doi:103969/j.issn.0490-6756.2017.03.006

B_3-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数

阿依古力·热西提,阿布都卡的·吾甫
(新疆大学数学与系统科学学院,乌鲁木齐,830046)

摘 要:本文旨在计算 B_3-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数,所用方法是:首先利用 Ringel-Hall 代数方法计算 B_3-型量子群的所有根向量之间的拟交换公式,然后利用相应的 B_3-型量子群的 Grobner-Shirshov 基计算 B_3-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数,得到的主要结果是 B_3-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数等于 21.

关键词:Grobner-Shirshov 基;Poincaré-Birkhoff-Witt 代数;权向量;Gelfand-Kirillov 维数
中图分类号:O154.2 **文献标识码**:A **文章编号**:0490-6756(2017)02-0253-08

Gelfand-Kirillov dimension of quantum group of type B_3

Aygul Rexit, *Abdukadir Obul*
(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: The aim of this paper is to compute the Gelfand-Kirillov dimension of quantum group of type B_3. Firstly, we compute all skew-commutator relations between all root vectors of quantum group of type B_3 by using the Ringel-Hall algebra approach. Then, by using the corresponding Groebner-Shirshov basis, we compute the Gelfand-Kirillov dimension of quantum group of type B_3. The main result is that the Gelfand-Kirillov dimension of quantum group of type B_3 is 21.

Keywords: Grobner-Shirshov basis; Poincaré-Birkhoff-Witt algebra; Weight vectors; Gelfand-Kirillov dimension
(2010 MSC 17B37, 81R50, 16W30)

1 引 言

Krull 维数是交换代数研究中一个非常有用的不变量,但在研究非交换代数时它并不是很好的不变量,因为 Krull 维数是通过主理想序列定义的.不过,对于有限生成 k-代数来说,Gelfand-Kirillov 维数是一个更好的不变量,并且在交换代数上的 Gelfand-Kirillov 维数恰好与 Krull 维数相同.Gelfand-Kirillov 维数能测量代数增长的渐进速度,为我们提供了非常重要的结构信息.因此,这个不变量已经成为研究有限生成的无限维代数的标准工具之一.

一般情况下,计算 Gelfand-Kirillov 维数是一项极其困难的.在文献[1]中,作者不仅对有限生成 k-代数及其上的模的 Gelfand-Kirillov 维数进行了非常详细的讨论,而且介绍了计算包络代数和量子群中一些经典及非经典例子的 Gelfand-Kirillov 维数的一种方法.在本文中,我们先给出 B_3-型量子群的根向量之间的拟交换公式和 Grobner-Shirshov 基,然后利用文献[1]中给出的算法计算量子

收稿日期:2016-09-16
基金项目:国家自然科学基金(11361056)
作者简介:阿依古力·热西提(1992-),女,维吾尔族,硕士研究生,主要从事代数表示论,量子群及 Groebner-Shirshov 基理论的研究. E-mail:289673632@qq.com
通讯作者:阿布都卡的·吾甫. E-mail:abdu@vip.sina.com

群 $U_q(B_3)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数 GKdim$(U_q(B_3))$. 我们希望本文中的方法能为计算一般 B_n-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数提供一些启发.

2 预备知识

为了方便读者，在这一节里我们从文献[1]和[2]中回忆一些关于 Gelfand-Kirillov 维数和量子群的基本概念和结果.

设 k 是一个域，A 是一个有限生成 k- 代数. 设 V 是一个包含在代数 A 中并且含有 1_A 的有限维 k-线性空间. 如果作为一个 k-代数，A 由 V 生成，那么称 V 是 A 的一个生成子空间. 对于任意一个正整数 n，记 V^n 为 A 中形式为 $\sum \nu_1\cdots\nu_n$ 的所有元素组成的集合，其中 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in V$. 特别地，$V^0=k$，$V^1=V$. 显然，$\{V^n\}_{n\geqslant 0}$决定了 A 上的一个过滤.

定义 2.1 在集合 N 上定义 A 关于 V 的增长函数或者 Hilbert 函数 HF_V 如下：

$HF_V(n)=\dim_k(V^n)$,

其中 n 是任意正整数.

一个函数 $f:N\to\mathbf{R}$ 称为正函数，如果它的函数值仅取正值. 我们称一个正函数 f 为终究单调递增函数，如果存在一个正整数 n_0 使得对于所有 $n\geqslant n_0$，$f(n)\leqslant f(n+1)$. 显然，上面定义的增长函数 HF_V 是终究单调递增函数.

引理 2.2 设 $f:N\to\mathbf{R}$ 是一个终究单调递增函数. 记 $D(f)=\{x\in\mathbf{R}\,|$存在正整数 n_0 和实数 $c\in\mathbf{R}$(依赖于 x)使得对所有 $n\geqslant n_0$，有 $f(n)\leqslant cn^x\}$，则 $\inf D(f)=\lim\sup\log_n f(n)$，其中 $\log_n$ 表示以 n 为底的对数. 如果 $D(f)=\varnothing$，我们取 $\inf D(f)=\infty$.

