doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 03. 007

可数族 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的均衡问题和强收敛定理

沈金良[1]，朱　胜[2]，黄建华[3]
(1. 福州大学至诚学院，福州 35002；2. 福建农林大学金山学院，福州 350002；
3. 福州大学数计学院，福州 350108)

摘　要：在实自反 Banach 空间中，作者针对可数族 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的公共不动点和均衡问题的公共解构造了一类新型的混合迭代算法，并在适当条件下证明了该算法产生的序列强收敛. 进一步地，作者将此方法应用于求解极大单调算子的零点问题.

关键词：均衡问题；Bregman 全局拟渐进非扩张映射；Bregman 距离；自反 Banach 空间
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)02-0261-07

Strongconvergence theorems for equilibrium problem and countable Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mappings

SHEN Jin-Liang[1], *ZHU Sheng*[2], *HUANG Jian-Hua*[3]
(1. Fuzhou University Zhicheng College, Fuzhou 350002, China;
2. Jinshan College of Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
3. Institute of Mathematics and Computer, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: In this paper, we propose a new hybrid iterative scheme for finding a common solution of equilibrium problem and fixed point of countable Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mapping in reflexive Banach space. Meanwhile, we prove some strong convergence theorems under suitable control conditions. As a result, we apply this scheme to the zero point problem of maximal monotone operator.

Keywords: Equilibrium problem; Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mapping; Bregman distance; Reflexive Banach space
(2010 MSC 41A65, 90C48, 47H04)

1　引　言

非扩张算子的不动点理论在非线性分析领域具有广泛应用，比如求解极大单调算子的零元，凸可行问题，变分不等式问题和均衡问题等[1-23]. 然而，Hilbert 空间中的非扩张映射在 Banach 空间中却不一定是非扩张的. 比如，极大单调算子 $A:H\to 2^H$ 的预解算子 $R_A:=(I+A)^{-1}$ 在一般的 Banach 空间中未必是非扩张的. 解决该问题已有一些方法，其中之一是用 Bregman 距离函数来代替范数，Bregman 非扩张映射来代替非扩张映射，Bregman 投影来代替距离投影，详见文献[1~11,14,15]及其相关文献.

1967 年，Bregman[13] 在 Banach 空间中引入 Bregman 距离函数，讨论了 Bregman 非扩张映射不动点及其相关的问题. 1994 年，Blum 和 Oettli[14] 引入了均衡问题，即：设 $g:C\times C\to\mathbf{R}$ 是二元

收稿日期：2016-07-09
基金项目：福建省自然科学基金(2014J01008)；福建省中青年教师教育科研项目基金(JA15624)
作者简介：沈金良(1982-)，男，福建安溪人，讲师，主要研究方向为非线性分析. E-mail:181401539@qq.com

函数，对于任意的 $y \in C$，存在 $x \in C$，使得 $g(x,y) \geq 0$. 我们把均衡问题记为 $EP(g)$. 此后，均衡问题被广泛地应用到变分不等式问题、最优化问题、物理及结构分析问题、管理科学问题以及经济问题等领域. 2014 年，Chang 等[15]引入了 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的概念，在自反 Banach 空间中研究了 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的不动点问题，并获得了强收敛定理.

受到以上研究成果的启发，本文针对可数族 Bregman 全局拟-渐进非扩张映射的公共不动点和均衡问题的公共解，在自反 Banach 空间中提出了一类新型的混合迭代序列，在适当条件下证明了该序列的强收敛性，并将此算法应用到求解极大单调算子的零点问题上. 所得结果推广了文献[14]的结果.

2 预备知识

设 E 为实自反的 Banach 空间，E^* 为其对偶空间，$f: E \to (-\infty, +\infty]$ 是真实值函数，f 的 Fenchel 共轭函数 $f^*: E^* \to (-\infty, +\infty]$ 定义为

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x): x \in E\}, x^* \in E^*.$$

记 f 的有效域为 $\mathrm{dom}\, f = \{x \in E, f(x) < \infty\}$，$f$ 的有效域的内部为 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$. 对任意的 $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 与 $y \in E$，f 在方向 y 的右导数定义为：

$$f^0(x,y) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty)}{t} \tag{1}$$

如果对任意的 $y \in E$，(1)式中的极限存在，则称 f 在 x 上是 Gâteaux 可微的. 此时，$f^0(x,y)$ 与 f 在 x 的梯度值 $\nabla f(x)$ 是相同的. 称 f 在 x 上是 Frechet 可微的，如果(1)式极限关于 y 在单位球面上是一致存在的. 称 f 在 E 的子集 C 上是一致 Frechet 可微的，如果(1)式中的极限关于 $x \in C$ 与 $\|y\| = 1$ 一致存在.

