3 取 $c = -0.25, A = 0$, 由 $G(-3/28, 0) = G(u, 0)$ 得到三个解 $u_1 = -0.9123062649, u_2 = -0.107148571, u_3 = 0.09858422710$; 取初值

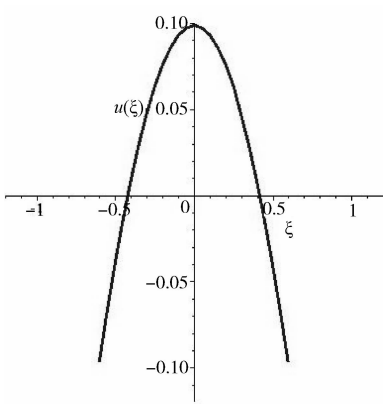
$(-0.912306, 0)$ 可得周期尖波解, 见图 4(a); 取初值 $(-0.6, 0)$ 可得周期波解, 见图 4(b); 取初值 $(-1.0, 0)$ 可得到紧波, 见图 4(c); 取初值 $(-0.35, 0)$ 可得紧波, 见图 4(d); 取初值 $(0.09858422710, 0)$, 可得周期尖波解, 见图 4(e).



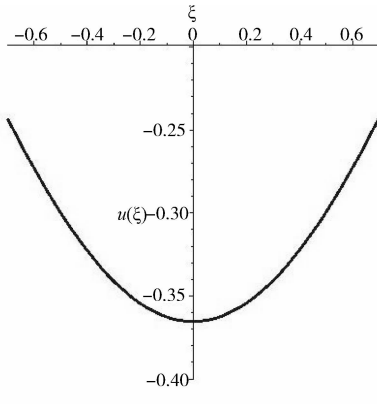
(a) 周期尖波解



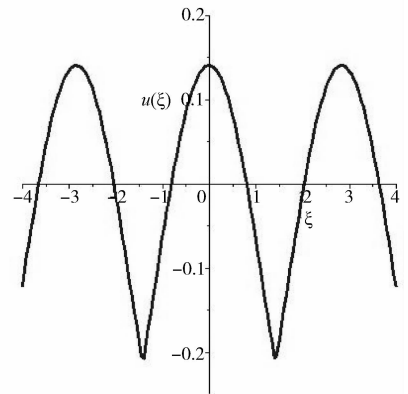
(b) 周期波解



(c) 紧波解



(d) 紧波解



(e) 周期尖波解

图 4 当 $-1 < c < c_0, A = 0$ 时, 方程(1)的有界行波解的数值模拟曲线
Fig. 4 The bounded traveling waves of Equation (1) while $-1 < c < c_0, A = 0$

4 $A \neq 0$

此时方程(1)的行波对应于系统(6) ($A \neq 0$) 的有界积分曲线. 由式(6)可得

$$\tilde{f}'(u) = -18u^3 + 18u^2 - 36u + 12(c - 1),$$

从而

$$\tilde{f}''(u) = -36u^2 + 36u - 36 < 0.$$

由此得 $\tilde{f}'(u) = 0$ 有唯一实根

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{27}(9M^{\frac{1}{3}} - 5M^{-\frac{1}{3}} - 9),$$

其中 $M = 9c - 17 + 36\sqrt{46 - 34c + 9c^2}$. 所以 $\tilde{f}'(u) = 0$ 最多有两个实根. 若 $\tilde{f}'(u) = 0$ 有两实

根 $u_1 \neq u_2$, 不妨设 $u_1 < u_2$. 我们有

$$\tilde{f}(\tilde{c}) = -12A - \frac{1}{4802}(9c^4 + 120c^3 + 10302c^2 +$$

$$3816c - 6375) = 12(g(c) - A),$$

这里

$$g(c) = -\frac{1}{57624}(9c^4 + 120c^3 + 10302c^2 +$$

$$3816c - 6375).$$

情形 1 若 $A > g(c)$, 且 $\tilde{c} < \tilde{u}_0$, 则 $(1 + c + 7u_1)\tilde{f}'(u_1) > 0, (1 + c + 7u_2)\tilde{f}'(u_2) < 0$. 所以平衡点 $(u_1, 0)$ 为系统(6)的鞍点, 平衡点 $(u_2, 0)$ 为系统(6)的中心. 系统(6)的相图可参考图 1(a)或(c).

情形 2 若 $A > g(c)$ 满足, 且 $\tilde{c} > \tilde{u}_0$, 则 $(1 + c + 7u_1)\tilde{f}'(u_1) < 0$, $(1 + c + 7u_2)\tilde{f}'(u_2) > 0$. 所以平衡点 $(u_1, 0)$ 为中心, 平衡点 $(u_2, 0)$ 为鞍点. 系统(6)的相图可参考图 1(b).

