doi:103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 01. 007

分数阶常微分方程多点边值问题的上下解方法

陈彩龙，韩晓玲

(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文应用上下解方法研究了如下分数阶常微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} x^{(\delta)}(t)=f(t,x(t)),t\in[a,b],a>0, \\ x(a)+\sum_{k=1}^{m}a_kx(t_k)=c \end{cases}$$

解的存在性，其中 $f:[a,b]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 L^1-Carathéodory 函数，$\delta\in(0,1]$，$c\in\mathbf{R}$，$t_k(k=1,2,\cdots,m)$为满足 $a<t_1<t_2<\cdots<t_m<b$，$a_k<0$ 以及 $1+\sum_{k=1}^{m}a_k>0$ 的常数.

关键词：分数阶多点边值问题；上下解方法；存在性

中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)01-0043-04

Lower and upper solution method for fractional multiple-point boundary value problem

CHEN Cai-Long, *HAN Xiao-Ling*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, by applying the upper and lower solution method, we study existence of solution for the following fractional multiple-point boundary value problem

$$\begin{cases} x^{(\delta)}(t)=f(t,x(t)),t\in[a,b],a>0, \\ x(a)+\sum_{k=1}^{m}a_kx(t_k)=c, \end{cases}$$

where $f:[a,b]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is L^1-Carathéodory function, $\delta\in(0,1]$, $c\in\mathbf{R}$, $t_k(k=1,2\cdots,m)$ are constants and satisfying $a<t_1<t_2<\cdots<t_m<b$, $a_k<0$, $1+\sum_{k=1}^{m}a_k>0$.

Keywords: Fractional multiple-point boundary value problem; Upper and lower solution method; Existence

(2010 MSC 26A33, 26A42)

1　引　言

近年来，分数阶微积分受到了很多学者的关注，并得到了广泛应用[1-5].

2003 年，Granas[6] 提出了分数阶微分方程的不动点理论. 2015 年，Bayour[7] 引入 tube 解并且得到了分数阶初值问题

收稿日期：2016-04-26

基金项目：国家自然科学基金(11561063)

作者简介：陈彩龙(1992－)，女，甘肃兰州人，硕士研究生. 主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail:1126204307@qq.com

通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163.com

$$\begin{cases} x^{(\alpha)} = f(t,x(t)), t \in [a,b], a > 0, \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

解的存在性. 2002 年，Boucherf[8] 研究了一阶多值非线性微分方程的柯西问题. 同年，马如云[9] 运用上下解方法研究了一阶常微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \text{a. e. } t \in [0,T], \\ x(0) + \sum_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = c \end{cases}$$

解的存在性.

受以上结果的启发，本文将运用上下解方法研究分数阶微分方程多点边值问题

$$x^{(\delta)}(t) = f(t,x(t)), t \in [a,b], a > 0 \tag{1}$$

$$x(a) + \sum_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = c \tag{2}$$

解的存在性. 其中 f: $[a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 L^1-Carathéodory 函数，$\delta \in (0,1]$，$c \in \mathbf{R}$，$t_k(k = 1, 2\cdots, m)$ 为满足 $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < b$，$a_k < 0$ 以及 $1 + \sum_{k=1}^{m} a_k > 0$ 的给定常数. 当 $\delta = 1$ 时，问题(1)-(2)退化为文献[9]中的情形. 因此本文结果是文献[9]主要结果的直接推广.

2 预备知识

记 $J = [a,b]$，$C(J)$ 为定义在 J 上的连续实值函数构成的 Banach 空间，其范数为 $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| \mid t \in J\}$. 设 $C^k(J)$ 为 k 次连续可微实值函数构成的 Banach 空间，其范数为 $\|x\|_{C^k} = \max\{\|x\|_\infty, \cdots, \|x^{(k)}\|_\infty\}$.

记 $AC(J)$ 为定义在 J 上的绝对连续函数构成的集合. 设 $L^p(J)$ 为定义在 J 上满足 $\int_J |x(t)|^p \mathrm{d}t < +\infty$ 的可测函数构成的 Banach 空间，其范数为 $\|x\|_{L^p} = (\int_J |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$. 在证明主要结果之前先给出一些分数阶微积分的相关知识，参见文献[7]和[9].