定义 2.3 如果 $f:N\to\mathbf{R}$ 是一个终究单调递增函数. 我们定义

$d(f)=\inf D(f)=\lim\sup\log_n f(n)\in[0,\infty)$,

并称 $d(f)$ 为 f 的增长次数.

下面的推论告诉我们，Hilbert 函数 HF_V 的增长次数不依赖于生成子空间 V 的选取.

推论 2.4 设 A 是一个有限生成 k-代数，V 和 V' 是 A 的生成子空间，则 $d(HF_V)=d(HF_{V'})$.

定义 2.5 设 A 是一个有限生成 k-代数，V 是 A 的一个有限维生成子空间. 我们把 A 的 Gelfand-Kirillov 维数定义为 $GK\dim(A)=d(HF_V)$.

现在我们回忆关于左 A-模的 Gelfand-Kirillov 维数的相关概念.

设 A 是一个有限生成 k-代数，M 是一个有限生成左 A-模. M 的生成子空间指 M 的满足条件 $RU=M$ 的一个有限维 k-子空间 U.

定义 2.6 设 A 是一个有限生成 k-代数，V 是 A 的一个有限维生成子空间，U 是有限生成左 A-模 M 的一个生成子空间. 则 M 的关于 V 和 U 的增长函数或者 Hilbert 函数 $HF_{V,U}$ 定义为 $HF_{V,U}(n)=\dim_k(V^nU)$，对所有正整数 n.

推论 2.7 设 A 是一个有限生成 k-代数，M 是一个有限生成的左 A-模，V 和 V' 是 A 的生成子空间，U 和 U' 是 M 的生成子空间. 则 $d(HF_{V,U})=d(HF_{V',U'})$.

定义 2.8 设 A 是一个有限生成 k-代数，M 是一个有限生成的左 A-模，V 和 U 分别是 A 和 M 的生成子空间. M 的 Gelfand-Kirillov 维数定义为 $GK\dim(M)=d(HF_{V,U})$.

设 $\mathbf{N}$ 是非负整数集，n 是正整数.

定义 2.9 在$(\mathbf{N}^n,+)$上的一个全序 $\prec$ 称为一个容许序，如果它满足以下两个条件：

(1) 对于每一个 $0\neq\alpha\in\mathbf{N}^n$，有 $0\prec\alpha$；

(2) 对于所有 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{N}^n$，使得 $\alpha\prec\beta$，有 $\alpha+\gamma\prec\beta+\gamma$.

定义 2.10 设 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\mathbf{N}^n$. 元素关于 ω 的 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$ 有权总次数定义如下：

$$|\alpha|_\omega=[\omega,\alpha]=\sum_{i=1}^n\omega_i a_i.$$

在 $\mathbf{N}^n$ 上关于序 $\varepsilon_1\prec\varepsilon_2\prec\cdots\prec\varepsilon_n$ 的 ω-权次数字典序 $\leqslant\omega$ 定义如下：$\alpha\leqslant_\omega\beta\Leftrightarrow|\alpha|_\omega\leqslant|\beta|_\omega$，或者 $|\alpha|_\omega=|\beta|_\omega$ 且 $\alpha\leqslant_{lex}\beta$，其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbf{N}^n$ 的标准基，且$\leqslant_{lex}$是字典序.

设 A 是由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的结合 k-代数，$\leqslant$ 是 N^n 上的可容许序. 在 A 中形式为 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 的元素称为标准项，记为 X^α，其中 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{N}^n$ 称为 X^α 的指数向量. 如果 $f\in A$ 存在唯一的表达形式 $f=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}}c_\alpha X^\alpha$，则我们定义

$Exp(f)=\max\{\alpha\in\mathbf{N}^n\,|\,c_\alpha\neq 0\}$.

定义 2.11 域 k 上的一个 PBW 代数指的是由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成且满足以下关系

$Q=\{x_jx_i=q_{ji}x_ix_j+p_{ji},1\leqslant i<j\leqslant n\}$

的结合代数，其中 p_{ji}是标准项 $X^\alpha=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}(\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{N}^n)$的有限 k-线性组合，q_{ji}是 k 中的非零常数. 同时，此代数应该满足下面两个条件：

(1) 对于每个 $1\leqslant i<j\leqslant n$，在 $\mathbf{N}^n$ 上存在一

个可容许序 $\leqslant$ 使得 $Exp(p_{ji})<\varepsilon_i+\varepsilon_j$，其中 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 是 N^n 上的标准基向量；

(2) 标准项 $X^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{N}^n)$ 构成 A 的一组 k-线性基.

此 PBW 型 k-代数 A 也记为

$A=k\{x_1,\cdots,x_n;Q,\leqslant\}$.

根据文献[1]，第三章推论 1.7，我们把对应于一个所有分量都是正数的向量 ω 的 PBW 型代数 A 也记为

$A=k\{x_1,\cdots,x_n;Q,\leqslant\omega\}$.

对于任意子集 $N\subseteq A$，我们定义：$Exp(N)=\{Exp(f)\mid f\in\mathbf{N}\}$.

