doi:103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 01. 001

Rosenau-RLW 方程的加权守恒差分格式

张 曦[1],胡 兵[1],胡劲松[2]
(1. 四川大学数学学院,成都 610064;2. 西华大学理学院,成都 610039)

摘 要:本文对 Rosenau-RLW 方程初边值问题的数值解法进行了研究,提出了一个三层的加权差分格式,该格式较好地模拟了方程的守恒性质. 然后本文讨论了差分解的存在唯一性,给出了差分解的先验估计和误差估计,并利用能量方法分析了该格式的二阶收敛性、无条件稳定性. 数值算例验证了格式的可靠性,并且适当调整加权系数还可以提高计算精度.

关键词:Rosenau-RLW 方程; 加权系数; 守恒格式; 存在唯一性
中图分类号:O241.82 **文献标识码**:A **文章编号**:0490-6756(2017)01-0001-06

Weighted conservative difference scheme for the Rosenau-RLW equation

ZHANG Xi[1], *HU Bing*[1], *HU Jin-Song*[2]
(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Shool of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, a numerical method for an initial-boundary problem of the Rosenau-RLW equation is considered. A three-layer weighted conservative difference scheme is proposed. The scheme simulates the conservation property of the equations. The existence of discrete solution is discussed. The priori and error estimates of the discrete solution are derived, the second order convergence and unconditional stability of the discrete solution are analyzed by the discrete energy method. Numerical examples verify the reliability of the scheme and that the accuracy of the calculation can be improved by adjusting weighted coefficient properly.

Keywords: Rosenau-RLW equation; Weighted coefficient; Conservative scheme; Existence and uniqueness
(2010 MSC 65M60)

1 引 言

RLW 方程(正则长波方程)

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0,\quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \tag{1}$$

由 Peregrine[1,2] 首先提出,通常用于模拟非线性发散介质中的长波,可以描述如浅水波等诸多物理现象. 它所描述的现象几乎涵盖了 Kdv 方程的所有应用[2]. 文献[3]等研究了广义正则长波方程孤波解的一些性质. 由于解析解许多形式目前无法得到,对其数值解的研究就显得非常重要. 文献[4,5]从能量守恒的角度分别对 RLW 方程的初边值问题提出了两层和三层的差分格式. 文献[6]对 RLW 方程提出了一个三层的拟紧致差分格式,进一步提高了计算的精度.

但是,在离散动力系统的研究中,对于波与波以及波与墙相互作用,不能用 Kdv 方程来描述. 于是 Rosenau[7] 提出了 Rosenau 方程

收稿日期:2016-05-16
作者简介:张曦(1990-),女,四川广安人,硕士研究生,主要研究方向为微分方程数值解. E-mail:zhangxi2012bcg@163.com
通讯作者:胡兵. E-mail:hubingscu@scu.edu.cn

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0,$$
$$x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \tag{2}$$

Rosenau 方程可以看作 RLW 方程的一种变形. 另一方面, 在处理非线性波时需要引入粘性项 $-u_{xxt}$, 因此需要考虑如下一类 Rosenau-RLW 方程:

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0,$$
$$x \in [x_l, x_r], t \in [0, T] \tag{3}$$

文献[8,9]对 Rosenau-RLW 方程进行了数值研究. 其中, 文献[8]提出了具有二阶精度的三层线性守恒差分格式, 但三层格式不是自启动的, 需要先用两层的格式计算出第一时间层的数值解才能计算出其他层; 文献[9]提出了具有二阶精度的两层非线性 C-N 守恒差分格式, 对比文献[8]的结果可以看出两层格式的精度要优于三层格式.

本文参照文献[10,11]的加权思想和处理非线性项的方法, 对 Rosenau-RLW 方程的粘性项引入加权系数, 提出了一个新的二阶精度三层线性守恒差分格式. 数值算例表明当加权系数较小时, 加权格式对比未加权格式, 精度有所提高.