定义 2.1 设 $\alpha \in (0,1)$ 并且 f: $[0,\infty) \to \mathbf{R}$，$f$ 的 α 阶分数导数可定义为

$$T_\alpha(f)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \forall t > 0.$$

通常我们用 $f^{(\alpha)}$ 代替 $T_\alpha(f)$. 另外如果 f 的 α 阶分数导数存在，我们就称 f 是 α- 可微的. 如果 f 在 $t \in (0,a)$ 是 α- 可微的，$a > 0$ 并且 $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ 存在，定义

$$f^{(\alpha)}(0) := \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

定义 2.2 设 $\alpha \in (0,1)$ 并且 f: $[a,\infty) \to \mathbf{R}$，$f$ 从 a 到 t 的 α 阶积分记为 I_α^a，可定义为

$$I_\alpha^a := \int_a^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau.$$

定义 2.3 函数 g: $J \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 L^1-Carathéodory 函数是指：

(i) 对每个 $y \in \mathbf{R}$，函数 $g(\cdot, y)$ 可测于 J；

(ii) 对几乎所有的 $t \in J$，函数 $g(t,\cdot)$ 连续；

(iii) 对任意 $\sigma > 0$，存在 $h_\sigma \in L^1(J, \mathbf{R}^+)$ 使得 $|g(t,y)| \leqslant h_\sigma(t)$ 对任意 y：$|y| \leqslant \sigma$ 及任意 $t \in J$ 成立.

定义 2.4 如果 $x \in AC(J)$ 满足 $x^{(\delta)} \in L^1(J)$ 并且

$$x^{(\delta)}(t) = f(t,x(t)), \text{a. e. } t \in J,$$

$$x(a) + \sum_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = c,$$

则称 x 是问题(1)-(2)的解.

定义 2.5 如果 $\alpha(t) \in AC(J)$ 满足：

$$\alpha^{(\delta)}(t) \leqslant f(t,\alpha(t)), \text{a. e. } t \in J \tag{3}$$

$$\alpha(a) + \sum_{k=1}^{m} a_k \alpha(t_k) \leqslant c \tag{4}$$

则称 $\alpha(t)$ 是问题(1)-(2)的一个下解.

定义 2.6 如果 $\beta(t) \in AC(J)$ 满足：

$$\beta^{(\delta)}(t) \geqslant f(t,\beta(t)), \text{a. e. } t \in J \tag{5}$$

$$\beta(a) + \sum_{k=1}^{m} a_k \beta(t_k) \geqslant c \tag{6}$$

则称 $\beta(t)$ 是问题(1)-(2)的一个上解.

定理 2.7 设 $\alpha \in (0,1]$ 且 f, g 是 α- 可微的，则

(i) $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$，$\forall a, b \in \mathbf{R}$；

(ii) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$；

(iii) $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.

另外，如果 f 在 t 可微，$t > 0$，则 $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$.

注 1 根据定理 2.7，如果 $f \in C^1$，则 $\lim_{\alpha \to 1} T_\alpha(f)(t) = f'(t)$，$\lim_{\alpha \to 0} T_\alpha(f)(t) = tf'(t)$.

3 主要结果

下面我们假设：

(H_0) 对 $k = 1, 2, \cdots, m$，$a_k < 0$ 并且 $1 + \sum_{k=1}^{m} a_k > 0$；

(H_1) $f:[a,b]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个 L^1-Carathéodory 函数.

引理 3.1　假设 $e\in L^1(J)$ 且 $1+\sum_{k=1}^m a_k\neq 0$，则问题

$$x^{(\delta)}(t)=e(t),\text{a. e. } t\in J \tag{7}$$

$$x(a)+\sum_{k=1}^m a_k x(t_k)=c \tag{8}$$

有唯一解 $x\in AC(J)$. 进而

$$x(t)=(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(c-\sum_{k=1}^m a_k\int_a^{t_k}s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s)+\int_a^t s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s.$$

证明　根据分数阶导数的定义可知

$$x^{(\delta)}(t)=t^{1-\delta}x'(t)=e(t).$$

所以

$$x'(t)=t^{\delta-1}e(t).$$

又在 $(0,t)$ 上对式(7)两边积分得

$$x(t)-x(a)=\int_a^t s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s.$$

又因为

$$x(a)+\sum_{k=1}^m a_k x(t_k)=c,$$

故

$$x(a)=c-\sum_{k=1}^m a_k x(t_k)=c-\sum_{k=1}^m a_k(x(a)+\int_a^{t_k}s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s).$$

因此

$$x(a)=(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(c-\sum_{k=1}^m a_k\int_a^{t_k}s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s).$$

于是

$$x(t)=(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(c-\sum_{k=1}^m a_k\int_a^{t_k}s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s)+\int_a^t s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s.$$

注 2　根据引理 3.1 可以定义一个算子 B：$L^1(J)\to AC(J)$，

$$(Be)(t):=(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(c-\sum_{k=1}^m a_k\int_a^{t_k}s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s)+\int_a^t s^{\delta-1}e(s)\mathrm{d}s.$$

由于嵌入算子 $j:AC(J)\to L^1(J)$ 是紧的，故复合映射 $j\circ B:=L^1(J)\to L^1(J)$ 是全连续的.