定义 2.12　设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{N}^n$，那么 α 的支撑定义为

$Supp(\alpha)=\{i\in\{1,2,\cdots,n\}\mid a_i\neq 0\}$.

显然 $Supp(\alpha)=\varnothing$ 当且仅当 $\alpha=0$.

对于 $\mathbf{N}^n$ 上任意一个单理想(monoideal) E(见文献[1])，我们定义

$$V(E)=\{\sigma\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\mid\ \forall\alpha\in E,\sigma\cap Supp(\alpha)\neq\varnothing\}.$$

定义 2.13　一个单理想 E 的维数定义如下：

$$\dim(E)=\begin{cases} n & E=\varnothing,\\ 0 & E=\mathbf{N}^n,\\ n-\min\{card(\sigma), & E\subset\mathbf{N}^n,\\ \quad\sigma\in V(E)\} & \end{cases}$$

其中 $card(\sigma)$ 表示 σ 中元素个数.

定理 2.14　设 $R=k\{x_1,\cdots,x_n;Q,\leqslant\omega\}$ 是一个 PBW 型 k-代数，$N\subseteq R^m$ 是 R^m 的一个左 R-子模，且 $M=\dfrac{R^m}{N}$. 则有

$GK\dim(M)=\dim(Exp(N))$.

现在我们回忆关于量子群的基本概念. 设 $Q(v)$ 是变量 v 的有理函数域，令 $A=(a_{ij})$ 是整数集上的一个可对称化 $n\times n$ $Cartan$ 矩阵，即 $a_{ii}=2$，$a_{ij}\leqslant 0$，$(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$，且存在对角矩阵 D，其对角线上的元素 d_i 是正整数，使得 DA 是对称矩阵. 设 q 是 k 中的一个非零元，且对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，满足 $q^{4d_i}\neq 1$，则量子群 $U_q(A)$ 是由生成元 $\{E_i,K_i^{\pm1},F_i\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 生成的，并且满足以下关系的 k-代数：

$$K=\{K_iK_j-K_jK_i,K_iK_i^{-1}-1,K_i^{-1}K_i-1,E_jK_i^{\pm1}-q^{\mp d_ia_{ij}}K_i^{\pm1}E_j,K_i^{\pm1}F_j-q^{\mp d_ia_{ij}}F_jK_i^{\pm1}\},$$

$$T=\left\{E_iF_j-F_jE_i-\delta_{ij}\frac{K_i^2-K_i^{-2}}{q^{2d_i}-q^{-2d_i}}\right\},$$

$$S^{+}=\left\{\sum_{\mu=0}^{1-a_{ij}}(-1)^{\mu}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ \mu\end{bmatrix}_t E_i^{1-a_{ij}-\mu}E_jE_i^{\mu}\mid i\neq j,t=q^{2d_i}\right\},$$

$$S^{-}=\left\{\sum_{\mu=0}^{1-a_{ij}}(-1)^{\mu}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ \mu\end{bmatrix}_t F_i^{1-a_{ij}-\mu}F_jF_i^{\mu}\mid i\neq j,t=q^{2d_i}\right\},$$

其中

$$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}_t=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{t^{m-i+1}-t^{i-m-1}}{t^i-t^{-i}}(m>n>0),\\ 1(n=0,n=m).\end{cases}$$

设 $U_q^{+}(A)$，$U_q^{0}(A)$ 和 $U_q^{-}(A)$ 是 $U_q(A)$ 的分别由 E_i，$K_i^{\pm1}$ 和 F_i 生成的子代数. 那么我们有以下三角分解

$U_q(A)\cong U_q^{+}(A)\otimes U_q^{0}(A)\otimes U_q^{-}(A)$.

3　B_3-型量子群的 Gelfand-Kirillov 维数

在这一节里，我们将计算量子群 $U_q(B_3)$ 的 Gelfand-kirillov 维数. 为此我们选取 B_3 的以下定向：

$$1\xrightarrow{(1,2)}2\longrightarrow 3,$$

对应的 Cartan 矩阵 A 及其极小对称化子 D 分别为：

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-2&2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

所以 $\xi_1=2,\xi_2=2,\xi_3=1$.

设

$$X=\{E_3,E_{233},E_{23},E_{1233},E_{12233},E_{123},E_2,E_{12},E_1,K_1^{\pm1},K_2^{\pm1},K_3^{\pm1},F_3,F_{233},F_{23},F_{1233},F_{12233},F_{123},F_2,F_{12},F_1\}.$$

则由文献[3]可知 X 也是 $U_q(B_3)$ 的生成集，其中 $E_3,E_{233},E_{23},E_{1233},E_{12233},E_{123},E_2,E_{12},E_1$ 是 B_3-

型 Ringel-Hall 代数 $H(B_3)$中的不可分解表示同构类在 Ringel-Hall 代数 $H(B_3)$与量子群的正部分 $U_q^+(B_3)$之间典范同构映射下的修正像[4], F_3, F_{233}, F_{23}, F_{1233}, F_{12233}, F_{123}, F_2, F_{12}, F_1, 是 E_3, E_{233}, E_{23}, E_{1233}, E_{12233}, E_{123}, E_2, E_{12}, E_1 在量子群 $U_q(B_3)$的对合同构[2]下的像.