对方程(3)给出如下出边值条件: 初值条件

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [x_l, x_r] \tag{4}$$

边值条件

$$u(x_l,t) = u(x_r,t) = 0,$$
$$u_{xx}(x_l,t) = u_{xx}(x_r,t) = 0,$$
$$t \in [0,T] \tag{5}$$

问题(3)~(5)满足如下守恒律:

$$Q(t) = \int_{x_l}^{x_r} u(x,t)\mathrm{d}x = \int_{x_l}^{x_r} u(x,0)\mathrm{d}x = Q(0) \tag{6}$$

$$E(t) = \| u \|_{L^2}^2 + \| u_x \|_{L^2}^2 + \| u_{xx} \|_{L^2}^2 = E(0) \tag{7}$$

文献[12]中指出, 守恒的差分格式可以更好模拟本身具有的守恒律, 而且避免了其他非守恒差分格式的非线性"爆炸".

2 加权拟紧致守恒差分格式

对区域$[x_l, x_r] \times [0, T]$进行网格剖分. 空间 $h = \frac{x_r - x_l}{J}$, $x_j = x_l + jh, 0 \leq j \leq J$, 时间 τ, $t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N, N = \left[\frac{T}{\tau}\right]$, 差分求解空间

$$U_h^0 = \{u \mid u_0 = u_J = 0, (u_0)_{x\bar{x}} = (u_J)_{x\bar{x}} = 0, j = 0 \cdots J\}.$$

引入如下标记

$$(u_j^n)_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, (u_j^n)_{\bar{x}} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h},$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, (u_j^n)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau},$$

$$(u_j^n)_{x\bar{x}} = (u_j^n)_{\bar{x}x} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

$$\bar{u}_j^n = \frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2}, (u,v) = h\sum_{j=1}^{J-1} u_j v_j,$$

$$[u,v) = h\sum_{j=0}^{J-1} u_j v_j, (u,v] = h\sum_{j=1}^{J} u_j v_j,$$

$$\| u^n \|^2 = (u^n, u^n), \| u^n \|_\infty = \max_{0 \leq j \leq J} |u_j^n|.$$

对于初边值问题(3)~(5), 我们提出以下三层差分格式:

$$(u_j^n)_{\hat{t}} + (u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}\hat{t}} - \theta (u_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}} - \frac{1-\theta}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)_{x\bar{x}t} + (\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} + \frac{1}{3}(u_j^n (\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} + (u_j^n \bar{u}_j^n)_{\hat{x}}) = 0 \tag{8}$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), j = 0,1,2,\cdots,J \tag{9}$$

$$u^n \in U_h^0, u_0^n = u_J^n = 0, (u_0^n)_{x\bar{x}} = (u_J^n)_{x\bar{x}} = 0, n = 0,1,2,\cdots,N \tag{10}$$

对于边界条件(10), 增加一排虚拟点 $u_{-1} u_{J+1}$, 可得 $u_{-1} + u_1 = 0, u_{J+1} + u_{J-1} = 0$.

引理 2.1[13] 对于网格函数 $u, v \in U_h^0$, 有如下差分分部求和公式与差分格林公式成立:

$$(u_x, v) = u_J v_J - u_1 v_0 - [u, v_x) \tag{11}$$

$$(u_{x\bar{x}}, v) = -(u_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] + (u_{\bar{x}} v)_J - (u_x v)_0 = -[u_x, v_x) + (u_{\bar{x}} v)_J - (u_x v)_0 \tag{12}$$

且由 $v_0 = v_J = 0$ 可得

$$(u_x, v) = -(u, v_{\bar{x}}) \tag{13}$$

$$(u_{\hat{x}}, v) = -(u, v_{\hat{x}}) \tag{14}$$

$$(u_{x\bar{x}}, v) = -(u_x, v_x) = -(u_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}) \tag{15}$$