2001 年，Bauschke、Borwein 和 Combettes[16] 给出了 Legendre 函数 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 的定义，即 f 是 Legendre 函数当且仅当它满足下列条件：

(i) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f) \neq \varnothing$，$f$ 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$ 上是 Gâteaux 可微的且 $\mathrm{dom}\nabla f = \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$；

(ii) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f^*) \neq \varnothing$，$f^*$ 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f^*)$ 上 Gâteaux 可微的且 $\mathrm{dom}\nabla f^* = \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f^*)$.

注 1[15] 如果 E 为实自反的 Banach 空间，f 为 Legendre 函数，则下列结论成立：

(i) f 为 Legendre 函数当且仅当 f^* 为 Legendre 函数；

(ii) $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$；

(iii) $\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}$，$\mathrm{ran}\nabla f = \mathrm{dom}\nabla f^* = \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f^*)$，$\mathrm{ran}\nabla f^* = \mathrm{dom}\nabla f = \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$，其中 $\mathrm{ran}\, f$ 表示 f 的值域；

(iv) f 和 f^* 分别在它们的有效域内部是严格凸的.

定义 2.1[17] 设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数，二元函数 $D_f: \mathrm{dom}\, f \times \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f) \to [0, +\infty)$ 定义为

$$D_f(y,x) = f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x\rangle,$$

则称 D_f 为 Bregman 距离函数.

值得注意的是 Bregman 距离并不是真正实际意义上的距离. 显然 $D_f(x,x)=0$，但是当 $D_f(x,y)=0$ 时，$x = y$ 不一定成立. 一般地，D_f 也不满足对称性质和三角不等式.

从 Bregman 距离的定义中容易得到如下基本性质：

(i) (两点等式)对任意的 $x,y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$，有

$$D_f(x,y) + D_f(y,x) = \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y\rangle;$$

(ii) (三点等式)对任意的 $x \in \mathrm{dom}\, f$ 与 $y,z \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$，有

$$D_f(x,y) + D_f(y,z) - D_f(x,z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x-y\rangle;$$

(iii) (四点等式)对任意的 $y,w \in \mathrm{dom}\, f$ 与 $x,z \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$，有

$$D_f(y,x) - D_f(y,z) - D_f(w,x) + D_f(w,z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(x), y-w\rangle.$$

定义 2.2[13] 设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数，C 为 $\mathrm{dom}\, f$ 中的非空闭凸子集，$x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$，若存在 $proj_C^f(x) \in C$ 满足

$$D_f(proj_C^f(x), x) = \inf\{D_f(y,x): y \in C\},$$

则称 $proj_C^f(x)$为 x 在 C 上的 Bregman 投影.

从文献[13]中可知，当 C 为非空闭凸集时 $proj_C^f(x)$是存在的且是唯一的.

定义 2.3[18] 设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数. 称 f 是

(i) 在 $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$ 全局凸的，若它在 x 的总体凸性模是正的，其中 f 在 x 的总体凸性模 $v_f: \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 定义为

$$v_f(x,t) := \inf\{D_f(y,x): y \in \mathrm{dom}\, f, \|y-x\| = t\} \ \forall t > 0;$$

(ii) 全局凸的，若对 $\forall x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$，$f$ 在 x 处都是总体凸的；

(iii) 在有界集上全局凸的，若对 E 的任何非空有界子集 B 和 $t>0$，$v_f(B,t)$ 均为正数，其中

$$v_f(B,t):=\inf\{v_f(x,t):x\in B\cap \mathrm{dom} f\}$$

为 f 在集合 B 上的全局凸性模.

引理 2.4[19]　如果 $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$，则下列结论是等价的：

(i) 函数 f 在 x 处是全局凸的；

(ii) 对任意序列 $\{y_n\}\subset \mathrm{dom}\ f$，$\lim\limits_{n\to\infty} D_f(y_n,x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-x\|=0$；

(iii) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $y\in \mathrm{dom}\ f$ 和 $D_f(y,x)\le\delta$ 时，有 $\|x-y\|\le\varepsilon$.

引理 2.5[18]　称 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是序列一致的，如果对 E 中任意两个序列 $\{x_n\}\subset \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$ 和 $\{y_n\}\subset \mathrm{dom}\ f$，当 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty} D_f(y_n,x_n)=0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$$

成立. f 在有界集上是全局凸的当且仅当 f 是序列一致的.

引理 2.6[19]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是一致 Frechet 可微的，且在 E 的有界子集上是有界的. 那么 f 在 E 的有界子集上是一致连续的，而且 $\nabla f:E$ 的强拓扑 $\to E^*$ 的强拓扑在 E 的有界子集上是一致连续的.

引理 2.7[20]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是 Gâteaux 可微的全局凸函数. 取 $x_0\in E$. 如果序列 $\{D_f(x_n,x_0)\}$ 是有界的，则序列 $\{x_n\}$ 也是有界的.