我们对集合 X 中的元素定义一个序如下:

$$E_3 > E_{233} > E_{23} > E_{1233} > E_{12233} > E_{123} > E_2 > E_{12} > E_1 > K_3 > K_2 > K_1 > K_3^{-1} > K_2^{-1} > K_1^{-1} > F_3 > F_{233} > F_{23} > F_{1233} > F_{12233} > F_{123} > F_2 > F_{12} > F_1.$$

根据文献[5]中给定的算法,我们计算出以下拟交换关系集合(S^+):

(1) $E_{1233}E_{23} = E_{23}E_{1233}$;

(2) $E_2E_{123} = E_{123}E_2$;

(3) $E_1E_3 = E_3E_1$;

(4) $E_{233}E_3 = v^2E_3E_{233}$;

(5) $E_{1233}E_3 = v^2E_3E_{1233}$;

(6) $E_{23}E_{233} = v^2E_{233}E_{23}$;

(7) $E_{1233}E_{233} = v^2E_{233}E_{1233}$;

(8) $E_{12233}E_{23} = v^2E_{23}E_{12233}$;

(9) $E_2E_{23} = v^2E_{23}E_2$;

(10) $E_{12233}E_{1233} = v^2E_{1233}E_{12233}$;

(11) $E_1E_{1233} = v^2E_{1233}E_1$;

(12) $E_{123}E_{1233} = v^2E_{1233}E_{123}$;

(13) $E_{123}E_{12233} = v^2E_{12233}E_{123}$;

(14) $E_2E_{12233} = v^2E_{12233}E_2$;

(15) $E_{12}E_{123} = v^2E_{123}E_{12}$;

(16) $E_1E_{123} = v^2E_{123}E_1$;

(17) $E_{12}E_2 = v^2E_2E_{12}$;

(18) $E_1E_{12} = v^2E_{12}E_1$;

(19) $E_2E_3 = v^{-2}E_3E_2 + E_{23}$;

(20) $E_{12}E_3 = v^{-2}E_3E_{12} + E_{123}$;

(21) $E_1E_{233} = v^{-2}E_{233}E_1 + E_{1233}$;

(22) $E_1E_{23} = v^{-2}E_{23}E_1 + E_{123}$;

(23) $E_2E_{1233} = v^{-2}E_{1233}E_2 + E_{12233}$;

(24) $E_1E_2 = v^{-2}E_2E_1 + E_{12}$;

(25) $E_{23}E_3 = E_3E_{23} + (v - v^{-1})E_{233}$;

(26) $E_{123}E_{23} = E_{23}E_{123} + (v - v^{-1})E_{12233}$;

(27) $E_{123}E_3 = E_3E_{123} + (v - v^{-1})E_{1233}$;

(28) $E_{12233}E_3 = E_3E_{12233} + (v^2 - v^{-2})E_{23}E_{1233}$;

(29) $E_{123}E_{233} = E_{233}E_{123} + (v^2 - v^{-2})E_{23}E_{1233}$;

(30) $E_{12}E_{23} = E_{23}E_{12} + (v^2 - v^{-2})E_{123}E_2$;

(31) $E_2E_{233} = E_{233}E_2 + vE_{23}^2$;

(32) $E_{12}E_{1233} = E_{1233}E_{12} + vE_{123}^2$;

(33) $E_1E_{12233} = E_{12233}E_1 + vE_{123}^2$;

(34) $E_{12233}E_{233} = v^2E_{233}E_{12233} + (v^3 - v^{-1})E_{23}^2E_{1233}$;

(35) $E_{12}E_{12233} = v^2E_{12233}E_{12} + (v^3 - v^{-1})E_{123}^2E_2$;

(36) $E_{12}E_{233} = v^{-2}E_{233}E_{12} + (1 - v^{-4})E_{1233}E_2 + (v + v^{-1})E_{23}E_{123} + (v^2 - v^{-2} - 1)E_{12233}$.

对称地,我们可以算出以下拟交换关系集合(S^-):

(1) $F_{1233}F_{23} = F_{23}F_{1233}$;

(2) $F_2F_{123} = F_{123}F_2$;

(3) $F_1F_3 = F_3F_1$;

(4) $F_{233}F_3 = v^2F_3F_{233}$;

(5) $F_{1233}F_3 = v^2F_3F_{1233}$;

(6) $F_{23}F_{233} = v^2F_{233}F_{23}$;

(7) $F_{1233}F_{233} = v^2F_{233}F_{1233}$;

(8) $F_{12233}F_{23} = v^2F_{23}F_{12233}$;

(9) $F_2F_{23} = v^2F_{23}F_2$;

(10) $F_{12233}F_{1233} = v^2F_{1233}F_{12233}$;

(11) $F_1F_{1233} = v^2F_{1233}F_1$;

(12) $F_{123}F_{1233} = v^2F_{1233}F_{123}$;

