doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 03. 004

一类平衡问题的通有唯一性与良定性

丘小玲[1]，彭定涛[1]，贾文生[1,2]
(1. 贵州大学数学与统计学院，贵阳 550025；2. 贵州大学科学技术研究院，贵阳 550025)

摘 要：本文首先构造没有凸性的平衡问题空间，并以集值映射为工具，在紧值和非紧集的环境下证明了平衡问题的解是通有唯一的，也就是说，在 Baire 分类的意义下，大多数的平衡问题都有唯一解. 然后，本文借助有限理性模型统一研究良定性的方法，也得到平衡问题的解是通有良定的. 最后，本文给出了平衡问题解的刻画定理.

关键词：平衡问题；非凸性；usco 映射；通有唯一性；通有良定性
中图分类号：O177. 9 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)02-0239-10

Generic uniqueness and generic well-posedness on a class of equilibrium problems

QIU Xiao-Ling[1]，*PENG Ding-Tao*[1]，*JIA Wen-Sheng*[1,2]
(1. School of Mathematics and Computer Science，Guizhou University，Guiyang 550025，China；
2. Institute of Science and Technology，Guizhou University，Guiyang 550025，China)

Abstract：We construct spaces of the equilibrium problems with nonconvexity in compact or noncompact setting via the set-valued mapping，and prove the equilibrium problems possess generic unique properties，it is to say，in the sense of Baire category，most equilibrium problems have unique solution. Then we obtain the generic well-posedness on equilibrium problems by virtue of the method of bounded rational model of the unified well-posedness. The characteristic expression theorems of the solutions are given at last.

Keywords：Equilibrium problem；Nonconvexity；usco mapping；Generic uniqueness；Generic well-posedness
(2010 MSC 47H14，54C60，90C31，91A26)

1 引 言

设 C 是度量空间 X 中的非空子集，$f:C\times C\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数. 平衡问题是指：求 $\bar{x}\in C$，使

$$\forall y\in C, f(\bar{x},y)\geqslant 0.$$

此平衡问题简记为 EP (f)，$\bar{x}$ 称为平衡问题 EP (f) 的解或平衡点.

自 Blum 和 Oettli[1] 在 1994 年明确提出平衡问题以来，平衡问题便成为许多学者研究的对象. 这主要是因为其为许多问题提供了一个统一的数学框架，如优化问题、变分问题、不动点问题、均衡问题等. 因此，无论是对平衡问题本身的研究还是其应用研究[2-7]都有重要意义.

从平衡问题本身出发，Giancarlo 等[2]从两方面总体总结了研究平衡问题的主要结果：一是解的存在性问题，即详细分析解存在所需要的条件，包括定义域及函数应满足的条件，并指出证明结果的主要方法；二是描述寻求平衡点的主要算法和分析算法设计收敛过程. 大部分平衡点的存在性定理要求定义域或函数具有某种凸性. 对于非

收稿日期：2016-08-11
基金项目：国家自然科学基金(71461003，11401124，11561013)；贵州省科技厅联合基金(黔科合 2H 字[2016]7425 号)
作者简介：丘小玲(1977－)，女，广西玉林人，副教授，主要研究方向为博弈论与非线性分析. E-mail：xlqiu@gzu. edu. cn
通讯作者：彭定涛. E-mail：dingtaopeng@126. com

凸的问题已经有些研究结果,如文献[8]考虑了非凸的变分不等式的算法问题. 而在文献[3]中,Monica 等在定义域和函数都没有凸性的条件下,利用 Ekeland 变分原理得到平衡问题解的存在性. Ruben[5]从算法的角度,根据 KyFan 不等式的等价形式得到的平衡点存在性及 Monica 等[3]没有凸性的平衡点的存在性结果,设计了求近似解的方法,并对解的稳定性进行了分析. 此外,从平衡问题解的稳定性角度,Monica 等[4]给出了关于平衡问题两类不同良定性的充分条件,并通过引入平衡问题的参数形式的良定性统一了这两种良定性. 而 Fang 等[6]则推广了平衡问题良定性概念,并建立了其特征刻画.

平衡点存在未必唯一,平衡点存在未必稳定. Yu 等[7]证明了一类具有凸性的平衡问题平衡点的通有唯一性. 然而,关于同时考虑平衡问题的通有唯一性和通有良定性的结果并不太多.

另一方面,俞[9]首创了一种稳定方法,利用非线性问题的有限理性模型对非线性问题的不同良定性建立统一模式,以便进行统一研究. 受其启发,并借鉴文献[3,7]的结果,本文以集值映射为工具,首先在定义域与函数都非凸的条件下分紧集与非紧集两种情况建立平衡问题空间并分析得出平衡问题是通有唯一的(我们将在第三第四部分详细描述). 然后,对于我们建立的平衡问题空间,利用有限理性模型统一研究良定性的方法,我们证明了平衡问题是通有良定的. 这将在文中第五部分详细介绍. 最后,我们将在第六部分给出平衡问题解的刻画定理.

由于文献[3]的结果在本文中非常关键,下面我们以定理的形式列出,同时也意味着我们的工作空间是 $\mathbf{R}^n$,即是 n 维欧式空间.

定理 A 令 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是紧集(不必凸),$f:X\times X\to\mathbf{R}$ 是一个二元实值函数,且满足:

(1) $\forall x\in X, f(x,x)=0$;

(2) $\forall x,y,z\in X, f(x,z)\leqslant f(x,y)+f(y,z)$;

(3) $\forall y\in X, x\to f(x,y)$ 是上半连续的;

(4) $\forall x\in X, y\to f(x,y)$ 是下半连续的,

则存在 $\bar{x}\in X$,使得 $f(\bar{x},y)\geqslant 0, \forall y\in X$.

2 预备知识

首先,我们需要关于集值映射的有关概念和引理[10].

定义 2.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$P_0(Y)$ 表示 Y 中所有非空子集全体,$F:X\Rightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射,$x\in X$.

(1) 称 F 在 x 是上半连续的,如果对 Y 中的任一开集 $G, G\supseteq F(x)$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使 $\forall x'\in O(x)$,有 $G\supseteq F(x')$;

(2) 称 F 在 x 是下半连续的,如果对 Y 中的任一开集 $G, G\cap F(x)\neq\varnothing$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使 $\forall x'\in O(x)$,有 $G\cap F(x')\neq\varnothing$;

(3) 称 F 在 x 是连续的,如果 F 在 x 既上半连续又下半连续;

(4) 称 F 在 X 是连续的,如果 F 在 X 中的每一点既上半连续又下半连续;

(5) 称 F 是一个 usco 映射,如果 F 在 X 上是上半连续的,且 $\forall x\in X, F(x)$ 是非空紧值;

(6) 称 F 是一个闭映射,如果 F 的图 $Graph(F)=\{(x,y)\in X\times Y: y\in F(x)\}$ 是 $X\times Y$ 中的闭集;

(7) X 中的一个子集 Q 称为剩余集,若 Q 中包含一列在 X 中处处稠密的开子集的交集.