进一步有

$$(u_j, (u_j)_{xx\bar{x}\bar{x}}) = \| u_{xx} \|^2 \tag{16}$$

引理 2.2 设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$. 那么差分格式(8)对于以下离散能量是守恒的, 即

$$Q^n = h\sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n) = Q^{n-1} = \cdots = Q^0 \tag{17}$$

$$E^n = \frac{1}{2}(\| u^{n+1} \|^2 + \| u^n \|^2) + \frac{1}{2}(\| u_{x\bar{x}}^{n\pm1} \|^2 + \| u_{x\bar{x}}^n \|^2) + \frac{\theta}{2}(\| u_x^{n+1} \|^2 + \| u_x^n \|^2) + \frac{(1-\theta)}{2} h\sum_{j=0}^{J-1} ((u_{j+1}^{n+1})_x (u_j^{n+1})_x +$$

$$(u_{j+1}^n)_x(u_j^n)_x)=$$
$$E^{n-1}=\cdots=E^0,n=1,2,\cdots,N \quad (18)$$

证明　将式(8)两端乘以 h 以后对 j 求和，利用引理 2.1 和边界条件(10)有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^{n+1}-u_j^n)=0.$$

根据 Q^n 的定义可得(18)式成立.

将式(8)与 $2\bar{u}^n$ 作内积，利用引理 2.1 和引理 2.2 并结合边界条件(10)有

$$\frac{1}{2\tau}(\|u^{n+1}\|^2-\|u^{n-1}\|^2)+\frac{1}{2\tau}(\|u_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2-\|u_{x\bar{x}}^{n-1}\|^2)+2\sum_{j=1}^{J-1}(((\bar{u}_j^n)_{\hat{x}},\bar{u}_j^n)+(\gamma_j^n,\bar{u}_j^n))+\frac{\theta}{2\tau}(\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^{n-1}\|^2)+\frac{1-\theta}{4\tau}h\sum_{j=0}^{J-1}(((u_{j+1}^{n+1})_x+(u_{j-1}^{n+1})_x)(u_j^{n+1})_x-((u_{j+1}^{n-1})_x+(u_{j-1}^{n-1})_x)(u_j^{n-1})_x)-\frac{1-\theta}{4\tau}h\sum_{j=0}^{J-1}(((u_{j+1}^{n+1})_{x\bar{x}}+(u_{j-1}^{n+1})_{x\bar{x}})u_j^{n-1}-((u_{j+1}^{n-1})_{x\bar{x}}+(u_{j-1}^{n-1})_{x\bar{x}})u_j^{n+1}))=0 \quad (19)$$

其中

$$\gamma^n=\gamma(u_j^n)=\frac{1}{3}(u_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+(u_j^n\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}),$$

$$(\gamma^n,\bar{u}^n)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+(u_j^n\bar{u}_j^n)_{\hat{x}})\bar{u}_j^n=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n(u_{j+1}^{n+1}+u_{j+1}^{n-1}-u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n-1})+u_{j+1}^n(u_{j+1}^{n+1}+u_{j+1}^{n-1})-u_{j-1}^n(u_{j-1}^{n+1}+u_{j-1}^{n-1}))(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n+u_{j+1}^n)(u_{j+1}^{n+1}+u_{j+1}^{n-1})(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n+u_{j-1}^n)(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})(u_{j-1}^{n+1}+u_{j-1}^{n-1})=0$$