(13) $F_{123}F_{12233} = v^2F_{12233}F_{123}$;

(14) $F_2F_{12233} = v^2F_{12233}F_2$;

(15) $F_{12}F_{123} = v^2F_{123}F_{12}$;

(16) $F_1F_{123} = v^2F_{123}F_1$;

(17) $F_{12}F_2 = v^2F_2F_{12}$;

(18) $F_1F_{12} = v^2F_{12}F_1$;

(19) $F_2F_3 = v^{-2}F_3F_2 + F_{23}$;

(20) $F_{12}F_3 = v^{-2}F_3F_{12} + F_{123}$;

(21) $F_1F_{233} = v^{-2}F_{233}F_1 + F_{1233}$;

(22) $F_1F_{23} = v^{-2}F_{23}F_1 + F_{123}$;

(23) $F_2F_{1233} = v^{-2}F_{1233}F_2 + F_{12233}$;

(24) $F_1F_2 = v^{-2}F_2F_1 + F_{12}$;

(25) $F_{23}F_3 = F_3F_{23} + (v - v^{-1})F_{233}$;

(26) $F_{123}F_{23} = F_{23}F_{123} + (v\_v^{-1})F_{12233}$;

(27) $F_{123}F_3 = F_3F_{123} + (v - v^{-1})F_{1233}$;

(28) $F_{12233}F_3 = F_3F_{12233} + (v^2 - v^{-2})F_{23}F_{1233}$;

(29) $F_{123}F_{233} = F_{233}F_{123} + (v^2 - v^{-2})F_{23}F_{1233}$;

(30) $F_{12}F_{23} = F_{23}F_{12} + (v^2 - v^{-2})F_{123}F_2$;

(31) $F_2F_{233} = F_{233}F_2 + vF_{23}^2$;

(32) $F_{12}F_{1233} = F_{1233}F_{12} + vF_{123}^2$;

(33) $F_1F_{12233} = F_{12233}F_1 + vF_{123}^2$;

(34) $F_{12233}F_{233}=v^2F_{233}F_{12233}+(v^3-v^{-1})F_{23}^2F_{1233}$；

(35) $F_{12}F_{12233}=v^2F_{12233}F_{12}+(v^3-v^{-1})F_{123}^2F_2$；

(36) $F_{12}F_{233}=v^{-2}F_{233}F_{12}+(1-v^{-4})F_{1233}F_2+(v+v^{-1})F_{23}F_{123}+(v^2-v^{-2}-1)F_{12233}$.

由文献[6]，我们知道(S^+)和(S^-)分别是 k-代数 $U_q^+(B_3)$和 $U_q^-(B_3)$的极小 Grobner-Shirshov 基. 又从文献[7]可知 $S^+\cup T\cup K\cup S^-$ 是量子群 $U_q(B_3)$的极小 Grobner-Shirshov 基.

如果能够证明 $U_q(B_3)$是一个 PBW 代数的商，那么我们就可以计算它的 Gelfand-Kirillov 维数. 为此我们需要知道所有生成元之间的拟交换关系. 通过反复利用集合(S^+)，K，T，(S^-)中的关系，我们能够计算出它们之间所有的拟交换关系. 为了方便读者，我们具体给出以下一种情况的证明：

$$\begin{aligned}E_1F_{123}&=E_1(F_{12}F_3-v^{-2}F_3F_{12})=\\&E_1F_{12}F_3-v^{-2}E_1F_3F_{12}=\\&(F_{12}E_1+F_2K_1^2)F_3-v^{-2}F_3E_1F_{12}=\\&F_{12}E_1F_3+F_2K_1^2F_3-\\&v^{-2}F_3(F_{12}E_1+F_2K_1^2)=\\&F_{12}F_3E_1-v^{-2}F_3F_{12}E_1+\\&F_2F_3K_1^2-v^{-2}F_3F_2K_1^2=\\&(F_{12}F_3-v^{-2}F_3F_{12})E_1+(F_2F_3-\\&v^{-2}F_3F_2)K_1^2=\\&F_{123}E_1+F_{23}K_1^2.\end{aligned}$$