情形 3 若 $A < g(c)$, 则 $(1 + c + 7u_1)\tilde{f}'(u_1) < 0$, $(1 + c + 7u_2)\tilde{f}'(u_2) < 0$. 所以平衡点 $(u_1, 0)$ 为中心, 平衡点 $(u_2, 0)$ 为中心. 此时奇线上存在两平衡点 (\tilde{c}, \tilde{v}_c) , $(\tilde{c}, -\tilde{v}_c)$ 为鞍点. 其中

$$v_c = \sqrt{\frac{24}{7}(g(c) - A)}.$$

系统(6)的相图可参考图 1(d).

情形 4 若 $u_1 = u_2 = \tilde{u}_0$. 此时

$$(1 + c + 7u_1)\tilde{f}'(u_1) = 0,$$

$$(1 + c + 7u_2)\tilde{f}'(u_2) = 0,$$

平衡点 $(\tilde{u}_0, 0)$ 为退化平衡点—尖点. 系统(6)的相图可参考图 1(e).

情形 5 当满足 $g(c) = A$ 且 $\tilde{c} > \tilde{u}_0$ 时, 系统(6)的相图可参考图 1(f). 当满足 $g(c) = A$ 且 $\tilde{c} < \tilde{u}_0$, 系统(6)的相图可参考图 1(e).

同理可以写出当 $A \neq 0$ 时, 方程(1)的各类行波解的表达式.

致谢:感谢邓圣福博士在论文写作过程中给予的指导和建议!

参考文献:

- [1] Mushtaq A, Saeed R, Haque Q. Linear and nonlinear coupled drift and ion acoustic waves in collisional pair ion-electron magneto plasma [J]. Phys Plasmas, 2011, 18: 042305.
- [2] Spyros A, Arick S. Global uniqueness theorems for linear and nonlinear waves [J]. J Funct Anal, 2015, 269: 3458.
- [3] Li J B, Zhang Y. Solitary wave and chaotic behavior of traveling wave solutions for the coupled KdV equations [J]. Appl Math Comput, 2011, 218: 1794.
- [4] Li J B. Bifurcations of traveling wave solutions for two generalized Boussinesq systems [J]. Sci China Math, 2008, 51: 1577.
- [5] Deng S F, Guo B L, Wang T C. Travelling wave solutions of a generalized Camassa-Holm-Degasperis-Procesi equation [J]. Sci China Math, 2011, 54: 555.
- [6] Deng S F, Guo B L, Wang T C. Some travelling wave solutions of the Green-Naghdi system [J]. Inter J Bifurcat Chaos, 2011, 21: 575.
- [7] Zong X J. On the global boundary stabilization of the Camassa-Holm equation [J]. Nonlinear Anal RWA, 2014, 15: 221.
- [8] Jiang Z H, Ni L D, Zhou Y. Wave breaking of the Camassa-Holm equation [J]. J Nonlinear Sci, 2012, 22: 235.
- [9] Boyd J P. Peakons and coshoidal waves: traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation [J]. Appl Math Comput, 1997, 81: 173.
- [10] 鲁世平, 卫丽君, 李洁. 含频散项的 $k(3, 2)$ 方程的周期尖波和孤立波解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1222.
- [11] 石义霞. 一个新的两分量系统的行波解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2016, 39: 1.
- [12] Liu Q, Zhou Y Q, Wang F. New exact traveling solutions of long-short wave interaction equation [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2011, 48: 524.
- [13] Li J B. Singular nonlinear traveling wave equations: bifurcations and exact solutions [M]. Beijing: Science Press, 2013.
- [14] Johnson R S. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves [J]. Fluid Mech, 2002, 455: 63.
- [15] Geyer A. solitary traveling water waves of moderate amplitude [J], J Nonlinear Math Phys [J]. 2012, 19: 104.
- [16] Gasull A, Geyer A. Traveling surface waves of moderate amplitude in shallow water [J]. Nonlinear Anal, 2014, 102: 105.
- [17] Zhou S M, Mu C L. Global conservative solutions for a model equation for shallow water waves of moderate amplitude [J]. Diff Equat, 2014, 256: 1793.
- [18] Liu X X, Liu J J. On the low regularity solutions and wave breaking for an equation modeling shallow water waves of moderate amplitude [J]. Nonlinear Anal, 2014, 107: 1.
- [19] Zhou S M. The local well-posedness, existence and uniqueness of weak solutions for a model equation for shallow water waves of moderate amplitude [J]. Diff Equat, 2015, 258: 4103.
- [20] Mutluba D N. On the Cauchy problem for a model equation for shallow water waves of moderate amplitude [J]. Nonlinear Anal RWA, 2013, 14: 2022.
- [21] Zhang Z, Ding T, Huang W, et al. Qualitative theory of differential equations [M]. Providence: AMS, 1991.
- [22] 韩茂安, 顾圣士. 非线性系统的理论和方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.