引理 2.8[21]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数且在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$ 上是全局凸的，$x\in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$，$C$ 是 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$ 的非空闭凸子集，如果 $z\in C$，则下列结论等价：

(i) $z=proj_C^f(x)$；

(ii) z 是如下变分不等式的解：$\langle\nabla f(x)-\nabla f(z),z-y\rangle\ge 0,\forall y\in C$，即

$$\langle\nabla f(x)-\nabla f(proj_C^f(x)),\ proj_C^f(x)-y\rangle\ge 0,\forall y\in C;$$

(iii) z 是如下不等式的解：$D_f(y,z)+D_f(z,x)\le D_f(y,x),\forall y\in C$，即

$$D_f(y,proj_C^f(x))+D_f(proj_C^f(x),x)\le D_f(y,x),\forall y\in C.$$

定义 2.9　设 C 是 E 的子集，记 $F(T)$ 为 T 的不动点集，即 $F(T)=\{x\in C\mid Tx=x\}$. 称映射 $T:C\to C$ 为：

(i) 非扩张的，如果 $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|,\forall x,y\in C$；

(ii) 拟非扩张的，如果 $F(T)\ne\varnothing$，且 $\|Tx-p\|\le\|x-y\|,\forall x\in C,p\in F(T)$；

(iii) 闭的，如果对于 C 中的序列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x$ 和 $Tx_n\to y$，其中 $x,y\in C$，则 $Tx=y$；

(iv) 在 C 上是一致渐近正则的，如果 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}\|T^{n+1}x-T^nx\|=0$；

(v) Bregman 相对非扩张的，如果有 $F(T)\ne\varnothing$，$F(T)=\hat{F}(T)$，并且 $D_f(p,Tx)\le D_f(p,x)$，其中 x 是 C 中的任一点，p 是 T 的不动点，$\hat{F}(T)$ 为 T 的渐进不动点集. 点 $p\in C$ 称为 T 的渐进不动点，如果 C 中有一个序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 p，使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$；

(vi) Bregman 拟非扩张的，如果 $F(T)\ne\varnothing$，$D_f(p,Tx)\le D_f(p,x),\forall x\in C,p\in F(T)$；

(vii) Bregman 拟-渐进非扩张的，如果 $F(T)\ne\varphi$，存在实序列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$，$\lim_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$D_f(p,T^nx)\le k_nD_f(p,x),\quad \forall x\in C,p\in F(T) \tag{2}$$

(viii) Bregman 全局拟渐进非扩张的，如果 $F(T)\ne\varnothing$，存在两个极限为零的非负实序列 $\{v_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$，以及一个严格单调递增的函数 $\zeta:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ $(\zeta(0)=0)$，使得

$$D_f(p,T^nx)\le D_f(p,x)+v_n\zeta(D_f(p,x))+\mu_n,\forall n\ge 1,\forall x\in C,p\in F(T).$$

注 2　由以上定义可知，Bregman 相对非扩张映射一定是 Bregman 拟非扩张映射；Bregman 拟-非扩张映射一定是 Bregman 拟渐进非扩张映射，反之不然.

如果假设 $\zeta(t)=t,t\ge 0,v_n=k_n-1$ 以及 $\mu_n=0$，那么(2)式就转化为

$$D_f(p,T^nx)\le D_f(p,x)+v_n\zeta(D_f(p,x))+\mu_n,\forall n\ge 1,\forall x\in C,p\in F(T).$$

因此所有的 Bregman 拟渐进非扩张映射都是 Bregman 全局拟渐进非扩张映射，反之不然.

例 2.10　设 E 是实自反 Banach 空间，$A:E\to 2^{E^*}$ 是极大单调算子，$A^{-1}(0)\ne\varphi$，$f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是一致 Frechet 可微的，且在 E 的有界子集上是有界的. 则 A 的预解算子 $\mathrm{Res}_A^f(x)=(\nabla f+A)^{-1}\circ\nabla f(x)$ 是闭的以及 E 映到 $D(A)$ 上的 Bregman 相对非扩张映射. 因此 Res_A^f 是闭的 Bregman 全局拟渐进非扩张映射.

假设 2.11　设 C 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，映射 $g:C\times C\to\mathbf{R}$

满足以下条件：

(i) $g(x,x)=0, \forall x \in C$；

(ii) g 是单调的，即 $g(x,y)+g(y,x) \le 0$，$\forall x,y \in C$；

(iii) $\forall x,y,z \in C, \lim_{t\to 0^+} \sup g(tz+(1-t)x, y) \le g(x,y)$；

(vi) $\forall x \in C, g(x,\cdot)$ 是凸的和下半连续的.