通过同样的计算方法，我们计算出以下关系：

(1) $E_1K_1^{\pm1}=v^{\mp2}k_1^{\pm1}E_1$；

(2) $K_1^{\pm1}F_1=v^{\mp2}F_1K_1^{\pm1}$；

(3) $E_1K_2^{\pm1}=v^{\pm1}K_2^{\pm1}E_1$；

(4) $K_2^{\pm1}F_1=v^{\pm1}F_1K_2^{\pm1}$；

(5) $E_1K_3^{\pm1}=K_3^{\pm1}E_1$；

(6) $K_3^{\pm1}F_1=F_1K_3^{\pm1}$；

(7) $E_2K_1^{\pm1}=v^{\pm1}K_1^{\pm1}E_2$；

(8) $K_1^{\pm1}F_2=v^{\pm1}F_2K_1^{\pm1}$；

(9) $E_2K_2^{\pm1}=v^{\mp2}K_2^{\pm1}E_2$；

(10) $K_2^{\pm1}F_2=v^{\mp2}F_2K_2^{\pm1}$；

(11) $E_2K_3^{\pm1}=v^{\pm1}K_3^{\pm1}E_2$；

(12) $K_3^{\pm1}F_2=v^{\pm1}F_2K_3^{\pm1}$；

(13) $E_3K_1^{\pm1}=K_1^{\pm1}E_3$；

(14) $K_1^{\pm1}F_3=F_3K_1^{\pm1}$；

(15) $E_3K_2^{\pm1}=v^{\pm1}K_2^{\pm1}E_3$；

(16) $K_2^{\pm1}F_3=v^{\pm1}F_3K_2^{\pm1}$；

(17) $E_3K_3^{\pm1}=v^{\mp1}K_3^{\pm1}E_3$；

(18) $K_3^{\pm1}F_3=v^{\mp1}F_3K_3^{\pm1}$；

(19) $E_{12}K_1^{\pm1}=v^{\mp1}K_1^{\pm1}E_{12}$；

(20) $K_1^{\pm1}F_{12}=v^{\mp1}F_{12}K_1^{\pm1}$；

(21) $E_{12}K_2^{\pm1}=v^{\mp1}K_2^{\pm1}E_{12}$；

(22) $K_2^{\pm1}F_{12}=v^{\mp1}F_{12}K_2^{\pm1}$；

(23) $E_{12}K_3^{\pm1}=v^{\pm1}K_3^{\pm1}E_{12}$；

(24) $K_3^{\pm1}F_{12}=v^{\pm1}F_{12}K_3^{\pm1}$；

(25) $E_{23}K_1^{\pm1}=v^{\pm1}K_1^{\pm1}E_{23}$；

(26) $K_1^{\pm1}F_{23}=v^{\pm1}F_{23}K_1^{\pm1}$；

(27) $E_{23}K_2^{\pm1}=v^{\mp1}K_2^{\pm1}E_{23}$；

(28) $K_2^{\pm1}F_{23}=v^{\mp1}F_{23}K_2^{\pm1}$；

(29) $E_{23}K_3^{\pm1}=K_3^{\pm1}E_{23}$；

(30) $K_3^{\pm1}F_{23}=F_{23}K_3^{\pm1}$；

(31) $E_{123}K_1^{\pm1}=v^{\mp1}K_1^{\pm1}E_{123}$；

(32) $K_1^{\pm1}F_{123}=v^{\mp1}F_{123}K_1^{\pm1}$；

(33) $E_{123}K_2^{\pm1}=K_2^{\pm1}E_{123}$；

(34) $K_2^{\pm1}F_{123}=F_{123}K_2^{\pm1}$；

(35) $E_{123}K_3^{\pm1}=K_3^{\pm1}E_{123}$；

(36) $K_3^{\pm1}F_{123}=F_{123}K_3^{\pm1}$；

(37) $E_{233}K_1^{\pm1}=v^{\pm1}K_1^{\pm1}E_{233}$；

(38) $K_1^{\pm1}F_{233}=v^{\pm1}F_{233}K_1^{\pm1}$；

(39) $E_{233}K_2^{\pm1}=K_2^{\pm1}E_{233}$；

(40) $K_2^{\pm1}F_{233}=F_{233}K_2^{\pm1}$；

(41) $E_{233}K_3^{\pm1}=v^{\mp1}K_3^{\pm1}E_{233}$；

(42) $K_3^{\pm1}F_{233}=v^{\mp1}F_{233}K_3^{\pm1}$；

(43) $E_{1233}K_1^{\pm1}=v^{\mp1}K_1^{\pm1}E_{1233}$；

(44) $K_1^{\pm1}F_{1233}=v^{\mp1}F_{1233}K_1^{\pm1}$；

(45) $E_{1233}K_2^{\pm1}=v^{\pm1}K_2^{\pm1}E_{1233}$；

(46) $K_2^{\pm1}F_{1233}=v^{\pm1}F_{1233}K_2^{\pm1}$；

(47) $E_{1233}K_3^{\pm1}=v^{\mp1}K_3^{\pm1}E_{1233}$；

(48) $K_3^{\pm1}F_{1233}=v^{\mp1}F_{1233}K_3^{\pm1}$；

(49) $E_{12233}K_1^{\pm1}=K_1^{\pm1}E_{12233}$；

(50) $K_1^{\pm1}F_{12233}=F_{12233}K_1^{\pm1}$；

(51) $E_{12233}K_2^{\pm1}=v^{\mp1}K_2^{\pm1}E_{12233}$；

(52) $K_2^{\pm1}F_{12233}=v^{\mp1}F_{12233}K_2^{\pm1}$；

(53) $E_{12233}K_3^{\pm1}=K_3^{\pm1}E_{12233}$；

(54) $K_3^{\pm1}F_{12233}=F_{12233}K_3^{\pm1}$；

(55) $E_1F_1=F_1E_1+\dfrac{K_1^2-K_1^{-2}}{v^2-v^{-2}}$；

(56) $E_1F_2=F_2E_1$；

(57) $E_1F_3=F_3E_1$；

(58) $E_2F_1=F_1E_2$；

(59) $E_2F_2=F_2E_2+\dfrac{K_2^2-K_2^{-2}}{v^2-v^{-2}}$；

(60) $E_2F_3 = F_3E_2$;