引理 2.2[10] 如果 $F:X\to P_0(Y)$ 是闭映射且 Y 是紧集,则 F 必是一个 usco 映射.

引理 2.3(Fort 引理)[11] 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间,Y 是度量空间,$F:X\to P_0(Y)$ 是一个 usco 映射,那么存在 X 中的一个剩余集 Q,使得任意 $x\in Q, F$ 在 x 是下半连续的,从而是连续的.

如果 X 是 Baire 空间,X 中的剩余集一定在 X 中稠密,Tan,Yu 和 Yuan 将 Fort 引理陈述如下.

引理 2.4[12] 设 X 是 Baire 空间,Y 是度量空间,$F:X\to P_0(Y)$ 是一个 usco 映射,那么存在 X 中的一个稠密剩余集 Q,$\forall x\in Q, F$ 在 x 是下半连续的,从而是连续的.

注 1 如果 X 中存在一个稠密剩余集 Q,使得对任意的 $x\in Q$,依赖于 x 的性质 p 都成立,则称性质 p 是 X 上的通有性质,或者说性质 p 在 X 上是通有的. 由于 Q 是第二纲集,我们就说在 Baire 分类意义下,对 X 中的大多数点,性质 p 都是成立的.

3 紧集上平衡问题解的通有唯一性

在本节中,我们假设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空紧集,构造非凸的平衡问题空间 Y 如下:

$$Y=\left\{f:X\times X\to\mathbf{R}:\begin{array}{l}\forall x\in X,f(x,x)=0,\\ \forall x,y,z\in X,\text{有 } f(x,y)\leq f(x,z)+f(z,y),\\ \forall y\in X,x\to f(x,y)\text{在 } X \text{ 上是上半连续的},\\ \forall x\in X,y\to f(x,y)\text{在 } X \text{ 上是下半连续的},\\ \sup\limits_{(x,y)\in E\times E}|f(x,y)|<+\infty.\end{array}\right\}$$

任取 $f_1,f_2\in Y$，定义距离

$$\rho_1(f_1,f_2)=\sup_{(x,y)\in X\times X}|f_1(x,y)-f_2(x,y)|.$$

引理 3.1 (Y,ρ_1) 是一个完备度量空间.

证明 显然 (Y,ρ_1) 是一个度量空间. 我们只需证 (Y,ρ_1) 是完备的.

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的任一 Cauchy 序列，即任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得 $\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)$，有

$$\rho_1(f_m,f_n)=\sup_{(x,y)\in X\times X}|f_m(x,y)-f_n(x,y)|<\varepsilon.$$

则存在函数 $f:X\times X\to\mathbf{R}$，使得 $f_m(x,y)\to f(x,y)$. 那么，$\forall n\geqslant N(\varepsilon)$，我们有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)-f_n(x,y)|\leqslant\varepsilon.$$

这就意味着 $f_n\to f$.

接下来，我们将证明 $f\in Y$.

(1) 对每个 $n=1,2,\cdots,\forall x\in X,f_n(x,x)=0$，且 $f_n(x,x)\to f(x,x)$，于是 $f(x,x)=0$.

(2) $\forall x,y,z\in X$，固定 $n\geqslant N(\varepsilon)$，$f_n(x,y)\leqslant f_n(x,z)+f_n(z,y)$，

$$\begin{aligned}f(x,z)&\leqslant f_n(x,z)+\varepsilon\leqslant\\ &f_n(x,y)+f_n(y,z)+\varepsilon\leqslant\\ &f(x,y)+\varepsilon+f(y,z)+\varepsilon+\varepsilon=\\ &f(x,y)+f(y,z)+3\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，$f(x,y)\leqslant f(x,z)+f(z,y)$.

(3) $\forall x,y\in X$，固定 $n\geqslant N(\varepsilon)$. 既然 $f_n(x,y)$ 在 x 处是上半连续的，那么存在 x 的一个开邻域 $U(x)\subset X$，使得 $\forall x'\in U(x)$，

$$f_n(x',y)<f_n(x,y)+\varepsilon.$$

因此 $\forall x'\in U(x)$，

$$\begin{aligned}f(x',y)&<f_n(x',y)+\varepsilon<f_n(x,y)+\varepsilon+\varepsilon<\\ &f(x,y)+3\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $x\to f(x,y)$ 在 x 上是上半连续的.

(4) $\forall x,y\in X$，固定 $n\geqslant N(\varepsilon)$. 既然 $f_n(x,y)$ 在 y 处是下半连续的，那么存在 y 的一个开邻域 $V(y)\subset X$，$\forall y'\in V(y)$，

$$f_n(x,y')>f_n(x,y)-\varepsilon.$$

因此任意 $y'\in V(y)$，

$$\begin{aligned}f(x,y')&>f_n(x,y')-\varepsilon>f_n(x,y)-\varepsilon-\varepsilon>\\ &f(x,y)-3\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $y\to f(x,y)$ 在 x 上是下半连续的.

(5) 固定 $n\geqslant N(\varepsilon)$，$\forall x,y\in X$，有

$$|f(x,y)-f_n(x,y)|\leqslant\varepsilon,$$

且 $\sup\limits_{(x,y)\in X\times X}|f_n(x,y)|<+\infty$. 因此

$$\begin{aligned}&\sup_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)|\leqslant\\ &\quad\sup_{(x,y)\in X\times X}|f_n(x,y)|+\varepsilon<+\infty.\end{aligned}$$

综上分析，$f_n\to f$ 且 $f\in Y$. 因此 (Y,ρ_1) 是一个完备度量空间. 证毕.

任取 $f\in Y$，f 确定了一个非凸的平衡问题，根据定理 A，该问题至少存在一个解. 设其解集为 $N(f)$，即

$$N(f)=\{x\in X:f(x,y)\geqslant 0,\forall y\in X\}.$$

则 $N(f)$ 是非空紧集. 于是 $f\to N(f)$ 定义了一个集值映射 $N:Y\to P_0(X)$.

引理 3.2 集值映射 $N:Y\to P_0(X)$ 是一个 usco 映射.

证明 既然 X 是紧集，由引理 2.2，我们只需证明集值映射 N 的图 $Graph(N)=\{(f,x)\in Y\times X:x\in N(f)\}$ 是闭的，即要证 $\forall f_n\in Y,f_n\to f_0$，$\forall x_n\in N(f_n),x_n\to x_0$，则 $x_0\in N(f_0)$.