$$(20)$$

并且有

$$\frac{1-\theta}{4\tau}\sum_{j=1}^{J-1}(((u_{j+1}^{n+1})_{x\bar{x}}+(u_{j-1}^{n+1})_{x\bar{x}})u_j^{n-1}-((u_{j+1}^{n-1})_{x\bar{x}}+(u_{j-1}^{n-1})_{x\bar{x}})u_j^{n+1})=\frac{1-\theta}{4\tau}\sum_{j=1}^{J-1}(u_{j+2}^{n+1}u_j^{n-1}-2u_{j+1}^{n+1}u_j^{n-1}+2u_j^{n+1}u_j^{n-1}-2u_{j-1}^{n+1}u_j^{n-1}+u_{j-2}^{n+1}u_j^{n-1})-\frac{1-\theta}{4\tau}\sum_{j=1}^{J-1}(u_{j+2}^{n-1}u_j^{n+1}-(2u_{j+1}^{n-1}u_j^{n+1}+2u_j^{n-1}u_j^{n+1}-2u_{j-1}^{n-1}u_j^{n+1}+u_{j-2}^{n-1}u_j^{n+1})=\frac{1-\theta}{4\tau}(-u_{J-1}^{n+1}u_{J-1}^{n-1}+u_1^{n+1}u_1^{n-1}+u_{J-1}^{n-1}u_{J-1}^{n+1}-u_1^{n-1}u_1^{n+1})=0 \quad (21)$$

又注意到

$$((\bar{u}_j^n)_{\hat{x}},2\bar{u}^n)=0 \quad (22)$$

将式(20)～(22)带入式(19)可得

$$\frac{1}{2\tau}(\|u^{n+1}\|^2-\|u^{n-1}\|^2)+\frac{1}{2\tau}(\|u_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2-\|u_{x\bar{x}}^{n-1}\|^2)+\frac{1-\theta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}((u_{j+1}^{n+1})_x(u_j^{n+1})_x-(u_{j+1}^{n-1})_x(u_j^{n-1})_x)+\frac{\theta}{2\tau}(\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^{n-1}\|^2)=0 \quad (23)$$

由 E^n 定义可知式(18)成立.

3　差分格式解的存在唯一性

定理 3.1　差分格式(8)～(10)是唯一可解的.

证明　数学归纳法. 初值 u^0 是由初条件(9)式唯一确定的，适当选择一个二阶方法计算 u^1(即 u^0 和 u^1 是被唯一确定的). 假设 $u^0,u^1,\cdots,u^n$ 是唯一可解的，现在来考虑方程(8)中的 u^{n+1}：

$$\frac{1}{2}u_j^{n+1}-\frac{1-\theta}{4\tau}((u_{j+1}^{n+1})_{x\bar{x}}+(u_{j-1}^{n+1})_{x\bar{x}})-\frac{\theta}{2\tau}(u_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac{1}{2\tau}(u_j^{n+1})_{xx\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{2}(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{1}{6}(u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+(u_j^nu_j^{n+1})_{\hat{x}})=0 \quad (24)$$

将(24)式两端与 u^{n+1} 作内积，又有

$$\frac{h}{6}\sum_{j=1}^{J}(u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+(u_j^nu_j^{n+1})_{\hat{x}})u_j^{n+1}=0,$$
$$\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^{n+1})_{\hat{x}}u_j^{n+1}=0.$$

从而可得

$$\frac{1}{2\tau}\|u^{n+1}\|^2+\frac{1-\theta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(u_{j+1}^{n+1})_x(u_j^{n+1})_x+\frac{\theta}{2\tau}\|u_x^{n+1}\|^2+\frac{1}{2\tau}\|u_{xx}^{n+1}\|^2=0 \quad (25)$$

又由 Schwarz 不等式得

$$\frac{1-\theta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(u_{j+1}^{n+1})_x(u_j^{n+1})_x\geq-\frac{|1-\theta|}{2\tau}\|u_x^{n+1}\|^2 \quad (26)$$

代入式(25)得

$$\frac{1}{2\tau}\|u^{n+1}\|^2+\frac{a-|1-a|}{2\tau}\|u_x^{n+1}\|^2+\frac{1}{2\tau}\|u_{xx}^{n+1}\|^2\le 0.$$

当 $a>1/2$ 时，$a-|1-a|>0$. 则方程(8)仅有零解. 因此，式(8)中的 u_j^{n+1} 是唯一可解的. 证毕.

