doi：103969/j.issn.0490-6756.2017.03.008

广义 Rosenau-RLW 方程的一个守恒差分逼近

王婷婷，卓　茹，黄妗彤，胡劲松
(西华大学理学院，成都 610039)

摘　要：本文对广义 Rosenau-RLW 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个两层非线性有限差分格式，格式合理地模拟了问题的守恒性质，得到了差分解的先验估计和存在唯一性，并利用能量方法分析了格式的二阶收敛性与无条件稳定性.

关键词：广义 Rosenau-RLW 方程；差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)02-0268-05

A conservative difference approximation of generalized Rosenau-RLW equation

WANG Ting-Ting, *ZHUO Ru*, *HUANG Jin-Tong*, *HU Jin-Song*
(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, we consider the numerical solution for initial-boundary value problem of the generalized Rosenau-RLW equation. A nonlinear two-level difference scheme is designed. This difference scheme simulates the conservation property of the problem. Meanwhile, the prior estimate, existence and uniqueness of the finite difference solution are also obtained. It is proved that the finite difference scheme is convergent with second-order and unconditionally stable by discrete functional analysis method.

Keywords: Generalized Rosenau -RLW equation; Difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

在对紧离散系统的研究中，为了克服 KdV 方程的某些不足，文献[1,2]提出了如下的 Rosenau 方程：

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0 \tag{1}$$

方程(1)通常也被看作是 RLW 方程

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \tag{2}$$

的变形. 在对非线性扩散波的研究中，方程(1)和(2)因其描述了大量的物理现象而占有重要地位[3]. 因此，对 Rosenau 方程、RLW 方程以及 Rosenau-RLW 方程的研究引起了众多学者的关注[4-13].

本文考虑如下一类广义 Rosenau-RLW 方程的初边值问题：

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + (u^p)_x = 0 \tag{3}$$

$$u(x_L,t) = u(x_R,t) = 0, u_{xx}(x_L,t) = u_{xx}(x_R,t) = 0, t \in [0,T] \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [x_L, x_R] \tag{5}$$

这里 $p \geq 2$ 为正整数. 不难证明，问题(3)～(5)具有如下守恒律[8]：

$$E(t) = \|u\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2}^2 = E(0) = C \tag{6}$$

其中 C 为一般正常数(本文中，C 在不同的地方有

收稿日期：2016-06-15
基金项目：四川省教育厅重点基金(16ZA0167)；西华大学重点基金项目(Z1513324)
作者简介：王婷婷(1981－)，女，讲师，主要研究方向为偏微分方程数值解法.
通讯作者：胡劲松. E-mail：hjs888hjs@163.com.

不同的取值).

值得注意的是，文献[9]对问题(3)～(5)提出了一个二阶精度的两层守恒格式，但该格式对非线性项$(u^p)_x$的离散太过复杂，尤其是当参数p较大时不易编程计算. 此外，文献[11]对问题(3)～(5)提出了一个二阶精度的三层线性格式，虽然计算时间相对比较节约，但三层格式不是自启动的. 本文在保持理论精度不变的情况下，对非线性项$(u^p)_x$提出了一个比文献[9]更简单的离散方法，从而对问题(3)～(5)提出了一个新的两层全隐式差分格式，格式合理地模拟了守恒量. 同时本文给出数值算例来说明格式的有效性.

2　差分格式及守恒律

将区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$进行剖分，令$x_j=x_L+jh,0\le j\le J,h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$为空间步长；$t_n=n\tau,0\le n\le N,\tau$为时间步长，且$N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right]$；记$u_j^n\approx u(x_j,t_n),Z_h^0=\{u=(u_j)\,|\,u_0=u_J=0,j=0,1,2,\cdots,J\}$，并定义以下记号：

$$(u_j^n)_x=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h},(u_j^n)_{\bar{x}}=\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h},$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}}=\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h},(u_j^n)_t=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau},$$

$$u_j^{n+\frac12}=\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2},\langle u^n,v^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^nv_j^n,$$

$$\|u^n\|^2=\langle u^n,u^n\rangle,\ \|u^n\|_\infty=\max_{1\le j\le J-1}|u_j^n|.$$