$\forall y\in X,\forall n=1,2,\cdots$，由于 $x_n\in N(f_n)$，那么 $f_n(x_n,y)\geqslant 0$. 既然 $f_n\to f_0,x_n\to x_0$ 且 $f_0(x,y)$ 在 x_0 处是上半连续的，则

$$\begin{aligned}f_0(x_0,y)&\geqslant\limsup_n f_0(x_n,y)=\\ &\limsup_n[(f_0(x_n,y)-f_n(x_n,y))+\\ &f_n(x_n,y)]\geqslant\limsup_n[f_0(x_n,y)-f_n(x_n,y)]\geqslant\\ &\lim_n[-\rho_1(f_n,f_0)]=0.\end{aligned}$$

因此 $x_0\in N(f_0)$. 证毕.

现在设 $Y_1=\{f\in Y:f$ 是单调的，即 $\forall x,y\in X,f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0\}$.

引理 3.3 Y_1 是 Y 中的闭集，且 (Y_1,ρ_1) 是完备度量空间.

证明 任取 Y_1 中的序列 $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 且 $f_n\to f$. 我们需证 $f\in Y_1$.

根据引理 3.1 的证明，我们可知 $f\in Y$，因此只需证 f 是单调的，即 $\forall x,y\in X,f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$.

由于 $f_n\to f$，则任意 $\varepsilon>0$，存在一个正整数

$N(\varepsilon)$，使得任意 $n \geqslant N(\varepsilon)$，$\forall x,y \in X$，有

$$|f_n(x,y)-f(x,y)|<\varepsilon.$$

固定 $n > N(\varepsilon)$. 既然 f_n 是单调的，即 $\forall x,y\in X$，$f_n(x,y)+f_n(y,x)\leqslant 0$，自然有

$$f(x,y)+f(y,x)\leqslant f_n(x,y)+\varepsilon+f_n(y,x)+\varepsilon\leqslant 2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们有 $f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$. 所以 f 在 $X\times X$ 是单调的. 因此 Y_1 是闭集. 根据 (Y,ρ_1) 是完备的，故 (Y_1,ρ_1) 是完备度量空间. 证毕.

定理 3.4 $\forall f\in Y_1$，若 $x_1,x_2\in N(f)$，则 $f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)=0$.

证明 由 $x_1\in N(f)$，则对任意 $y\in X$，$f(x_1,y)\geqslant 0$. 特别地，取 $y=x_2$，有 $f(x_1,x_2)\geqslant 0$. 同理，有 $f(x_2,x_1)\geqslant 0$. 又由于 f 是单调的，即

$$f(x_1,x_2)+f(x_2,x_1)\leqslant 0.$$

因此有

$$f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)=0.$$

证毕.

定理 3.5 存在 Y_1 中的一个稠密剩余集 Q_1，使得任意 $f\in Q_1$，N 在 f 处是连续的.

证明 由 Fort 引理及引理 3.2，3.3，结论成立.

定理 3.6 $\forall f\in Q_1$，$N(f)$ 是单点集.

证明 反证法. 如果结论不成立，则存在某个 $f\in Q_1$，及 $x_1,x_2\in N(f)$，而 $x_1\neq x_2$. 根据凸集分离定理，存在 $a\in\mathbf{R}^n$，$a\neq 0$，使 $\langle a,x_1\rangle<\langle a,x_2\rangle$，即 $\langle a,x_1-x_2\rangle<0$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积运算. 于是存在 x_1 的一个开邻域 $U(x_1)$ 及 x_2 的一个开邻域 $V(x_2)$，$\forall x\in U(x_1)$，$\forall y\in V(x_2)$，有 $\langle a,x-y\rangle<0$.

$\forall x,y\in X$，$\forall n=1,2,\cdots$，定义映射 g_n,h_n：$X\times X\to\mathbf{R}$ 如下：

$$g_n(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle,$$

$$h_n(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle.$$

容易验证，g_n,h_n 满足：

(1) $\forall x\in X$，$g_n(x,x)=h_n(x,x)=0$；

(2) $\forall x,y\in X$，$g_n(x,y)+g_n(y,x)=h_n(x,y)+h_n(y,x)=f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$，即 g_n,h_n 在 $X\times X$ 上是单调的；

(3) $\forall x,y,z\in X$，

$$g_n(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle\leqslant f(x,z)+f(z,y)+\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle=(f(x,z)+\frac{1}{n}\langle a,x-z\rangle)+(f(z,y)+\frac{1}{n}\langle a,z-y\rangle)+\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle-\frac{1}{n}\langle a,x-z\rangle-\frac{1}{n}\langle a,z-y\rangle=g_n(x,z)+g_n(z,y),$$

$$h_n(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle\leqslant f(x,z)+f(z,y)-\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle=(f(x,z)-\frac{1}{n}\langle a,x-z\rangle)+(f(z,y)-\frac{1}{n}\langle a,z-y\rangle)-\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle+\frac{1}{n}\langle a,x-z\rangle+\frac{1}{n}\langle a,z-y\rangle=h_n(x,z)+h_n(z,y);$$

(4) $\forall y\in X$，由于 $x\to f(x,y)$ 在 X 上是上半连续的，则 $x\to g_n(x,y)$，$h_n(x,y)$ 在 X 上也是上半连续的；

(5) $\forall x\in X$，由于 $y\to f(x,y)$ 在 X 上是下半连续的，则 $y\to g_n(x,y)$，$h_n(x,y)$ 在 X 上也是下半连续的；

(6) $\sup\limits_{(x,y)\in X\times X}|g_n(x,y)|\leqslant\sup\limits_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)|+\frac{1}{n}|\langle a,x-y\rangle|<+\infty$，$\sup\limits_{(x,y)\in X\times X}|h_n(x,y)|\leqslant\sup\limits_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)|+\frac{1}{n}|\langle a,x-y\rangle|<+\infty$.

因此 $g_n,h_n\in Y_1$，且当 $n\to\infty$ 时，$\rho_1(g_n,f)\to 0$，$\rho_1(h_n,f)\to 0$.

因 N 在 f 是下半连续的，注意到 $x_1\in U(x_1)\cap N(f)$，$x_2\in V(x_2)\cap N(f)$，那么 $U(x_1)\cap N(f)\neq\varnothing$，$V(x_2)\cap N(f)\neq\varnothing$ 且 $g_n\to f$，$h_n\to f$. 存在足够大的 n_0 使得 $U(x_1)\cap N(g_{n_0})\neq\varnothing$，$V(x_2)\cap N(h_{n_0})\neq\varnothing$. 取 $x'\in U(x_1)\cap N(g_{n_0})$，$x''\in V(x_2)\cap N(h_{n_0})$. 因 $x'\in N(g_{n_0})$，则 $\forall y\in X$，$g_{n_0}(x',y)\geqslant 0$. 令 $y=x''$，有 $g_{n_0}(x',x'')\geqslant 0$. 同理 $x''\in N(h_{n_0})$，则 $\forall y\in X$，$h_{n_0}(x'',y)\geqslant 0$. 令 $y=x'$，有 $h_{n_0}(x'',x')\geqslant 0$. 又由于 $x'\in U(x_1)$，$x''\in V(x_2)$，则

$$\langle a,x'-x''\rangle<0,$$

$$0\leqslant g_{n_0}(x',x'')+h_{n_0}(x'',x')=f(x',x'')+\frac{1}{n_0}\langle a,x'-x''\rangle+f(x'',x')-\frac{1}{n_0}\langle a,x''-x'\rangle=f(x',x'')+f(x'',x')+\frac{2}{n_0}\langle a,x'-x''\rangle<0.$$

矛盾. 所以 $N(f)$ 是单点集.