(61) $E_3F_1 = F_1E_3$;

(62) $E_3F_2 = F_2E_3$;

(63) $E_3F_3 = F_3E_3 + \dfrac{K_3^2 - K_3^{-2}}{v - v^{-1}}$;

(64) $E_1F_{12} = F_{12}E_1 + F_2K_1^2$;

(65) $E_1F_{23} = F_{23}E_1$;

(66) $E_1F_{123} = F_{123}E_1 + F_{23}K_1^2$;

(67) $E_1F_{233} = F_{233}E_1$;

(68) $E_1F_{1233} = F_{1233}E_1 + F_{233}K_1^2$;

(69) $E_1F_{12233} = F_{12233}E_1 + vF_{23}^2K_1^2$;

(70) $E_2F_{12} = F_{12}E_2 - v^{-2}F_1K_2^{-2}$;

(71) $E_2F_{23} = F_{23}E_2 + F_3K_2^2$;

(72) $E_2F_{123} = F_{123}E_2$;

(73) $E_2F_{233} = F_{233}E_2 + vF_3^2K_2^2$;

(74) $E_2F_{1233} = F_{1233}E_2$;

(75) $E_2F_{12233} = F_{12233}E_2 + F_{1233}K_2^2$;

(76) $E_3F_{12} = F_{12}E_3$;

(77) $E_3F_{23} = F_{23}E_3 - (v^{-3} + v^{-1})F_2K_3^{-2}$;

(78) $E_3F_{123} = F_{123}E_3 - (v^{-3} + v^{-1})F_{12}K_3^{-2}$;

(79) $E_3F_{233} = F_{233}E_3 - \dfrac{v + v^{-1}}{v - v^{-1}}F_{23}K_3^{-2}$;

(80) $E_3F_{1233} = F_{1233}E_3 - \dfrac{v + v^{-1}}{v - v^{-1}}F_{123}K_3^{-2}$;

(81) $E_3F_{12233} = F_{12233}E_3 - (1 + v^{-2})^2F_2F_{123}K_3^{-2}$;

(82) $E_{12}F_1 = F_1E_{12} - v^{-2}K_1^{-2}E_2$;

(83) $E_{12}F_2 = F_2E_{12} + K_2^2E_1$;

(84) $E_{12}F_3 = F_3E_{12}$;

(85) $E_{12}F_{12} = F_{12}E_{12} +$
$\dfrac{1}{v^4 - 1}(K_1^{-2}K_2^{-2} - K_2^2K_1^2)$

(86) $E_{12}F_{23} = F_{23}E_{12} + (v^2 + v^{-2})F_3K_2^2E_1$;

(87) $E_{12}F_{123} = F_{123}E_{12} - v^{-2}F_3K_2^2K_1^2$;

(88) $E_{12}F_{233} = F_{233}E_{12} + (v^3 - v^{-1})F_3^2K_2^2E_1$;

(89) $E_{12}F_{1233} = F_{1233}E_{12} - v^{-1}F_3^2K_2^2K_1^2$;

(90) $E_{12}F_{12233} = F_{12233}E_{12} + (v^2 -$
$v^{-2})F_{1233}K_2^2E_1 - (v^{-1} + v^{-3})F_3F_{23}K_1^2K_2^2 +$
$v^{-2}F_{233}K_1^2K_2^2$;

(91) $E_{23}F_1 = F_1E_{23}$;

(92) $E_{23}F_2 = F_2E_{23} - v^{-2}K_2^{-2}E_3$;

(93) $E_{23}F_3 = F_3E_{23} + (v + v^{-1})K_3^2E_2$;

(94) $E_{23}F_{12} = F_{12}E_{23} + (v^{-6} - v^{-2})F_1K_2^{-2}E_3$;

(95) $E_{23}F_{23} =$
$F_{23}E_{23} + \dfrac{v^{-2}}{v - v^{-1}}(K_2^{-2}K_3^{-2} - K_3^2K_2^2)$;

(96) $E_{23}F_{123} = F_{123}E_{23} + (v^{-5} + v^{-3})F_1K_2^{-2}K_3^{-2}$;

(97) $E_{23}F_{233} = F_{233}E_{23} - \dfrac{v^{-3} + v^{-1}}{v - v^{-1}}F_3K_3^2K_2^2$;

(98) $E_{23}F_{1233} = F_{1233}E_{23}$;

(99) $E_{23}F_{12233} =$
$F_{12233}E_{23} + \dfrac{v + v^{-1}}{v - v^{-1}}v^{-2}F_{123}K_2^{-2}K_3^{-2}$;

(100) $E_{123}F_1 = F_1E_{123} -$
$v^{-2}K_1^{-2}E_{23}$ (101) $E_{123}F_2 = F_2E_{123}$;

(102) $E_{123}F_3 = F_3E_{123} + (v + v^{-1})K_3^2E_{12}$;