定理 3.2　设(H_0)和(H_1)成立并假设 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别为问题(1)-(2)的一个下解和上解，且在 J 上有 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$，则问题(1)-(2)至少有一个解 x，满足

$$\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t), t\in J.$$

证明　考察辅助问题

$$x^{(\delta)}(t)=f^*(t,x(t)),\text{a. e. } t\in J \tag{9}$$

$$x(a)+\sum_{k=1}^m a_k x(t_k)=c \tag{10}$$

其中 $f^*(t,x(t))=f(t,p(t,u))$，且

$$p(t,u)=\max\{\alpha(t),\{u,\beta(t)\}\}=\begin{cases}\beta(t),u>\beta(t),\\ u,\alpha(t)\leqslant u\leqslant\beta(t),\\ \alpha(t),u<\alpha(t)\end{cases} \tag{11}$$

显然，为了证明问题(1)-(2)有解 x 满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$，只需证明问题(9)-(10)有解 x 满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$ 就够了. 定义算子 $T:L^1(J)\to L^1(J)$，

$$(Tv)(t):=(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(c-\sum_{k=1}^m a_k\int_a^{t_k}s^{\delta-1}f(s,v(s))\mathrm{d}s)+\int_a^t s^{\delta-1}f^*(s,v(s))\mathrm{d}s.$$

由注 2 及条件(H_1)和式(11)可知，

$$(Tv)(t)=j\circ B\circ f^*(t,v(t)),$$

并且 T 是全连续的. 根据引理 3.1，问题(9)-(10)的解集与 T 的不动点集相重合.

令

$$M=\sup\{t^{\delta-1}f(t,x(t))\mid(t,x)\in D\},$$

其中

$$D=\{(t,x)\mid t\in J,x(t):J\to\mathbf{R},\ \alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)\}.$$

不难看出：对于 $\lambda\in(0,1)$，同伦族 $x=\lambda Tx$ 的所有可能解均满足

$$\|x\|_\infty\leqslant(1+\sum_{k=1}^m a_k)^{-1}(|c|+M\sum_{k=1}^m|a_k|t_k)+(b-a)M:=M_0.$$

据 Leray-Schauder 原理，T 有一个不动点 x^*，这个 x^* 即为问题(9)-(10)的一个解.

其次，证 $\alpha(t)\leqslant x^*(t)\leqslant\beta(t),t\in J$. 先证 $\alpha(t)\leqslant x^*(t),t\in J$. 记

$$m(t)=\alpha(t)-x^*(t).$$

反设存在 $\tau\in J$ 使得 $m(\tau)>0$. 由于 m 连续，不妨

选取 $\tau\in[a,b]$. 下面分两种情况讨论:

(i) 存在 $c\in[a,\tau)$ 使得 $m(c)=0$, 并且 $m(t)>0, t\in(c,\tau]$. 则有

$$m^{(\delta)}(t)=\alpha^{(\delta)}(t)-x^{*(\delta)}(t)\leqslant f(t,\alpha(t))-f^{*}(t,x^{*}(t))=f(t,\alpha(t))-f(t,\alpha(t))=0.$$

因为

$$m^{(\delta)}(t)=t^{1-\delta}m'(t), t^{1-\delta}>0,$$

所以 $m'(t)\leqslant 0$. 这表明 $m(t)$ 是 $(c,\tau]$ 上的非增函数. 又 $m(c)=0$, 从而 $m(t)\leqslant 0, t\in(c,\tau]$. 这与 $m(\tau)>0$ 矛盾.