定义 2.12[22] 设 $g: C\times C \to \mathbf{R}$ 是二元函数，g 的预解算子 $\mathrm{Res}_g^f: E \to 2^C$ 定义为：

$$\mathrm{Res}_g^f(x)=\{z\in C: g(z,y)+ \langle \nabla f(z)-\nabla f(y), y-z\rangle \ge 0, \forall y\in C\}.$$

引理 2.13[19] 设 $f: E\to(-\infty,+\infty]$ 是强制的($\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\|=0$)Legendre 函数，$C$ 是 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$ 的非空闭凸子集. 令 $g: C\times C\to \mathbf{R}$ 满足假设 2.11 的条件，则以下结论成立：

(i) Res_g^f 是单值的，并且 $\mathrm{dom}(\mathrm{Res}_g^f)=E$；

(ii) Res_g^f 是 Bregman 稳定非扩张的；

(iii) $EP(g)$ 是 C 的闭凸子集，且 $EP(g)=F(\mathrm{Res}_g^f)$；

(vi) 对所有的 $x\in E, u\in F(\mathrm{Res}_g^f)$，有 $D_f(u, \mathrm{Res}_g^f x)+D_f(\mathrm{Res}_g^f x, x)\le D_f(u,x)$.

引理 2.14[23] 设 $f: E\to\mathbf{R}$ 是 Legendre 函数，满足 ∇f^* 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$ 的有界子集上是有界的. 取 $x\in E$. 如果 $\{D_f(x,x_n)\}$ 是有界的，那么序列 $\{x_n\}$ 也是有界的.

引理 2.15[15] 设 E 是实自反 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集，$f: E\to(-\infty,+\infty]$ 是 Legendre 函数，并且在 E 的有界子集上是全局凸的. 设 $T: C\to C$ 是闭的和 Bregman 全局拟-渐进非扩张映射，对于非负实序列 $\{v_n\}$，$\{\mu_n\}$ 和严格递增的连续函数 $\zeta: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 有 $v_n\to 0, \mu_n\to 0 (n\to\infty)$，以及 $\zeta(0)=0$，那么 T 不动点集 $F(T)$ 是 C 的闭凸子集.

引理 2.16[20] 设 $f: E\to\mathbf{R}$ 为 Gâteaux 可微的全局凸函数，任取 $x_0\in E$，C 是 E 的非空闭凸子集. 假定序列 $\{x_n\}$ 是有界的，且其任一子列的弱极限都包含在 C 内. 如果对于任意的自然数 n，都有

$$D_f(x_n,x_0)\le D_f(proj_C^f(x_0), x_0),$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $proj_C^f(x_0)$.

3 主要结果

定理 3.1 设 E 是实自反 Banach 空间，$f: E\to\mathbf{R}$ 是强制的 Legendre 函数，且在 E 的有界子集上是有界、一致 Frechet 可微和全局凸的. C 是 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$ 的非空闭凸子集，$T_i: C\to C, i=1,2,3,\cdots$ 是可数族闭 Bregman 全局拟-渐进非扩张映射，对于非负实序列 $\{v_{i,n}\}$，$\{\mu_{i,n}\}$ 和严格单调递增的连续函数 $\zeta: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 有 $v_n=\sup\{v_{i,n}: i\ge 1\}$，

$$\mu_n=\sup\{\mu_{i,n}: i\ge 1\}, v_n\to 0, \mu_n\to 0 (n\to\infty)$$

以及 $\zeta(0)=0$. 又设 $g: C\times C\to\mathbf{R}$ 是满足假设 2.11 中(i)～(vi)的二元函数. 假定每一个映射 T_i 都是一致渐进正则的，$\{\alpha_{i,n}\}$ 是 $(0,1)$ 中的实序列，满足 $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}=1, \lim\inf_{n\to\infty}\alpha_{i,n}>0, i\ge 1$. $\Omega:=\bigcap_{i=1}^n F(T_i)\cap EP(g)$. 定义序列 $\{x_n\}$ 如下：

$$\begin{cases} x_1=u\in C, \\ u_{i,n}: g(u_{i,n},y)+\langle\nabla f(u_{i,n})-\nabla f(T_i^n x_n), \\ \quad y-u_{i,n}\rangle\ge 0, \forall y\in C, i=1,2,3,\cdots, \\ C_n=\{z\in C: \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} D_f(z,u_{i,n})\le \\ \quad D_f(z,x_n)+v_n\xi_n+\mu_n\}, \\ D_n=\bigcap_{i=1}^n C_i, x_{n+1}=proj_{D_n}^f u, \end{cases}$$

其中 $\xi_n=\sup\zeta(D_f(v,x_n))$，$proj_{D_n}^f$ 是 E 在 D_n 上的 Bregman 投影. 若 $\Omega:=\bigcap_{i=1}^n F(T_i)\cap EP(g)$ 是有界的，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\bar{x}=proj_\Omega^f u$.

证明 以下分为五个步骤来完成此定理的证明.