4 差分格式解的收敛性与稳定性

将精确解 $v(x,t)$ 代入差分格式(8)，并记 $v_j^n=v(x_j,t_n)$，可得截断误差

$$R_j^n=(v_j^n)_{\hat t}-\frac{1-\theta}{2}((v_{j+1}^n)_{x\bar x}+(v_{j-1}^n)_{x\bar x})_{\hat t}-\theta((v_j^n)_{x\bar x})_{\hat t}+(v_j^n)_{xx\bar x\bar x\hat t}+(\bar v_j^n)_{\hat x}+\frac{1}{3}(v_j^n(\bar v_j^n)_{\hat x}+(v_j^n\bar v_j^n)_{\hat x}) \tag{27}$$

由 Taylor 展开可知，当 $h,\tau\to 0$ 时，$r_j^n=o(\tau^2+h^2)$.

引理 4.1(离散的 Sobolev 不等式)[11] 存在常数 C_1,C_2 使得

$$\|u^n\|_\infty\le C_1\|u^n\|+C_2\|u_x^n\| \tag{28}$$

引理 4.2(离散的 Gronwall 不等式)[11] 设网格函数 $\rho(k)$，$\omega(k)$，$\rho(k)$ 非负递减，满足 $\omega(k)\le\rho(k)+C_\tau\sum_{j=1}^{k-1}\omega(j)$，则有

$$\omega(k)\le\rho(k)e^{C_\tau k} \tag{29}$$

定理 4.3 设 $u_0\in H_0^2[x_l,x_r]$. 则差分格式(8)～(10)的解满足

$$\|u^n\|\le C,\ \|u_x^n\|\le C,\ \|u_{x\bar x}^n\|\le C,\ \|u^n\|_\infty\le C,\ \|u_x^n\|_\infty\le C \tag{30}$$

证明 由能量守恒等式(18)可得

$$E^n\le C\ \frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|^2+\|u^n\|^2)+\frac{1}{2}(\|u_{x\bar x}^{n\pm1}\|^2+\|u_{x\bar x}^n\|^2)+\frac{\theta}{2}(\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2)\le C+\left|\frac{1-\theta}{2}\right|h\sum_{j=1}^{J-1}((u_{j+1}^{n+1})_x(u_j^{n+1})_x+(u_{j+1}^n)_x(u_j^n)_x).$$

又

$$h\sum_{j=1}^{J-1}((u_{j+1}^{n+1})_x(u_j^{n+1})_x+(u_{j+1}^n)_x(u_j^n)_x)\le\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2,$$

即

$$\frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|^2+\|u^n\|^2)+\frac{1}{2}(\|u_{x\bar x}^{n\pm1}\|^2+\|u_{x\bar x}^n\|^2)+\left(\frac{\theta}{2}-\left|\frac{1-\theta}{2}\right|\right)(\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2)\le C \tag{31}$$

当 $\theta>\frac{1}{2}$，即 $\frac{\theta}{2}-\left|\frac{1-\theta}{2}\right|>0$ 时，有

$$\|u^n\|\le C,\ \|u_x^n\|\le C,\ \|u_{x\bar x}^n\|\le C.$$

再由引理 4.1 可得 $\|u\|_\infty\le C$，$\|u_x\|_\infty\le C$.

定理 4.4 设 $u_0\in H_0^2[x_l,x_r]$. 则差分格式(8)～(10)的解收敛，且收敛阶为 $o(\tau^2+h^2)$.

证明 令 $e_j^n=v_j^n-u_j^n$ 则

$$r_j^n=(e_j^n)_{\hat t}+(e_j^n)_{xx\bar x\bar x\hat t}-\theta((e_j^n)_{x\bar x})_{\hat t}-\frac{(1-\theta)}{2}((e_{j+1}^n)_{x\bar x}+(e_{j-1}^n)_{x\bar x})_{\hat t}+(\bar e_j^n)_{\hat x}+\gamma(v_j^n)-\gamma(u_j^n) \tag{32}$$

其中

$$\gamma(u_j^n)=\frac{1}{3}(u_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x}+(u_j^n\bar u_j^n)_{\hat x}).$$