由于$(u^p)_x=\dfrac{p}{p+1}[u^{p-1}u_x+(u^p)_x]$，于是对问题(3)～(5)我们考虑如下有限差分格式：

$$(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}+\frac{p}{p+1}\{(u_j^{n+\frac12})^{p-1}(u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}+[(u_j^{n+\frac12})^p]_{\hat{x}}\}=0 \tag{7}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),\qquad 0\le j\le J \tag{8}$$

$$u_0^n=u_J^n=0,(u_0^n)_{x\bar{x}}=(u_J^n)_{x\bar{x}}=0,0\le n\le N \tag{9}$$

差分格式(7)～(9)对守恒量(6)的数值模拟如下：

定理 2.1　设$u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$. 则差分格式(7)～(9)关于以下离散能量是守恒的，即

$$E^n=\|u^n\|^2+\|u_x^n\|^2+\|u_{xx}^n\|^2=E^{n-1}=\cdots=E^0 \tag{10}$$

证明　(7)式与$2u^{n+\frac12}$作内积，由分部求和公式[9-11]以及边界条件(9)得

$$\frac{1}{\tau}(\|u^{n+1}\|^2-\|u^n\|^2)+\frac{1}{\tau}(\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^n\|^2)+\frac{1}{\tau}(\|u_{xx}^{n+1}\|^2-\|u_{xx}^n\|^2)+\langle u_{\hat{x}}^{n+\frac12},2u^{n+\frac12}\rangle+\langle P,2u^{n+\frac12}\rangle=0 \tag{11}$$

其中

$$P_j=\frac{p}{p+1}\{(u_j^{n+\frac12})^{p-1}(u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}+[(u_j^{n+\frac12})^p]_{\hat{x}}\}.$$

又

$$\langle u_{\hat{x}}^{n+\frac12},2u^{n+\frac12}\rangle=0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\langle P,2u^{n+\frac12}\rangle&=\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}\{(u_j^{n+\frac12})^{p-1}(u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}+[(u_j^{n+\frac12})^p]_{\hat{x}}\}u_j^{n+\frac12}=\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}\{(u_j^{n+\frac12})^p(u_{j+1}^{n+\frac12}-u_{j-1}^{n+\frac12})+[(u_{j+1}^{n+\frac12})^p-(u_{j-1}^{n+\frac12})^p]u_j^{n+\frac12}\}=\\&\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}[(u_{j+1}^{n+\frac12})^pu_j^{n+\frac12}+(u_j^{n+\frac12})^pu_{j+1}^{n+\frac12}]-\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}[(u_j^{n+\frac12})^pu_{j-1}^{n+\frac12}+(u_{j-1}^{n+\frac12})^pu_j^{n+\frac12}]=0\end{aligned} \tag{13}$$

将(12)式和(13)式带入(11)式，并由E^n的定义，递推可得(10)式成立.

3　非线性差分格式的解存在性

引理 3.1(Brouwer 不动点定理)[12]　设H是有限维内积空间，$g:H\to H$是连续算子且存在$\alpha>0$使得任意$x\in H,\|x\|=\alpha$有$\langle g(x),x\rangle>0$. 则存在$x^*\in H$，使得$g(x^*)=0$且$\|x^*\|\le\alpha$.

定理 3.2　存在$u^n\in Z_h^0$满足差分格式(7)～(9).

证明　数学归纳法. 设当$n\le N-1$时，存在$u^0,u^1,\cdots,u^n$满足差分方程(7)，下面证明存在u^{n+1}满足差分方程(7).

定义Z_h^0上的算子g，满足

$$g(v)=2v-2u^n-2v_{x\bar{x}}+2u_{x\bar{x}}^n+2v_{xx\bar{x}\bar{x}}-2u_{xx\bar{x}\bar{x}}^n+\tau v_{\hat{x}}+\tau W \tag{14}$$