第一步，对任意的 $n\ge 1$，Ω 是闭凸的. 根据 C_n 的定义有

$$\sum_{i=1}^n D_f(z,u_{i,n})\le D_f(z,x_n)+ v_n\xi_n+\mu_n, z\in C.$$

再由 $D_f(\cdot)$ 的定义以及 $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}=1$ 可知

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}(f(z)-f(u_{i,n})-\langle\nabla f(u_{i,n}), z-u_{i,n}\rangle)\le f(z)-f(x_n)-\langle\nabla f(x_n), z-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n.$$

移项整理得

$$f(x_n)-\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} f(u_{i,n})\le \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}), z-u_{i,n}\rangle - \langle\nabla f(x_n), z-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n \tag{3}$$

任取 $p,q\in C_n, t\in(0,1)$，令 $w=tp+(1-t)q$. 下面证明 $w\in C_n$. 由(3)式可得

$$f(x_n)-\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} f(u_{i,n})\le \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}), p-u_{i,n}\rangle - \langle\nabla f(x_n), p-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n,$$

$$f(x_n)-\sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} f(u_{i,n})\le$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),q-u_{i,n}\rangle-\langle\nabla f(x_n),q-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n.$$

把 $w=tp+(1-t)q$ 带入(3)式的右边得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),w-u_{i,n}\rangle-\langle\nabla f(x_n),w-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n=\\&\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),tp+(1-t)q-u_{i,n}\rangle-\langle\nabla f(x_n),tp+(1-t)q-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n=\\&t\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),p-u_{i,n}\rangle+(1-t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),q-u_{i,n}\rangle-\\&t\langle\nabla f(x_n),p-x_n\rangle-(1-t)\langle\nabla f(x_n),q-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n=\\&t\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),p-u_{i,n}\rangle-\langle\nabla f(x_n),p-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n\Big]+\\&(1-t)\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\langle\nabla f(u_{i,n}),q-u_{i,n}\rangle-\langle\nabla f(x_n),q-x_n\rangle+v_n\xi_n+\mu_n\Big]\geq\\&t\Big[f(x_n)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}f(u_{i,n})\Big]+(1-t)\Big[f(x_n)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}f(u_{i,n})\Big]=\\&f(x_n)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}f(u_{i,n}).\end{aligned}$$

所以 $w\in C_n$，即对于任意的 $n\geq1$，C_n 是闭凸的，故 D_n 也是闭凸的.

由引理 2.13 及 $u_{i,n}=\mathrm{Res}_g^f T_i^n x_n$ 可得，对于任意的 $v\in\Omega$，有

$$D_f(v,\mathrm{Res}_g^f T_i^n x_n)\leq D_f(v,T_i^n x_n).$$

再由 $D_f(\cdot)$ 的定义，

$$\begin{aligned}D_f(v,u_{i,n})&=D_f(v,\mathrm{Res}_g^f T_i^n x_n)\leq D_f(v,T_i^n x_n)\leq D_f(v,x_n)+\\&v_{i,n}\zeta(D_f(v,x_n))+\mu_{i,n}\leq D_f(v,x_n)+v_n\zeta(D_f(v,x_n))+\mu_n\leq\\&D_f(v,x_n)+v_n\xi_n+\mu_n,\end{aligned}$$

其中 $\xi_n=\sup\zeta(D_f(v,x_n))$. 由上式可知，对于任意的 $n\geq1$ 有 $v\in C_n$. 所以 $\Omega\subset C_n$. 因为 $D_n=\cap_i^n C_n$，所以 $\Omega\subset D_n$. 因此，$\Omega:=\cap_{i=1}^n F(T_i)\cap EP(g)$ 是闭凸的.

第二步，$\{x_n\}$ 是有界的. 由引理 2.7(iii) 及 $x_{n+1}=proj_{D_n}^f u$ 可知，对于任意的 $v\in\Omega$，有

$$D_f(x_{n+1},u)=D_f(proj_{D_n}^f u,u)\leq D_f(v,u)-D_f(v,proj_{D_n}^f u)\leq D_f(v,u).$$

所以序列 $\{D_f(x_n,u)\}$ 是有界的. 再由引理 2.7 得序列 $\{x_n\}$ 是有界的.