4　非紧集上平衡问题解的通有唯一性

在这节中，我们既考虑函数的扰动，也考虑可行集扰动时其非凸平衡问题的通有唯一性问题. 此时，X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集，不必是凸的，也不必是有界的. 非凸的平衡问题空间 U 构造如下：

$$U=\left\{u=(f,A):\begin{array}{l}\forall x\in X,f(x,x)=0,\\ \forall x,y,z\in X,\text{有 } f(x,y)\leq f(x,z)+f(z,y),\\ \forall y\in X,x\to f(x,y)\text{在 } X\times X \text{ 上是上半连续的},\\ \forall x\in X,y\to f(x,y)\text{在 } X\times X \text{ 上是下半连续的},\\ \sup\limits_{(x,y)\in E\times E}|f(x,y)|<+\infty.\end{array}\right\}$$

任取 $u_1=(f_1,A),u_2=(f_2,A)\in U$,定义距离

$$\rho_2(u_1,u_2)=\sup_{(x,y)\in X\times X}|f_1(x,y)-f_2(x,y)|+h(A_1,A_2),$$

其中 h 表示 X 上的 Hausdorff 距离.

引理 4.1　(U,ρ_2) 是一个完备度量空间.

证明　显然 (U,ρ_2) 是一个度量空间. 我们只需证明 (U,ρ_2) 是完备的. 记 $K(X)$ 表示 X 中的所有非空紧子集组成的集合. 根据 $\mathbf{R}^n$ 的完备性，$(K(X),h)$ 是一完备空间.

$\forall A\in K(X)$，记 $Y_2=\{f:X\times X\to\mathbf{R}:(f,A)\in U\}$. 显然，$Y_2$ 是上节中 Y 的子集. 接着，我们将证 Y_2 是 Y 中的闭集. 事实上，$\forall f_n\in Y_2,f_n\to f_0\in Y$,根据 U 的定义，我们只需证明 f_0 在 $X\times X$ 是上半连续的.

$\forall x,y\in X$，设 $x_n\to x,y_n\to y$. $\forall\varepsilon>0$,既然 $f_n\to f_0$,存在一个很大的正整数 n_0 使得 $\rho(f_{n_0},f_0)<\varepsilon$. 既然 f_{n_0} 在 $X\times X$ 是上半连续的，我们得到

$$\begin{aligned}\limsup_n f_0(x_n,y_n)&=\limsup_n[f_0(x_n,y_n)-f_{n_0}(x_n,y_n)+f_{n_0}(x_n,y_n)-f_{n_0}(x,y)+\\&\quad f_{n_0}(x,y)-f_0(x,y)+f_0(x,y)]\leqslant\\&\quad\limsup_n[(f_{n_0}(x_n,y_n)-f_{n_0}(x,y))+\\&\quad 2\rho_1(f_{n_0},f_0)+f_0(x,y)]<2\varepsilon+f_0(x,y).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，

$$\limsup_n f_0(x_n,y_n)\leqslant f_0(x,y),$$

即 f_0 在 $X\times X$ 是上半连续的. 因此 Y_2 是 Y 中的闭集. 根据 (Y,ρ_1) 的完备性可知 (Y_2,ρ_1) 是 (Y,ρ_1) 的完备子空间. 由于 $U=Y_2\times K(X)$ 且 ρ_2 是由 ρ_1 及 Hausdorff 距离诱导得到的，既然 (Y_2,ρ_1) 和 $(K(X),h)$ 都完备，所以 (U,ρ_2) 也是完备的. 证毕.

对于每一个 $u=(f,A)\in U$，由定理 A，平衡问题 u 至少有一个平衡点. 记 u 的所有平衡点组成的集合为 $N_1(u)$，即

$$N_1(u)=\{x\in A:f(x,y)\geqslant 0,\forall y\in A\}.$$

于是关系式 $u\to N_1(u)$ 确定了一个集值映射 $N_1:U\to P_0(X)$.

引理 4.2[13]　设 A 和 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是 Hausdorff 拓扑空间 E 中的非空紧子集，且 $A_n\to A$. 则

(1) $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$ 是 E 中的紧子集；

(2) 如果 $x_n\in A_n,x_n\to x$,则 $x\in A$.

引理 4.3　集值映射 $N_1:U\to P_0(X)$ 是一个 usco 映射.

证明　显然 $N_1(u)$ 是紧集. 我们只需证 N_1 在 U 上是上半连续的.

反证法. 假设存在某一点 $u=(f,A)\in U$，使得 N_1 在 u 处不是上半连续的. 那么存在 X 中的开集 $G,G\subset N_1(u)$，使得任意 $n=1,2,\cdots$，对于 u 的每一个开邻域 $V_n=\{u'=(f',A')\in U:\rho_2(u',u)<\frac{1}{n}\}$,存在 $u_n=(f_n,A_n)\in V_n$ 且 $x_n\in N_1(u_n)$但 $x_n\notin G$. 既然 $u_n=(f_n,A_n)\in V_n$,对于每个 $n=1,2,\cdots$，我们有 $\rho_2(u_n,u)\to 0$,即 $f_n\to f,A_n\to A$. 由 $x_n\in N_1(u_n)$,那么 $x_n\in A_n$ 且 $f_n(x_n,y)\geqslant 0$ 对所有的 $y\in A_n$ 都成立. 根据引理 4.2，$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$ 是紧集. 而$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$. 不失一般性，不妨设$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$是收敛的，而且 $x_n\to x^*\in A$. 由 $x_n\notin G$ 而 G 是开集，$x^*\notin G$.

$\forall y\in A$，既然 $A_n\to A$,存在一序列$\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$使得 $y_n\in A_n$ 且 $y_n\to y$. 根据 $y_n\in A_n$,那么 $f_n(x_n,y_n)\geqslant 0$. 由于 f 在 $X\times X$ 上是上半连续的，$x_n\to x^*,y_n\to y,f_n\to f$,我们有

$$f(x^*,y)\geqslant\limsup_n f(x_n,y_n)=$$

$$\limsup_n[(f(x_n,y_n)-f_n(x_n,y_n))+ f_n(x_n,y_n)]\geqslant\limsup_n[f(x_n,y_n)- f_n(x_n,y_n)]\geqslant\lim_n[-\rho_1(f_n,f)]=0.$$

因此我们得到 $x^*\in N_1(u)\subset G$. 这与 $x^*\notin G$ 矛盾. 因此 N_1 一定在 U 上是上半连续的. 证毕.