将 r^n 与 $2\bar e^n$ 作内积可得

$$(r^n,2\bar e^n)=\frac{1}{2\tau}(\|e^{n+1}\|^2-\|e^{n-1}\|^2)+\frac{1}{2\tau}(\|e_{x\bar x}^{n\pm1}\|^2-\|e_{x\bar x}^{n-1}\|^2)+\frac{\theta}{2\tau}(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^{n-1}\|^2)+\frac{(1-\theta)}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}((e_{j+1}^{n+1})_x(e_j^{n+1})_x-(e_{j+1}^{n-1})_x(e_j^{n-1})_x)+\sum_{j=1}^{J-1}(\gamma(v_j^n)-\gamma(u_j^n),2\bar e^n) \tag{33}$$

利用定理 4.3 与柯西不等式，可得

$$\sum_{j=1}^{J-1}(-\gamma(v_j^n)+\gamma(u_j^n),2\bar e^n)=-\frac{2h}{3}\Big(\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^n(\bar v_j^n)_{\hat x}-u_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x})+((v_j^n\bar v_j^n)_{\hat x}-(u_j^n\bar u_j^n)_{\hat x})\Big)\bar e_j^n=$$
$$-\frac{2h}{3}\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+e_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x}+u_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x})\bar e_j^n-\frac{2}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}((e_j^n\bar e_j^n)_{\hat x}+(e_j^n\bar u_j^n)_{\hat x}+(u_j^n\bar e_j^n)_{\hat x})\bar e_j^n=$$
$$-\frac{2}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+(e_j^n\bar e_j^n)_{\hat x})\bar e_j^n+\frac{2}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n\bar u_j^n+u_j^n\bar e_j^n)(\bar e_j^n)_{\hat x}\le$$
$$\frac{2}{3}Ch\sum_{j=1}^{J-1}(|e_j^n|+|(\bar e_j^n)_{\hat x}|)|\bar e_j^n|+$$

$$\frac{2}{3}Ch\sum_{j=1}^{J-1}(|e_j^n|+|\bar{e}_j^n|)|(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}|\le$$
$$C(\|e^n\|^2+\|\bar{e}_x^n\|^2+\|\bar{e}^n\|^2)\le$$
$$C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e^n\|^2+$$
$$\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2)\tag{34}$$

又由

$$(r^n,2\bar{e}^n)=(r^n,e^{n+1}+e^{n-1})\le\|r^n\|^2+$$
$$\frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2)\tag{35}$$

及

$$(-(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}},\bar{e}^n)=0\tag{36}$$

将式(34)～(36)代入式(33)可得

$$\frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2-\|e^{n-1}\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}(\|e_{xx}^{n+1}\|^2-\|e_{xx}^{n-1}\|^2)+$$
$$\frac{1-\theta}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}(((e_{j+1}^{n+1})_x(e_j^{n+1})_x-$$
$$(e_{j+1}^{n-1})_x(e_j^{n-1})_x)+\frac{\theta}{2}(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^{n-1}\|^2)\le$$
$$C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e^n\|^2+$$
$$\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2)+\tau\|r^n\|^2\tag{37}$$

令

$$B^n=\frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)+$$
$$\frac{1-\theta}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}(((e_{j+1}^{n+1})_x(e_j^{n+1})_x+(e_{j+1}^n)_x(e_j^n)_x)+$$
$$\frac{\theta}{2}(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2).$$

由式(37)可得

$$B^n-B^{n-1}\le C\tau\cdot O(h^2+\tau^2)^2+$$
$$C\tau(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2+\|e_x^n\|^2+$$
$$\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e^n\|^2)\tag{38}$$

两端叠加可得

$$B^N\le B^0+C\cdot O(h^2+\tau^2)^2+$$
$$C\tau\sum_{n=0}^{N}(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+$$
$$\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2).$$

又

$$B^n\ge\left(\frac{\theta}{2}-\frac{|1-\theta|}{2}\right)(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)\tag{39}$$