第三步，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 根据 $\{x_n\}$ 的定义可知 $x_{n+1}=proj_{D_n}^f u$，$x_{n+2}=proj_{D_{n+1}}^f u\in D_{n+1}\subset D_n$. 由引理 2.8 有

$$D_f(x_{n+2},proj_{D_n}^f u)+D_f(proj_{D_n}^f u,u)\leq D_f(x_{n+2},u)\tag{4}$$

即

$$D_f(x_{n+2},x_{n+1})+D_f(x_{n+1},u)\leq D_f(x_{n+2},u)\tag{5}$$

所以 $\{D_f(x_n,u)\}$ 是单调递增的序列. 因为 $\{D_f(x_n,u)\}$ 是有界的，所以 $\lim_{n\to\infty}D_f(x_n,u)$ 存在. 由于 D_n 是压缩的，对于任意的正整数 $m\geq n$，有 $D_m\subset D_n$ 以及

$$x_m=proj_{D_{m-1}}^f u\in D_{m-1}\subset D_{n-1}.$$

因此，

$$\begin{aligned}D_f(x_m,x_n)&=D_f(x_m,proj_{D_{n-1}}^f u)\\&\leq D_f(x_m,u)-D_f(proj_{D_{n-1}}^f u,u)=\\&D_f(x_m,u)-D_f(x_n,u)\end{aligned}\tag{6}$$

在式(6)中令 $m,n\to\infty$，可得

$$D_f(x_m,x_n)\to0(m,n\to\infty)\tag{7}$$

根据引理 2.5 的结论可知，

$$\lim_{m\to\infty,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0\tag{8}$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列.

第四步，$\{x_n\}$ 强收敛于 $x^*\in\Omega:=\cap_i^n F(T_i)\cap EP(g)$. 由于 E 是自反的 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 不妨假设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x^*\in C\tag{9}$$

首先证明 $x^*\in\cap_{i=1}^n F(T_i)$. 在(7)式中取 $m=n+1$. 则有 $\lim_{n\to\infty}D_f(x_{n+1},x_n)=0$. 由引理 2.5 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0\tag{10}$$

因为 $x_{n+1}=proj_{D_n}^f u\in D_n\subset C_n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}D_f(x_{n+1},u_{i,n})\leq D_f(x_{n+1},x_n)+v_n\xi_n+\mu_n,\ \xi_n=\sup\zeta(D_f(v,x_n)).$$

由 $\liminf_{n\to\infty}\alpha_{i,n}>0$，$D_f(x_{n+1},x_n)\to0$，以及 $v_n\to0$，$\mu_n\to0(n\to\infty)$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}D_f(x_{n+1},u_{i,n})=0\tag{11}$$

又因为 f 是下半连续的，Ω 是有界的，且

$$D_f(v,u_{i,n})\leq D_f(v,x_n)+v_n\xi_n+\mu_n,$$

所以 $D_f(v,x_n)+v_n\xi_n+\mu_n$ 是有界的，故 $D_f(v,u_{i,n})$ 也是有界的. 由引理 2.14 可得 $\{u_{i,n}\}$ 是有界的. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-u_{i,n}\|=0\tag{12}$$

由于

$$\|x_n-u_{i,n}\|\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-u_{i,n}\|,$$

两边取极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_{i,n}\|=0 \tag{13}$$

因为 f 一致 Frechet 可微,由引理 2.6 有

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_n)-\nabla f(u_{i,n})\|=0 \tag{14}$$

又因为 f 是一致连续的,所以

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_n)-f(u_{i,n})\|=0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&D_f(v,x_n)-D_f(v,u_{i,n})=\\&f(v)-f(x_n)-\langle\nabla f(x_n),v-x_n\rangle-\\&[f(v)-f(u_{i,n})-\langle\nabla f(u_{i,n}),v-u_{i,n}\rangle]=\\&f(u_{i,n})-f(x_n)+\langle\nabla f(u_{i,n}),v-u_{i,n}\rangle-\\&\langle\nabla f(x_n),v-x_n\rangle=\\&f(u_{i,n})-f(x_n)+\\&\langle\nabla f(u_{i,n}),x_n-u_{i,n}\rangle+\\&\langle\nabla f(u_{i,n}),v-x_n\rangle\end{aligned} \tag{16}$$

此外,因为 $\{u_{i,n}\}$ 是有界的,所以 $\{\nabla f(u_{i,n})\}$ 也是有界的. 由式(13)~(15)可得

$$\lim_{n\to\infty}D_f(v,x_n)-D_f(v,u_{i,n})=0 \tag{17}$$

由引理 2.13 (iv)以及 $u_{i,n}=\mathrm{Res}_g^fT_i^nx_n$,有

$$\begin{aligned}&D_f(u_{i,n},T_i^nx_n)=D_f(\mathrm{Res}_g^fT_i^nx_n,T_i^nx_n)\le\\&D_f(v,T_i^nx_n)-D_f(v,\mathrm{Res}_g^fT_i^nx_n)\le\\&D_f(v,x_n)+v_n\zeta(D_f(v,x_n))+\\&\mu_n-D_f(v,u_{i,n})\end{aligned} \tag{18}$$

再由前面证明知 $D_f(v,x_n)$ 是有界的. 故 $\zeta(D_f(v,x_n))$ 也是有界的. 再由式(17)以及

$$v_n\to0,\mu_n\to0(n\to\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty}D_f(u_{i,n}T_i^nx_n)=0 \tag{19}$$