记 $U_1=\{u=(f,A)\in U: f$ 是单调的, 即 $\forall x,y\in X, f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0\}$. 容易验证 U_1 是 U 中的闭集, 故 (U_1,ρ_2) 是完备的. 根据引理 2.2 我们得到下面的定理 4.4.

定理 4.4　存在 U_1 中的一个稠密剩余集 Q_2, 使得任意 $u\in Q_2$, N_1 在 u 处是连续的.

定理 4.5　$\forall u\in Q_2$, $N_1(u)$ 是单点集.

证明　反证法. 如果结论不成立, 则存在某个 $u\in Q_2$, 存在 $x_1,x_2\in N_1(u)$, 而 $x_1\neq x_2$. 根据凸集分离定理, 存在 $a\in\mathbf{R}^n$, $a\neq 0$, 使 $\langle a,x_1\rangle<\langle a,x_2\rangle$, 即 $\langle a,x_1-x_2\rangle<0$. 于是存在 x_1 的一个开邻域 U_{x_1} 及 x_2 的一个开邻域 V_{x_2}, 使得任意 $x\in U_{x_1}$, $\forall y\in V_{x_2}$, 有 $\langle a,x-y\rangle<0$.

$\forall x,y\in X$, $\forall n=1,2,\cdots$, 类似定理 3.6, 定义映射 $g_n,h_n: X\times X\to\mathbf{R}$ 如下:

$$g_n(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle;$$

$$h_n(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{n}\langle a,x-y\rangle.$$

容易验证, g_n,h_n 满足以下性质:

(1) $\forall x\in X$, $g_n(x,x)=h_n(x,x)=0$;

(2) $\forall x,y\in X$, $g_n(x,y)+g_n(y,x)=h_n(x,y)+h_n(y,x)=f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$, 即 g_n,h_n 在 $X\times X$ 上是单调的;

(3) $\forall x,y,z\in X$, $g_n(x,y)\leqslant g_n(x,z)+g_n(z,y)$, $h_n(x,y)\leqslant h_n(x,z)+h_n(z,y)$;

(4) $\forall x,y\in X$, 由于 $f(x,y)$ 在 $X\times X$ 上是上半连续的, 则 $g_n(x,y)$, $h_n(x,y)$ 在 $X\times X$ 上也是上半连续的;

(5) $\forall x\in X$, 由于 $y\to f(x,y)$ 在 X 上是下半连续的, 则 $y\to g_n(x,y)$, $h_n(x,y)$ 在 X 上也是下半连续的;

(6) $\sup_{(x,y)\in X\times X}|g_n(x,y)|\leqslant\sup_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)|+\frac{1}{n}|\langle a,x-y\rangle|<+\infty$, $\sup_{(x,y)\in X\times X}|h_n(x,y)|\leqslant\sup_{(x,y)\in X\times X}|f(x,y)|+\frac{1}{n}|\langle a,x-y\rangle|<+\infty$;

(7) 当 $n\to\infty$ 时, $\rho_1(g_n,f)\to 0$, $\rho_1(h_n,f)\to 0$.

现在令 $u_n^1=(g_n,A)$, $u_n^2=(h_n,A)$. 显然, 我们有 $u_n^1,u_n^2\in U$, 且当 $n\to\infty$ 时, $u_n^1,u_n^2\to u$.

因 N_1 在 u 是下半连续的, 注意到 $x_1\in U_{x_1}\cap N_1(u)$, $x_2\in V_{x_2}\cap N_1(u)$, 那么 $U_{x_1}\cap N_1(u)\neq\varnothing$, $V_{x_2}\cap N_1(u)\neq\varnothing$ 且 $u_n^1\to u$, $u_n^2\to u$, 即 $g_n,h_n\to f$. 于是存在足够大的 n_0, 使得 $U_{x_1}\cap N_1(u_{n_0}^1)\neq\varnothing$, $V_{x_2}\cap N(u_{n_0}^2)\neq\varnothing$. 取 $x'\in U_{x_1}\cap N_1(u_{n_0}^1)$, $x''\in V_{x_2}\cap N_2(u_{n_0}^2)$. 因 $x'\in N_1(u_{n_0}^1)$, 则 $\forall y\in X$, $g_{n_0}(x',y)\geqslant 0$. 令 $y=x''$, 有 $g_{n_0}(x',x'')\geqslant 0$. 同理 $x''\in N_1(u_{n_0}^2)$, 则任意 $y\in X$,

$$h_{n_0}(x'',y)\geqslant 0.$$

令 $y=x'$, 有

$$h_{n_0}(x'',x')\geqslant 0.$$

又由于 $x'\in U_{x_1}$, $x''\in V_{x_2}$, 则

$$\langle a,x'-x''\rangle<0,$$

$$0\leqslant g_{n_0}(x',x'')+h_{n_0}(x'',x')= f(x',x'')+\frac{1}{n_0}\langle a,x'-x''\rangle+f(x'',x')- \frac{1}{n_0}\langle a,x''-x'\rangle=f(x',x'')+f(x'',x')+ \frac{2}{n_0}\langle a,x'-x''\rangle<0.$$

矛盾. 所以 $N_1(u)$ 是单点集.

注 2　对所有的 $f\in Y_1$ 或 $u\in U_1$, 其解集未必都是单点集.

注 3　定理 3.5, 3.6 表明, 虽然不是所有的非凸的平衡问题有唯一的平衡点, 但在 Baire 分类的意义下, 平衡问题空间 Y_1 中大多数非凸的平衡问题具有唯一解. 既然 Q_1 在 Y_1 中是稠密的, 则 Y_1 中的任一平衡问题可由 Q_1 中的且有唯一解的平衡问题作任意的逼近.

注 4　定理 4.4 表明, 存在 U_1 中一个稠密剩余子集 Q_2, 使得 Q_2 中的每个非凸的平衡问题是连续的且具有唯一解, 即在 Baire 分类的意义下, 大多数非凸的平衡问题在 U_1 中是连续的和具有唯一解.

注 5　俞等[7]是在凸性条件下得到的通有唯一性结果. 根据不同的条件, 我们的结果与其互不包含, 各不相同.

5　平衡问题解的通有良定性

在本节中, 我们将在前两节出现的的平衡问题空间 Y_1, U_1 中引入有限理性模型, 并利用良定问题的统一模式研究平衡问题的通有良定性.