其中

$$W_j=\frac{p}{p+1}\{(v_j)^{p-1}(v_j)_{\hat{x}}+[(v_j)^p]_{\hat{x}}\}.$$

将(14)式与v作内积，并注意到类似(12)式和(13)式有

$$\langle v_{\hat{x}},v\rangle=0,\langle W,v\rangle=0.$$

于是

$$\langle g(v),v\rangle=2\|v\|^2-2\langle u^n,v\rangle+2\|v_x\|^2-2\langle u_x^n,v_x\rangle+2\|v_{xx}\|^2-2\langle u_{xx}^n,v_{xx}\rangle\ge$$

$$2\|v\|^2-2\|u^n\|\cdot\|v\|+2\|v_x\|^2-2\|u_x^n\|\cdot\|v_x\|+2\|v_{xx}\|^2-2\|u_{xx}^n\|\cdot\|v_{xx}\|\geq 2\|v\|^2-(\|u^n\|^2+\|v\|^2)+2\|v_x\|^2-(\|u_x^n\|^2+\|v_x\|^2)+2\|v_{xx}\|^2-(\|u_{xx}^n\|^2+\|v_{xx}\|^2)\geq \|v\|^2-(\|u^n\|^2+\|u_x^n\|^2+\|u_{xx}^n\|^2)+\|v_x^n\|^2+\|v_{xx}^n\|^2\geq\|v\|^2-(\|u^n\|^2+\|u_x^n\|^2+\|u_{xx}^n\|^2).$$

由此可见,$\forall v\in Z_h^0$,当 $\|v\|^2=\|u^n\|^2+\|u_x^n\|^2+\|u_{xx}^n\|^2+1$ 时,有 $\langle g(v),v\rangle>0$ 成立. 由引理 3.1 可知,存在 $v^*\in Z_h^0$ 使得 $g(v^*)=0$. 取 $u^{n+1}=2v^*-u^n$,u^{n+1} 即为差分方程(7)的解.

4 非线性差分格式的收敛性,稳定性及解的唯一性

令问题(3)~(5)的解为 $v(x,t)$,并记 $v_j^n=v(x_j,t_n)$. 则差分格式(7)~(9)的截断误差为:

$$r_j^n=(v_j^n)_t-(v_j^n)_{x\bar{x}t}+(v_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+\frac{p}{p+1}\{(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^p]_{\hat{x}}\} \tag{15}$$

由 Taylor 展开可知,当 $h,\tau\to 0$ 时,$r_j^n=O(\tau^2+h^2)$.

引理 4.1 设 $u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$,则初边值问题(3)~(5)的解满足:

$$\|u\|_{L_2}\leq C,\ \|u_x\|_{L_2}\leq C,\ \|u_{xx}\|_{L_2}\leq C,\ \|u\|_{L_\infty}\leq C,\ \|u_x\|_{L_\infty}\leq C.$$

证明 由(6)式得

$$\|u\|_{L_2}\leq C,\ \|u_x\|_{L_2}\leq C,\ \|u_{xx}\|_{L_2}\leq C.$$

再由 Sobolev 不等式有 $\|u\|_{L_\infty}\leq C$,$\|u_x\|_{L_\infty}\leq C$.

定理 4.2 设 $u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$,则差分格式(7)~(9)的解满足

$$\|u^n\|\leq C,\ \|u_x^n\|\leq C,\ \|u_{xx}^n\|\leq C,\ \|u^n\|_\infty\leq C,\ \|u_x^n\|_\infty\leq C(n=1,2,\cdots,N).$$

证明 由(10)式可得

$$\|u^n\|\leq C,\ \|u_x^n\|\leq C,\ \|u_{xx}^n\|\leq C.$$

再由离散的 Sobolev 不等式[15]得:

$$\|u^n\|_\infty\leq C,\ \|u_x^n\|_\infty\leq C.$$

定理 4.3 设 $u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$. 差分格式(7)~(9)的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(3)~(5)的解,且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 将(15)式减去(7)式,并记 $e_j^n=v_j^n-u_j^n$ 得

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(e_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+Q_{1,j}+Q_{2,j} \tag{16}$$

其中

$$Q_{1,j}=\frac{p}{p+1}[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}],$$

$$Q_{2,j}=\frac{p}{p+1}\{[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^p]_{\hat{x}}-[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^p]_{\hat{x}}\}.$$

将(16)式两端与 $2e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积,并注意到类似(12)式有 $\langle e_x^{n+\frac{1}{2}},2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0$,即

$$\langle r^n,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{\tau}(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+\frac{1}{\tau}(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)+\frac{1}{\tau}(\|e_{xx}^{n+1}\|^2-\|e_{xx}^n\|^2)+\langle Q_1+Q_2,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \tag{17}$$