据引理 2.5 可知

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{i,n}-T_i^nx_n\|=0 \tag{20}$$

由式(13),(20)以及 $\|x_n-T_i^nx_n\|\le\|x_n-u_{i,n}\|+\|u_{i,n}-T_i^nx_n\|$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_i^nx_n\|=0 \tag{21}$$

又 $\|x^*-T_i^nx_n\|\le\|x^*-x_n\|+\|x_n-T_i^nx_n\|$,所以 $\lim_{n\to\infty}\|x^*-T_i^nx_n\|=0$. 另外,

$$\|x^*-T_i^{n+1}x_n\|\le\|x^*-T_i^nx_n\|+\|T_i^nx_n-T_i^{n+1}x_n\| \tag{22}$$

因为每一个 T_i 都是一致渐进正则的,由式(22)可知

$$\lim_{n\to\infty}\|x^*-T_i^{n+1}x_n\|=0,$$

即当 $n\to\infty$ 时 $T_i^nx_n\to x^*$. 再根据 T_i 的紧性可得 $x^*\in\bigcap_{i=1}^{\infty}F(T_i)$.

下面证明 $x^*\in EP(g)$. 映射 f 是一致 Frechet 可微的, ∇f 在有界集上是一致连续的. 由式(20)有

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(u_{i,n})-\nabla f(T_i^nx_n)\|=0 \tag{23}$$

因为 $u_{i,n}=\mathrm{Res}_g^fT_i^nx_n$,所以有

$$g(u_{i,n},y)+\langle\nabla f(u_{i,n})-\nabla f(T_i^nx_n),y-u_{i,n}\rangle\ge0,\forall y\in C.$$

由假设 2.11 (ii)可得

$$\langle\nabla f(u_{i,n})-\nabla f(T_i^nx_n),y-u_{i,n}\rangle\ge-g(u_{i,n},y)\ge g(y,u_{i,n}),\forall y\in C \tag{24}$$

在式(24)中令 $n\to\infty$, 再由假设 2.11 (iv)有

$$g(y,x^*)\le0,\forall y\in C \tag{25}$$

对于任意的 $y\in C$, 取 $t\in(0,1]$ 并令 $y_t=ty+(1-t)x^*\in C$. 则有 $g(y_t,x^*)\le0$ 以及

$$0=g(y_t,y_t)\le tg(y_t,y)+(1-t)g(y_t,x^*)\le tg(y_t,y) \tag{26}$$

所以有 $g(y_t,y)\ge0$. 进一步可得

$$0\le\limsup_{t\to0^+}g(y_t,y)=\limsup_{t\to0^+}g(ty+(1-t)x^*,y),\forall y\in C.$$

即证得 $x^*\in EP(g)$. 综合以上证明可得 $x^*\in\Omega:=\bigcap_i^nF(T_i)\cap EP(g)$.

第五步, $\{x_n\}$ 强收敛于 $\bar{x}=proj_\Omega^fu$. 由引理 2.13和 2.15 可知 $F(T)\cap EP(g)$ 是 E 的非空闭凸子集. 因为 $proj_\Omega^fu\in\Omega\subset D_n\subset C_n$,而 $x_{n+1}=proj_\Omega^fu$,所以有

$$D_f(x_{n+1},u)\le D_f(proj_\Omega^fu,u) \tag{27}$$

由引理 2.16 有 $x_n\to proj_\Omega^fu(n\to\infty)$. 因此,序列 $\{x_n\}$强收敛于 $\bar{x}=proj_\Omega^fu$. 证毕.

4 应用:极大单调算子的零点问题

在例 2.10 中,我们假设 E 是自反的 Banach 空间, $A:E\to2^{E^*}$ 是一个极大单调算子. 如果 $A^{-1}(0)\neq\varnothing$ 和 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是一致 Frechet 可微的,并且在 E 的有界子集上是有界的,那么 A 的预解算子 $\mathrm{Res}_A^f(x)=(\nabla f+A)^{-1}\circ\nabla f(x)$ 是闭的以及 E 映到 E 上的 Bregman 相对非扩张映射. 根据定理 3.1 的结论可得以下定理.

定理 4.1 设 E 是实自反 Banach 空间, $f:E\to\mathbf{R}$ 是强制的 Legendre 函数,且在 E 的有界子集上是有界、一致 Frechet 可微和全局凸的. C 是 int(dom f) 的非空闭凸子集,$(\mathrm{Res}_A^f)_i:C\to C$ 是闭的 Bregman 全局拟-渐进非扩张映射,并且对于非负实序列 $\{v_{i,n}\}$,$\{\mu_{i,n}\}$和严格递增的连续函数 $\zeta:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 有

$$v_n=\sup\{v_{i,n}:i\ge1\},$$

$$\mu_n=\sup\{\mu_{i,n}:i\ge1\},v_n\to0,\mu_n\to0(n\to\infty),$$

以及 $\zeta(0)=0$. 设 $g:C\times C\to\mathbf{R}$ 是满足假设 2.11 中条件(i)~(iv)的二元函数. 假定每一个$(\mathrm{Res}_A^f)_i$ 是一致渐进