由 $\theta>\frac{1}{2}$，则 $\frac{\theta}{2}-\frac{|1-\theta|}{2}>0$，以及 $\|e_x^n\|^2\le\frac{1}{2}(\|e^n\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)$可得

$$\|e_{xx}^{N+1}\|^2+\|e_{xx}^N\|^2+\|e^{N+1}\|^2+\|e^N\|^2\le$$
$$C\tau\sum_{n=0}^{N}(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+$$
$$\|e^n\|^2)+B^0+C\cdot O(h^2+\tau^2)^2\tag{40}$$

先由两层格式[16]计算出具有二阶精度的 u^1，使得 $B^0\le O(h^2+\tau^2)^2$，再利用引理 4.2 可得

$$\|e_{xx}^{N+1}\|^2+\|e_{xx}^N\|^2+\|e^{N+1}\|^2+\|e^N\|^2\le$$
$$O(h^2+\tau^2)^2.$$

从而有

$$\|e^n\|\le O(h^2+\tau^2),\ \|e_{xx}^n\|\le O(h^2+\tau^2).$$

从而 $\|e_x^n\|\le O(h^2+\tau^2)$，再由引理 4.1 可得 $\|e^n\|_\infty\le O(h^2+\tau^2)$. 证毕

定理 4.5　设 $u_0\in H_0^2[x_1,x_r]$. 差分格式(8)～(10)的解 u_n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定.

证明　令初值 $\mu_0=u_0+\varepsilon^0$. 设 μ^n 为初值增加一个扰动 ε^0 后差分格式差分格式(8)～(10)的解，误差为 $\varepsilon^n=\mu^n-u^n$. 类似于定理 4.2 的证明过程可得

$$\|\varepsilon^n\|_\infty\le\|\varepsilon^0\|_\infty.$$

6　数值实验

对问题(3)～(5)取初值

$$u_0(x)=\frac{15}{19}\mathrm{sech}^4\left(\frac{\sqrt{13}}{26}x\right).$$

用本文的差分格式计算数值解，与该问题如下的孤波解来作比较：

$$u(x,t)=\frac{15}{19}\mathrm{sech}^4\left(\frac{\sqrt{13}}{26}\left(x-\frac{169}{133}t\right)\right).$$

令 $x_1=-20, x_r=40, T=20$. 由于该格式是个三层的，不能自启动，因此首先采用文献[9]的两层格式算出具有二阶精度的 u^1.

表 1 是当加权参数 θ 取不同值时数值解的误差情况，表 2 是差分解的收敛性验证和收敛阶，表 3 是差分解的离散能量，图 1 是波的传播情况. 通过对比表 1 中在不同 θ 取值下数据结果可知，当加权系数 θ 增大时，误差也将增大，所以 θ 较小时，加权格式比未加权格式误差要小，本文格式是可行的. 表 2 表明本文格式数值解满足二阶收敛性. 表 3 和图 1 表明，本文格式较好地拟合了原方程的守恒性，适合长时间计算.

表1 在 $\tau=0.1, h=0.1, t=20$，参数 θ 取不同值下的平方误差和最大模误差

Tab. 1 The errors of numerical solutions at $t=20$ with various θ

θ	$\Vert v^n-u^n \Vert$	$\Vert v^n-u^n \Vert_\infty$	$\Vert v^{n/4}-u^{n/4} \Vert / \Vert v^n-u^n \Vert$	$\Vert v^{n/4}-u^{n/4} \Vert_\infty / \Vert v^n-u^n \Vert_\infty$
0.50	6.0316e−3	2.3173e−3	——	——
0.75	6.2443e−3	2.4061e−3	3.96764	3.96524
1.00	6.4503e−3	2.5037e−3	3.96542	3.96223
1.25	6.6533e−3	2.5834e−3	3.96315	3.95915
1.50	6.8594e−3	2.6719e−3	3.95850	3.95282

表2 三层格式在 $t=20\theta=0.5$ 不同步长下数值解误差

Tab. 2 The errors of numerical solutions at $t=20\theta=0.5$ with various τ and h