依照文献[9,14]介绍的有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\}$, 其中 Λ 是一个平衡问题空间, $\forall\lambda\in$

Λ,λ 表示一个平衡问题；$F:\Lambda\to P_0(X)$ 是一个集值映射，$\forall\lambda\in\Lambda,F(\lambda)\subset X$ 表示平衡问题 λ 的可行集；$\Phi:\Lambda\times X\to\mathbf{R}$ 是理性函数，当 $x\in F(\lambda)$ 时，$\Phi(\lambda,x)\geqslant 0$. $\forall\varepsilon\geqslant 0,E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)\leqslant\varepsilon\}$ 表示平衡问题 λ 的 ε- 近似平衡点集. 当 $\varepsilon=0$ 时，平衡问题 λ 的解集为 $E(\lambda)=E(\lambda,0)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)=0\}$.

我们首先给出有限理性与良定性之间的关系. 设 Λ 和 X 都是度量空间，$\lambda\in\Lambda$.

定义 5.1　(1) 如果 $\forall\lambda_n\in\Lambda,\lambda_n\to\lambda,\forall x_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$，则称问题 λ 是广义良定的，简记为 G-wp；

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），$\forall\lambda_n\in\Lambda,\lambda_n\to\lambda,\forall x_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，必有 $x_n\to x$，则称问题 λ 是良定的，简记为 wp.

定义 5.2　(1) 如果 $\forall x_n\in E(\lambda,\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$，则称问题 λ 是广义 Tykhonov 良定的，简记为 GT-w；

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），$\forall x_n\in E(\lambda,\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，必有 $x_n\to x$，则称问题 λ 是 Tykhonov 良定的，简记为 T-wp.

定义 5.3　(1) 如果 $\forall\lambda_n\in\Lambda,\lambda_n\to\lambda,\forall x_n\in E(\lambda_n)$，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$，则称问题 λ 是广义 Hadamard 良定的，简记为 GH-wp；

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），$\forall\lambda_n\in\Lambda,\lambda_n\to\lambda,\forall x_n\in E(\lambda_n)$，必有 $x_n\to x$ 则称问题 λ 是 Hadamard 良定的，简记为 H-wp.

定义 5.4　(1) 如果 $\forall x_n\in X,|\Phi(\lambda,x_n)|\leqslant\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，且 X 中的距离 $d(x_n,F(\lambda))\to 0$，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$，则称问题 λ 是广义 Levitin-Polyak 良定的，简记为 GLP-wp；

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），$\forall x_n\in X,|\Phi(\lambda,x_n)|\leqslant\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，且 X 中的距离 $d(x_n,F(\lambda))\to 0$，必有 $x_n\to x$，则称问题 λ 是 Levitin-Polyak 良定的，简记为 LP-wp.

关于上述几种良定性的关系，文献[9]给出了下述重要结论.

引理 5.5[9]　(1) 如果问题 $\lambda\in\Lambda$ 是 G-wp 的，则 λ 必是 GH-wp 和 GT-wp 的；

(2) 如果问题 $\lambda\in\Lambda$ 是 wp 的，则 λ 必是 H-wp 和 T-wp 的；

(3) 如果问题 $\lambda\in\Lambda$ 是 GLP-wp 的，则 λ 必是 GT-wp 的；

(4) 如果问题 $\lambda\in\Lambda$ 是 LP-wp 的，则 λ 必是 T-wp 的.

同时，文献[9]还给出了问题 $\lambda\in\Lambda$ 是 G-wp 的和 wp 的以及 GLP-wp 的和 LP-wp 的的充分条件，具体见下面的引理 5.6，5.7.

引理 5.6　给定有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\},\lambda\in\Lambda$. 如果

(1) $F:\Lambda\to P_0(X)$ 在 λ 是上半连续的且 $F(\lambda)$ 是非空紧集；

(2) $\Phi:\Lambda\times X\to\mathbf{R}$ 满足当 $x\in F(\lambda)$ 时 $\Phi(\lambda,x)\geqslant 0$，且 Φ 关于 (λ,x) 是下半连续的，

则

(a) 问题 λ 必是 G-wp 的；

(b) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），则问题 λ 必是 wp 的.

引理 5.7　给定有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\},\lambda\in\Lambda$. 如果

(1) $F(\lambda)$ 是非空紧集；

(2) $\Phi:\Lambda\times X\to\mathbf{R}$ 满足当 $x\in F(\lambda)$ 时 $\Phi(\lambda,x)\geqslant 0$，且 Φ 关于 (λ,x) 是下半连续的，

则

(a) 问题 λ 必是 GLP-wp 的；

(b) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集），则问题 λ 必是 LP-wp 的.

5.1　紧集上平衡问题解的通有良定性

现在对非凸的平衡问题空间 Y_1 建立有限理性模型：$\forall\lambda=f\in Y_1,E_1(\lambda)=\{x\in X:f(x,y)\geqslant 0,\forall y\in X\}$. 则 $E_1(\lambda)\neq\varnothing$. $\forall\lambda\in Y_1,\forall x\in X$，$F_1(\lambda)=X$，则集值映射 $F_1:Y_1\to P_0(X)$ 是连续的. 定义理性函数

$$\Phi_1(\lambda,x)=-\inf_{y\in X}f(x,y).$$

于是我们得到有限理性模型 $M_1=\{Y_1,X,F_1,\Phi_1\}$. 根据引理 3.3，(Y_1,ρ_1) 是完备度量空间.

引理 5.8　$\forall\lambda\in Y_1,\forall x\in X$，必有 $\Phi_1(\lambda,x)\geqslant 0$，且 $\Phi_1(\lambda,x)=0$ 当且仅当 $x\in E_1(\lambda)$.

证明　$\forall x\in X$，因 $\inf_{y\in X}f(x,y)\leqslant f(x,x)=0$，故

$$\Phi_1(\lambda,x)=-\inf_{y\in X}f(x,y)\geqslant 0.$$

如果 $\Phi_1(\lambda,x)=0$，即 $\inf_{y\in X}f(x,y)=0$，也即任意 $y\in X,f(x,y)\geqslant 0$，因此 $x\in E_1(\lambda)$. 反之，如果 $x\in$

$E_1(\lambda)$，则 $\forall y \in X, f(x,y) \geqslant 0$，故

$$\Phi_1(\lambda,x) = -\inf_{y\in X} f(x,y) \leqslant 0.$$

又因为 $\Phi_1(\lambda,x) \geqslant 0$，故 $\Phi_1(\lambda,x) = 0$. 证毕.

引理 5.9 $\Phi_1(\lambda,x)$ 关于 (λ,x) 是下半连续的.