由引理 4.1,定理 4.2,以及 Schwarz 不等式,有

$$\begin{aligned}\langle Q_1,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle&=\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}=\\&\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}-(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}=\\&\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=0}^{p-2}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-2-k}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^k e_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leq\\&Ch\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}|\cdot|e_j^{n+\frac{1}{2}}|+Ch\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})^2|\leq\\&C[\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2]\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\langle Q_2,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle&=\frac{2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}\{[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^p]_{\hat{x}}-[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^p]_{\hat{x}}\}e_j^{n+\frac{1}{2}}=\\&\frac{-2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}[(v_j^{n+\frac{1}{2}})^p-(u_j^{n+\frac{1}{2}})^p](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=\\&\frac{-2ph}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=0}^{p-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-1-k}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^k e_j^{n+\frac{1}{2}}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\leq\\&Ch\sum_{j=1}^{J-1}|e_j^{n+\frac{1}{2}}|\cdot|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}|\leq\\&C[\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2]\end{aligned} \tag{19}$$

又

$$\langle r^n,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\langle r^n,e^{n+1}+e^n\rangle\leq$$

$$\| r^n \|^2 + \frac{1}{2}[\| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2] \quad (20)$$

将(18)～(20)式代入(17)式，整理得

$$(\| e^{n+1} \|^2 - \| e^n \|^2) + (\| e_x^{n+1} \|^2 - \| e_x^n \|^2) + (\| e_{xx}^{n+1} \|^2 - \| e_{xx}^n \|^2) \le C\tau[\| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2 + \| e_x^{n+1} \|^2 + \| e_x^n \|^2] + \tau \| r^n \|^2 \quad (21)$$

令 $B^n = \| e^n \|^2 + \| e_x^n \|^2 + \| e_{xx}^n \|^2$. (21)式可变为

$$B^{n+1} - B^n \le C\tau(B^{n+1} + B^n) + \tau \| r^n \|^2,$$

即

$$(1 - C\tau)(B^{n+1} - B^n) \le 2C\tau B^n + \tau \| r^n \|^2.$$

只要取足够小的 τ，满足 $1 - C\tau > 0$，就有

$$B^{n+1} - B^n \le C\tau B^n + C\tau \| r^n \|^2 \quad (22)$$

对(22)式从 0 到 $n-1$ 求和得

$$B^n \le B^0 + C\tau \sum_{l=0}^{n-1} \| r^l \|^2 + C\tau \sum_{l=0}^{n-1} B^l.$$

又由

$$\tau \sum_{l=0}^{n-1} \| r^l \|^2 \le n\tau \max_{0 \le l \le n-1} \| r^l \|^2 \le T \cdot O(\tau^2 + h^2)^2,$$

以及 $e^0 = 0$ 有 $B^0 = O(\tau^2 + h^2)^2$. 于是

$$B^n \le O(\tau^2 + h^2)^2 + C\tau \sum_{l=0}^{n-1} B^l.$$

由引离散的 Gronwall 不等式[14]得

$$B^n \le O(\tau^2 + h^2)^2,$$

即

$$\| e^n \| \le O(\tau^2 + h^2), \| e_x^n \| \le O(\tau^2 + h^2), \| e_{xx}^n \| \le O(\tau^2 + h^2).$$

最后由离散的 Sobolev 不等式[15]有

$$\| e^n \|_\infty \le O(\tau^2 + h^2).$$

与定理 4.3 类似，可以证明：

定理 4.4　在定理 4.3 的条件下，差分格式(7)～(9)的解 u^n 以 $\| \cdot \|_\infty$ 稳定.

定理 4.5　差分格式(7)～(9)的解是唯一的.

5　数值实验

由方程(3)的孤波解[9]

$$u(x,t) = \left[\frac{(p+3)(3p+1)(p+1)}{2(p^2+3)(p^2+4p+7)}\right]^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{sech}^{\frac{4}{p-1}}\left[\frac{p-1}{\sqrt{4p^2+8p+20}}(x-ct)\right]$$

可以看出，当 $-x_L, x_R$ 充分大时，初边值问题(3)～(5)与方程(3)的柯西问题是一致的，其中 $c = \frac{p^4 + 4p^3 + 14p^2 + 20p + 25}{p^4 + 4p^3 + 10p^2 + 12p + 21}$ 是波速.