(ii) $\forall t\in[a,\tau]$, 有 $m(t)>0$. 此时 $m(a)>0$. 由(H_0)及式(10)可得, 存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$m(t_{k_0})>m(a)>0 \tag{12}$$

假定 $m(t)>0, t\in[a,t_{k_0}]$. 事实上, 存在 $\bar{c}\in[a,t_{k_0}]$, 使得 $m(\bar{c})=0$ 并且 $m(t)>0, t\in(\bar{c},t_{k_0}]$. 由情形 1 得到矛盾, 所以假定正确. 于是, 由 $m(t)>0$, $t\in[a,t_{k_0}]$及定义 2.4 和式(11)可推知, 对 $t\in[a,t_{k_0}]$, 有

$$m^{(\delta)}(t)=\alpha^{(\delta)}(t)-x^{*(\delta)}(t)\leqslant f(t,\alpha(t))-f^{*}(t,x^{*}(t))=f(t,\alpha(t))-f(t,\alpha(t))=0.$$

同理, 由 $m^{(\delta)}(t)=t^{1-\delta}m'(t)$ 且 $t^{1-\delta}>0$ 知 $m'(t)\leqslant 0$. 这表明 $m(t)$非增, $t\in[a,t_{k_0}]$. 这又与式(12)矛盾. 综上可知反设不成立, 即 $\alpha(t)\leqslant x^{*}(t), t\in J$.

再证 $x^{*}(t)\leqslant\beta(t), t\in J$. 记

$$m(t)=x^{*}(t)-\beta(t).$$

反设存在 $\sigma\in J$ 使得 $m(\sigma)>0$. 由于 m 连续, 不妨选取 $\sigma\in[a,b]$. 下面分两种情况讨论:

(i) 存在 $c\in[a,\sigma)$ 使得 $m(c)=0$ 并且 $m(t)>0, t\in(c,\sigma]$ 有

$$m^{(\delta)}(t)=x^{*(\delta)}(t)-\beta^{(\delta)}(t)\leqslant f^{*}(t,x^{*}(t))-f(t,\beta(t))=f(t,\beta(t))-f(t,\beta(t))=0.$$

由于

$$m^{(\delta)}(t)=t^{1-\delta}m'(t), t^{1-\delta}>0,$$

则 $m'(t)\leqslant 0$. 这表明 $m(t)>0, t\in(c,\tau]$. 又 $m(c)=0$. 从而 $m(t)\leqslant 0, t\in(c,\tau]$. 这与 $m(\tau)>0$ 矛盾.

(ii) $\forall t\in[a,\tau]$ 有 $m(t)>0$. 此时 $m(a)>0$. 由(H_0)及式(10)可得, 存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$m(t_{k_0})>m(a)>0 \tag{13}$$

假定 $m(t)>0, t\in[a,t_{k_0}]$. 事实上, 存在 $\bar{c}\in[a,t_{k_0}]$, 使得 $m(\bar{c})=0$ 并且 $m(t)>0, t\in(\bar{c},t_{k_0}]$. 由情形 1 得到矛盾, 所以假定正确. 于是由 $m(t)>0, t\in[a,t_{k_0}]$及定义 2.4 和式(11)可推知, 对 $t\in[a,t_{k_0}]$有

$$m^{(\delta)}(t)=x^{*(\delta)}(t)-\beta^{(\delta)}(t)\leqslant f^{*}(t,x^{*}(t))-f(t,\beta(t))=f(t,\beta(t))-f(t,\beta(t))=0.$$

同理, 由 $m^{(\delta)}(t)=t^{1-\delta}m'(t)$, 且 $t^{1-\delta}>0$, 知 $m'(t)\leqslant 0$. 这表明 $m(t)$非增, $t\in[a,t_{k_0}]$, 这又与式(13)矛盾. 综上可知反设不成立, 即 $x^{*}(t)\leqslant\beta(t), t\in J$ 得证. 证毕.

参考文献:

[1] 张海燕, 李耀红. 一类高分数阶微分方程的积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 512.

[2] 薛益民. 含积分边值条件的分数阶微分方程耦合系统正解的唯一性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1227.

[3] Yang X J. Advanced local fractional calculus and its applications [M]. New York: World Science Publisher, 2012.

[4] Ortigueira M D, Machado J A T. What is a fractional derivative [J]. J Comput Phys, 2015, 293: 4.

[5] Abdeljawad T, On conformable fractional calculus [J]. J Comput Appl Math, 2015, 279: 57.

[6] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory[M]. New York: Springer, 2003.

[7] Bayour B. Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation[J]. J Comput Appl Math, 2016, 312: 127.

[8] Boucherf A. Nonlinear Cauchy problem for first-order multivalued differential equation[J]. Electron J Differ Eq, 2002, 47: 1.

[9] Ma R Y. The lower and upper solution method of nonlocal problem for the first-order ordinary differential equations[J]. J Northwest Normal Univ, 2003, 40: 1.

[10] Yan D M. The lower and upper solution method of infinite-many point boundary value problem of the first-order ordinary differential equations [J]. Gansu Sci, 2008, 20: 11.