证明 只需证明 $\inf_{y\in X} f(x,y)$ 关于 (λ,x) 是上半连续的，即要证明：$\forall \varepsilon>0, \forall \lambda_n = f_n \to \lambda = f$, $\forall x_n \to x$，存在正整数 N，使当 $\forall n \geqslant N$ 时，有

$$\inf_{y\in X} f_n(x_n,y) < \inf_{y\in X} f(x,y) + \varepsilon.$$

由 $f_n \to f$，存在正整数 $N_1(\varepsilon)$，使当 $\forall n \geqslant N_1(\varepsilon)$ 时，有

$$|f_n(x_n,y) - f(x_n,y)| \leqslant \rho_1(f_n,f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall y \in X$，因 $x \to f(x,y)$ 是上半连续的，且 $x_n \to x$，则存在正整数 $N(\varepsilon) \geqslant N_1(\varepsilon)$，使当任意 $n \geqslant N(\varepsilon)$ 时，有

$$f(x_n,y) - f(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，$\forall n \geqslant N(\varepsilon)$，有

$$f_n(x_n,y) = [f_n(x_n,y) - f(x_n,y)] + [f(x_n,y) - f(x,y)] + f(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + f(x,y) = \varepsilon + f(x,y).$$

因此 $\inf_{y\in X} f_n(x_n,y) < \inf_{y\in X} f(x,y) + \varepsilon$. 证毕.

定理 5.10 (1) $\forall \lambda \in Y_1$，平衡问题 λ 是 G-wp 的，从而也是 GT-wp 和 GH-wp 的；

(2) 存在 Y_1 中的一个稠密剩余集 Q_3，$\forall \lambda \in Y_1$，平衡问题 λ 是 wp 的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

证明 (1) 由引理 3.3，3.2 及引理 5.9，5.6，5.5 可得结论. 证毕.

(2) 由定理 3.5，3.6，存在 Y_1 中的一个稠密剩余集 Q_3，$\forall \lambda \in Y_1$，有 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集). 又由引理 5.6(b)，$\forall \lambda \in Y_1$，平衡问题 λ 是 wp 的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

类似地，根据引理 5.7，5.9 及定理 3.5，3.6 我们得到以下定理 5.11.

定理 5.11 (1) $\forall \lambda \in Y_1$，平衡问题 λ 是 GLP-wp 的；

(2) 存在 Y_1 中的一个稠密剩余集 Q_3，$\forall \lambda \in Y_1$，平衡问题 λ 是 LP-wp 的.

5.2 非紧集上平衡问题解的通有良定性

我们以相同的方法对非凸的平衡问题空间 U_1 建立有限理性模型：$\forall \lambda = (f,A) \in U_1$，它给定了一个非凸的平衡问题，其解集

$$E_2(\lambda) = \{x \in A : f(x,y) \geqslant 0, \forall y \in A\},$$

则 $E_2(\lambda) \neq \varnothing$. $\forall \lambda = (f,A) \in U_1, \forall x \in X$，定义 $F_2(\lambda) = A$，则集值映射 $F_2: U_1 \to P_0(X)$ 连续. 定义理性函数

$$\Phi_2(\lambda,x) = -\inf_{y\in A} f(x,y).$$

于是我们得到非凸的平衡问题的有限理性模型 $M_2 = \{U_1, X, F_2, \Phi_2\}$. 根据引理 4.1，$(U_1,\rho_2)$ 是完备度量空间.

我们需要以下一些引理.

引理 5.12[15] 设 X 和 Y 是两个度量空间，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一列非空紧集，A 是 X 中的一个非空紧集，$\{y^n\}$ 是 Y 中的一个点列，$\{g^n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在 $X\times Y$ 上的一列连续函数. 如果 Hausdorff 距离 $h(A_n,A) \to 0$，$y^n \to y \in Y$，且

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} |g^n(x,y) - g(x,y)| \to 0,$$

其中 g 是定义在 $X\times Y$ 上的一个连续函数，则

$$\max_{u\in A_n} g^n(u,y^n) \to \max_{u\in A} g(u,y).$$

引理 5.13 $\forall \lambda \in U_1, \forall x \in X, \Phi_2(\lambda,x) \geqslant 0$，且 $\Phi_2(\lambda,x) = 0$ 当且仅当 $x \in E_2(\lambda)$.

证明 同引理 5.8.

引理 5.14 $\Phi_2(\lambda,x)$ 关于 (λ,x) 是连续的.

证明 $\forall \lambda_n \to \lambda, \forall x_n \to x$，只需证明

$$\Phi_2(\lambda_n,x_n) \to \Phi_2(\lambda,x), \lambda_n = (f_n,A_n), \lambda = (f,A),$$

即证

$$\inf_{y\in A_n} f_n(x_n,y) \to \inf_{y\in A} f(x,y).$$

由

$$|f_n(x_n,y) - f(x,y)| < |f_n(x_n,y) - f(x_n,y)| + |f(x_n,y) - f(x,y)| < \rho_1(f_n,f) + |f(x_n,y) - f(x,y)|,$$

且 $f_n \to f, x_n \to x, x \to f(x,y)$ 在 X 上是上半连续的，因此有

$$f_n(x_n,y) \to f(x,y).$$

再注意到 $\forall \lambda_n \to \lambda$ 蕴含

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} |f_n(x,y) - f(x,y)| \to 0$$

和 $h(A_n,A) \to 0$，加上 $x_n \to x$，由引理5.12得

$$\inf_{y\in A_n} f_n(x_n,y) \to \inf_{y\in A} f(x,y),$$

即

$$\Phi_2(\lambda_n,x_n) \to \Phi_2(\lambda,x).$$

证毕.

定理 5.15 (1) $\forall \lambda \in U_1$. 平衡问题 λ 是 G-wp 的，从而也是 GT-wp 和 GH-wp 的；

（2）存在 U_1 中的一个稠密剩余集 Q_4，$\forall \lambda \in U_1$，平衡问题 λ 是 wp 的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

证明　（1）由引理 5.6 及引理 5.13，5.14 可得结论. 证毕.

（2）由定理 4.5，存在 U_1 中的一个稠密剩余集 Q_4，$\forall \lambda \in U_1$，有 $E(\lambda)=\{x\}$（单点集）. 又由引理 5.6(b)，$\forall \lambda \in U_1$，平衡问题 λ 是 wp 的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

类似地，根据引理 5.7，5.14 及定理 4.5，我们得到以下定理 5.16.

定理 5.16　（1）$\forall \lambda \in U_1$，平衡问题 λ 是 GLP-wp 的；

（2）存在 U_1 中的一个稠密剩余集 Q_4，$\forall \lambda \in U_1$，平衡问题 λ 是 LP-wp 的.

注 6　定理 5.10，5.11（定理 5.15，5.16）表明非凸的平衡问题空间 Y_1（或 U_1）中存在一个稠密剩余子集 Q_3（或 Q_4），使得对于 Q_3（或 Q_4）中的每个非凸的平衡问题其解是良定的，也就是说，在 Baire 分类的意义下，大多数的非凸平衡问题是通有良定的.