τ	h	$\Vert v^n-u^n \Vert$	$\Vert v^n-u^n \Vert_\infty$	$\Vert v^{n/4}-u^{n/4} \Vert / \Vert v^n-u^n \Vert$	$\Vert v^{n/4}-u^{n/4} \Vert_\infty / \Vert v^n-u^n \Vert_\infty$
0.2	0.2	2.7153e−2	1.0561e−2	——	——
0.1	0.1	6.8594e−3	2.6719e−3	3.95850	3.95282
0.05	0.05	1.7199e−3	6.7011e−4	3.98825	3.98732
0.025	0.025	4.2998e−4	1.6765e−4	3.9999	3.99690

表3 三层格式在不同时刻的离散能量($h=\tau=0.1, \theta=0.5$)

Tab. 3 Discrete mass energy of Scheme 2 when ($h=\tau=0.1, \theta=0.5$)

t	Q^n	E^n
5	7.59064	6.24948
10	7.59065	6.24961
15	7.59065	6.24975
20	7.59066	6.24987

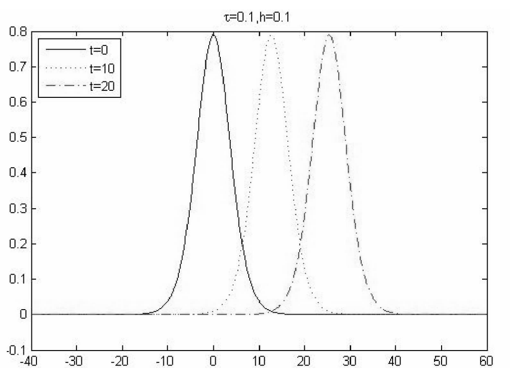

图1 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 时的精确解和通过格式1在 $t=10, t=20$ 时所计算的数值解($h=\tau=0.1$)

Fig. 1 Exact solutions of $u(x,t)$ at $t=0$ and numerical solutions computed by Scheme 1 with $h=\tau=0.1$ at $t=10, t=20$

另外，经过几个参数值的尝试，可以看出适当调整参数 θ 可以有所提高计算精度.

参考文献：

[1] Peregrine D H. Calculations of the development of an Undular Bore[J]. J Fluid Mech, 1966, 25: 321.

[2] Peregrine D H. Long waves on a beach [J]. J Fluid Mech, 1967, 27: 815.

[3] Zhang W, Chen X, Li Z, *et al*. Orbital stability of solitary waves for generalized symmetric regularized-long-wave equations with two nonlinear Terms[J]. J Appl Math, 2014, 2014: 688.

[4] Li S, Wang J, Luo Y. A fourth-order conservative compact finite difference scheme for the generalized RLW equation[J]. Math Probl Eng, 2015, 2015: 1.

[5] Hu J, Wang Y. A high-accuracy linear conservative difference scheme for rosenau-RLW equation[J]. Math Probl Eng, 2013, 2013: 841.

[6] 胡劲松，胡朝浪，郑茂波. 广义对称正则长波方程的一个拟紧致守恒差分算法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2010，47：221.

[7] Rosenau P. Dynamics of dense discrete systems-high order effects[J]. Prog Theor Phys, 1988, 79: 1028.

[8] Pan X, Zhang L. On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation [J]. Appl Math Model, 2012, 36: 3371.

[9] 何挺，胡兵，徐友才. 广义 Rosenau 方程的有限元方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：1.

[10] 陈涛，卓茹，胡劲松. 广义 Rosenau-Kawahara 方程的一个非线性守恒差分逼近[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：265.

[11] 冯博，闵心畅，余跃玉，胡兵. Rosenau 方程的一个新的三层守恒差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2011，48：7.

[12] Zhou Y, Zhou Y. Application of discrete functional analysis to the finite difference method [J]. Fourier, 1990, 8: 49.

[13] 胡建伟，汤怀民. 微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社，1999.