对初边值问题(3)～(5)考虑 $p = 3$ 和 $p = 6$ 两种情形进行数值实验. 取

$$u_0(x) = \left[\frac{(p+3)(3p+1)(p+1)}{2(p^2+3)(p^2+4p+7)}\right]^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{sech}^{\frac{4}{p-1}}\left(\frac{p-1}{\sqrt{4p^2+8p+20}}x\right),$$

并固定 $x_L = -30, x_R = 100, T = 40$. 当 τ 和 h 的不同取值时，数值解和孤波解在几个不同时刻的 l_∞ 误差表 1，对守恒量(6)的数值模拟结果见表 2.

表 1　数值解在几个不同时刻的 l_∞ 误差

Tab. 1　The l_∞ error of numerical solution at several different times

	$p=3$			$p=6$		
	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
$t=10$	6.6195e−4	1.6570e−4	4.1435e−5	7.0261e−4	1.7536e−4	4.4080e−5
$t=20$	1.1245e−3	2.8154e−4	7.0407e−5	1.2897e−3	3.2243e−4	8.0763e−5
$t=30$	1.5223e−3	3.8117e−4	9.5328e−5	1.8833e−3	4.7172e−4	1.1849e−4
$t=40$	1.8970e−3	4.7498e−4	1.1879e−4	2.5076e−3	6.2844e−4	1.5793e−4

表 2　在几个不同时刻对守恒量(6)的数值模拟 E^n

Tab. 2　The numerical simulation E^n for conserved quantities (6) at several different times

	$p=3$		$p=6$	
	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.025$
$t=10$	2.22692193486	2.22692133432	3.83523127932	3.83521324432
$t=20$	2.22692583371	2.22692168339	3.83529077062	3.83528351637
$t=30$	2.22692959843	2.22692189142	3.83523952851	3.83524688010
$t=40$	2.22693327522	2.22692207604	3.83528163013	3.83520663647

从表 1 和表 2 可以看出，本文对初边值问题(3)～(5)提出的差分格式(7)～(9)是有效的.

参考文献:

[1] Rosenau P. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line [J]. Phys Scripta, 1986, 34: 827.

[2] Rosenau P. Dynamics of dense discrete systems [J]. Prog Theor Phys, 1988, 79 : 1028.

[3] Peregrine D H. Calculations of the development of an Unduiar Bore [J]. J Fluid Mech, 1966, 25: 321.

[4] Chung S K. Finite difference approximate solutions for the Rosenau equation [J]. Appl Anal, 1998, 69: 149.

[5] 何挺, 胡兵, 徐友才. 广义 Rosenau 方程的有限元方法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1.

[6] Omrani K, Abidi F, Achouri T, *et al*. A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation [J] . Appl Math Comput, 2008, 201: 35.

[7] Chang Q, Wang G, Guo B. Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary notion [J]. J Comput Phys, 1991, 93: 360.

[8] Zhang L, A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation [J]. Appl Math Comput, 2005, 168: 962.

[9] Zuo J M, Zhang Y M, Zhang T D, *et al*. A new conservative difference scheme for the general Rosenau-RLW equation [J]. Bound Value Probl, 2010, 2010: 516260.

[10] Pan X, Zhang L. On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation [J]. Appl Math Model, 2012, 36: 3371.

[11] Pan X, Zhang L. Numerical simulation for general Rosenau-RLW equation: an average linearized conservative scheme [J]. Math Probl Eng, 2012, 2012: 517818.

[12] 傅雨泽,胡兵,郑茂波. Rosenau-RLW 方程的拟紧致 C-N 守恒差分格式 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2014, 51: 1143.

[13] 陈涛,卓茹,胡劲松. 广义 Rosenau-Kawahara 方程的一个非线性守恒差分逼近 [J]. 四川大学学报:自然科学版,2016, 53: 265.

[14] Browder F E. Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems [J]. Proc Symp Appl Math, 1965, 17: 24.

[15] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing: International Academic Publishers, 1991.