正则的，$\{\alpha_{i,n}\}$ 是 (0,1) 中的实序列，满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}=1$，$\liminf_{n\to\infty}\alpha_{i,n}>0$，$i\geq 1$，$\Omega:=\{\bigcap_{i=1}^{n}F[(\mathrm{Res}_A^f)_i]\}\cap EP(g)\neq\varnothing$. 序列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$\begin{cases} x_1=u\in C, \\ u_{i,n}: g(u_{i,n},y)+\langle \nabla f(u_{i,n})-\nabla f[(\mathrm{Res}_A^f)_i^n x_n], \\ y-u_{i,n}\rangle\geq 0,\ \forall y\in C, \\ C_n=\{z\in C: \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}D_f(z,u_{i,n})\leq \\ \quad D_f(z,x_n)+v_n\xi_n+\mu_n\}, \\ D_n=\bigcap_{i=1}^{n}C_i, x_{n+1}=proj_{D_n}^f u, i=1,2,3,\cdots, \end{cases}$$

其中 $\xi_n=\sup\zeta(D_f(v,x_n))$，$proj_{D_n}^f$ 是 E 在 D_n 上的 Bregman 投影. 如果 $\Omega:=\bigcap_{i=1}^{n}F[(\mathrm{Res}_A^f)_i]\cap EP(g)$ 是有界的，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\bar{x}=proj_{\Omega}^f u$.

参考文献：

[1] Browder F E. Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space [J]. Proc Nat Acad Sci, 1965, 53: 1272.

[2] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps [J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 957.

[3] Martinez-Yanes C, Xu H K. Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 2400.

[4] Qin X, Su Y. Strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space [J]. Nonlinear Anal, 2007, 67: 1958.

[5] Qin X L, Cho Y J, Kang S M, *et al*. Convergence of a modified Halpern-type iterative algorithm for (quasi) nonexpansive mappings [J]. Appl Math Lett, 2009, 22: 1051.

[6] Wang Z M, Su Y F, Wang D X, *et al*. A modified Halpern-type iteration algorithm for a family of hemi-relative nonexpansive mappings and systems of equilibrium problems in Banach spaces [J]. Comput Appl Math, 2011, 235: 2364.

[7] Su Y F, Xu H K, Zhang X. Strong convergence theorems for two countable families of weak relatively nonexpansive mappings and applications [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73: 3890.

[8] Kang J, Su Y, Zhang X. Hybrid algorithm for fixed points of weak relatively nonexpansive mappings and applications [J]. Nonlinear, 2010, 4: 755.

[9] Chang S S, Lee H W J, Chan C K. A new hybrid method for solving a generalized equilibrium problem solving a variational inequality problem and obtaining common fixed points in Banach spaces with applications [J]. Nonlinear Anal TMA, 2010, 73: 2260.

[10] Chang S S, Chan C K, Lee H W J. Modified block iterative algorithm for quasi-asymptotically nonexpansive mappings and equilibrium problem in Banach spaces [J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 7520.

[11] 朱胜，黄建华，万丙晟. Bregman 弱相对非扩张映像与均衡问题的强收敛定理 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：471.

[12] 叶静妮，陈丽君，黄建华. 含参原始向量混合拟均衡问题和含参对偶向量混合拟均衡问题解的 Hölder 连续性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：1202.

[13] Bregman L M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming [J]. USSR Comput Math Phys, 1967, 7: 200.

[14] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems [J]. Math Student, 1994, 63: 123.

[15] Chang S S, Wang L, Wang X R, *et al*. Strong convergence theorems for Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mappings in reflexive Banach spaces [J]. Appl Math Comput, 2014, 228: 38.

[16] Bauschke H H, Borwein J M, Combettes P L. Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces [J]. Comm Contemp Math, 2001, 3: 615.

[17] Censor Y, Lent A. An iterative row-action method for interval convex programing [J]. J Optimiz Theory App, 1981, 34: 321.

[18] Butnariu D, Iusem A N. Totally convex functions for fixed points computation and infinite dimensional optimization [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.

[19] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73: 122.

[20] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces [J]. Numer Func Anal Opt, 2010, 31: 22.

[21] Prykarpatsky Y A, Blackmore D, Golenia J, *et al*. Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces [J]. Abstr Appl Anal, 2006, 2006: 99.

[22] Combettes P L, Hirstoaga SA. Equilibrium programming in Hilbert spaces [J]. J Nonlinear Convex A, 2005, 6: 117.

[23] Kassay G, Reich S, Sabach S. Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces [J]. SIAM J Optimiz, 2011, 21: 1319.