6　平衡问题解的刻画定理

在本节中，我们考虑 Y_1（或 U_1）中每个非凸平衡问题与具有唯一解的平衡问题解之间的关系. 记 $M_1=\{\lambda=f\in Y_1, E(\lambda)$ 是单点集$\}$. 按集合的包含关系，显然 M_1 是 Y_1 中最大的稠密剩余子集，并且对每个 $\lambda\in M_1$，$E(\lambda)$ 是单点集. 根据定理 5.10(2)，平衡问题 λ 是良定的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

定理 6.1　$\forall \lambda=f\in Y_1$，则 $E(\lambda)=\{\lim\limits_n x_n : x_n\in E(\lambda_n), \lambda_n\in M_1, \lambda_n\to\lambda\}$.

证明　既然 M_1 在 Y_1 是稠密的，则对于每个 $\lambda=f\in Y_1$，存在 $\{\lambda_n=f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M_1$，使得 $\lambda_n=f_n\to\lambda=f$. 又由于 $E(\lambda_n)$ 是单点集，设 $E(\lambda_n)=\{x_n\}$，则 $\{x_n\}\subset X$. 因 X 为紧集，则 $\{x_n\}$ 或其子列收敛. 因此右端有意义且非空. 接着，设 $\lambda_n\in M_1$，$x_n\in E(\lambda_n)$，$\lambda_n\to\lambda$ 且 $x_n\to x$，根据定理 5.1(1)，可得 $x\in E(\lambda)$. 于是

$$E(\lambda)\Leftrightarrow\{\lim_n x_n : x_n\in E(\lambda_n), \lambda_n\in M_1, \lambda_n\to\lambda\}.$$

另一方面，设 $x^*\in E(\lambda)$. 定义函数 $g: X\to \mathbf{R}$ 如下：

$$g(x)=\frac{d(x,x^*)}{1+d(x,x^*)}, \forall x\in X,$$

其中 d 为 X 中的度量. 容易看出 g 具有性质：

（1）g 在 X 上是连续的；

（2）$\forall x\in X, 0\leqslant g(x)\leqslant 1$；

（3）$g(x)=0$ 当且仅当 $x=x^*$.

取 $a<0, n=1,2,\cdots$，定义函数列

$$f_n(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{n}[g(x)-g(y)]a,\quad \forall x,y\in X.$$

容易验证 $f_n(x,y)\in Y_1$ 且 $x^*\in E(f_n)$，$n\to\infty$，$f_n\to f$. 同时可得 $E(f_n)=\{x^*\}$，即 $E(f_n)$ 为单点集. 如若不然，则存在某个 n_0 和 $\bar{x}$，使得 $\bar{x}\in E(f_{n_0})$ 且 $\bar{x}\neq x^*$. 由 $x^*\in E(f_{n_0})$，即 $f_{n_0}(x^*,\bar{x})\geqslant 0$. 又由 f_{n_0} 的单调性，有 $f_{n_0}(\bar{x},x^*)\leqslant 0$，注意到 $g(\bar{x})>0$，那么

$$f_{n_0}(\bar{x},x^*)=f(\bar{x},x^*)+\frac{1}{n_0}[g(\bar{x})-g(x^*)]a<0.$$

这与 $\bar{x}\in E(f_{n_0})$ 矛盾. 因此 $E(f_n)=\{x^*\}$，$n=1,2,\cdots$. 取 $x_n=x^*$. 那么 $\lambda_n=f_n\in M_1$，$\lambda_n\to\lambda$，$x_n\in E(\lambda_n)$，且 $x^*=\lim\limits_n x_n$，即

$$E(\lambda)\subset\{\lim_n x_n : x_n\in E(\lambda_n), \lambda_n\in M_1, \lambda_n\to\lambda\},$$

于是结论成立. 证毕.

类似地，记 $M_2=\{\lambda=(f,A)\in U_1, E(\lambda)$ 是单点集$\}$. 按集合的包含关系，显然 M_2 是 U_1 中最大的稠密剩余子集，并且对每个 $\lambda\in M_2$，$E(\lambda)$ 是单点集. 根据定理 5.15(2)，平衡问题 λ 是良定的，从而也是 T-wp 和 H-wp 的.

定理 6.2　$\forall \lambda=(f,A)\in U_1$，

$$E(\lambda)=\{\lim_n x_n : x_n\in E(\lambda_n), \lambda_n\in M_2, \lambda_n\to\lambda\}.$$

证明　同定理 6.1 类似，略.

注 7　彭等[16]给出了向量值平衡问题在函数值及策略集都扰动的情况下其解的关系式.

参考文献：

[1] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994, 63: 123.

[2] Bigi G, Castellani M Pappalardo M, *et al*. Existence and solution methods for equilibria [J]. Eur J Oper Res, 2013, 227: 1.

[3] Monica B, Gabor K, Rita P. Existence of equilibria via Ekeland's principle[J]. J Math Anal Appl, 2005, 305: 502.

[4] Monica B, Gabor K, Rita P. Well-posed equilibrium problems [J]. Nonlinear Anal, 2010, 72: 460.

[5] Ruben L. Approximations of equilibrium problems [J]. Siam J Control Optim, 2012, 50: 1038.

[6] Fang Y P, Hu R, Huang N J. Well-posedness for equilibrium problems and for optimization problems with equilibrium constraints [J]. Comput Math Appl, 2008, 55: 89.

[7] Yu J, Peng D T, Xiang S W. Generic uniqueness of equilibrium points [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74: 6326.

[8] 左欣,陈纯荣. 基于改进集的参数广义弱向量平衡问题解的半连续性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 478.

[9] 俞建. 博弈论与非线性分析续论[M]. 北京:科学出版社, 2011.

[10] Aliprantis C D, Border K C. Infinite dimensional analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[11] Fort M K. Points of continuity of semicontiunous functions [J]. Publ Math-Debrecen, 1951, 2: 100.

[12] Tan K K, Yu J, Yuan X Z. The stability of Ky Fan's points [J]. P A Math Soc, 1995, 123: 1511.

[13] Yu J. Essential weak efficient solution in multiobjective optimization problems [J]. J Math Anal Appl, 1992, 166: 230.

[14] Yu J, On well-posed problems [J]. Acta Math Appl Sin-E, 2011, 34: 1007.

[15] Yu J. Essential equilibria of n-person noncooperative games [J]. J Math Econ, 1999, 31: 361.

[16] Peng D T, Yu J, Xiu N H. The uniqueness and well-posedness of vector equilibrium problems with a representation theorem for the solution set [J]. Fixed Point Theory A, 2014, 2014: 1.