(103) $E_{123}F_{12} = F_{12}E_{123} +$
$v^{-4}K_1^{-2}K_2^{-2}E_3$ (104) $E_{123}F_{23} =$
$F_{23}E_{123} - (v^{-1} + v^{-3})K_3^2K_2^2E_1$;

(105) $E_{123}F_{123} = F_{123}E_{123} +$
$\dfrac{v^{-4}}{v - v^{-1}}(K_3^2K_2^2K_1^2 - K_1^{-2}K_2^{-2}K_3^{-2})$;

(106) $E_{123}F_{233} = F_{233}E_{123} +$
$\dfrac{v^{-5} + v^{-3} - v^{-1} - v}{v - v^{-1}}F_3K_3^2K_2^2E_1$;

(107) $E_{123}F_{1233} = F_{1233}E_{123} +$
$\dfrac{v^{-5} + v^{-3}}{v - v^{-1}}F_3K_3^2K_2^2K_1^2$;

(108) $E_{123}F_{12233} = F_{12233}E_{123} +$
$\dfrac{v^{-5} + v^{-3}}{v - v^{-1}}(F_2F_3 - F_3F_2)K_3^2K_2^2K_1^2$;

(109) $E_{233}F_1 = F_1E_{233}$;

(110) $E_{233}F_2 = F_2E_{233} - v^{-3}K_2^{-2}E_3^2$;

(111) $E_{233}F_3 = F_3E_{233} + \dfrac{v + v^{-1}}{v - v^{-1}}K_3^2E_{23}$;

(112) $E_{233}F_{12} =$
$F_{12}E_{233} + (v^{-7} - v^{-3})F_1K_2^{-2}E_3^2$;

(113) $E_{233}F_{23} =$
$F_{23}E_{233} + \dfrac{v^{-3} + v^{-1}}{v - v^{-1}}K_2^{-2}K_3^{-2}E_3$;

(114) $E_{233}F_{123} = F_{123}E_{233} +$
$\dfrac{(v^{-3} + v^{-1})(1 - v^{-4})}{v - v^{-1}}F_1K_2^{-2}K_3^{-2}E_3$;

(115) $E_{233}F_{233} = F_{233}E_{233} +$
$\dfrac{v^{-3} + v^{-1}}{v - v^{-1\,3}}(K_3^4K_2^2 - K_2^{-2}K_3^{-4})$;

(116) $E_{233}F_{1233} = F_{1233}E_{233} +$
$\dfrac{(v^{-3} + v^{-1})(v^{-4} - 1)}{(v - v^{-1})^3}K_2^{-2}K_3^{-4}$;

(117) $E_{233}F_{12233} = F_{12233}E_{233} +$
$\dfrac{v^{-3} + v^{-1}}{v - v^{-1}}[-(v^{-4} + v^{-2})F_2K_2^{-2}K_3^{-4} +$

$(v+v^{-1})F_{123}K_2^{-2}K_3^{-2}E_3-$

$(1+v^{-2})F_{12}K_2^{-2}K_3^{-4}]$；

(118) $E_{1233}F_1=F_1E_{1233}-v^{-2}K_1^{-2}E_{233}$；

(119) $E_{1233}F_2=F_2E_{1233}$；

(120) $E_{1233}F_3=F_3E_{1233}+\frac{v+v^{-1}}{v-v^{-1}}K_3^2E_{123}$；

(121) $E_{1233}F_{12}=F_{12}E_{1233}+$
$v^{-5}K_1^{-2}K_2^{-2}E_3^2$；

(122) $E_{1233}F_{23}=F_{23}E_{1233}$；

(123) $E_{1233}F_{123}=$
$F_{123}E_{1233}-\frac{v^{-5}+v^{-3}}{v-v^{-1}}K_1^{-2}K_2^{-2}K_3^{-2}E_3$；

(124) $E_{1233}F_{233}=$
$F_{233}E_{1233}+\frac{(1+v^{-2})^2}{(v-v^{-1})^2}K_3^4K_2^2E_1$；

(125) $E_{1233}F_{1233}=F_{1233}E_{1233}+$
$\frac{v^{-3}+v^{-5}}{(v-v^{-1})^3}(K_1^{-2}K_2^{-2}K_3^{-4}-K_3^4K_2^2K_1^2)$；

(126) $E_{1233}F_{12233}=F_{12233}E_{1233}+$
$\frac{v^{-2}(v^{-3}+v^{-1})^2}{(v-v^{-1})^2}F_2K_1^{-2}K_2^{-2}K_3^{-4}$；

(127) $E_{12233}F_1=F_1E_{12233}-v^{-3}K_1^{-2}E_{23}^2$；

(128) $E_{12233}F_2=F_2E_{12233}-v^{-2}K_2^{-2}E_{12233}$；

(129) $E_{12233}F_3=$
$F_3E_{12233}+(v+v^{-1})^2K_3^2E_2E_{123}$；

(130) $E_{12233}F_{12}=F_{12}E_{12233}+$
$(v^{-6}-v^{-2})F_1K_2^{-2}E_{12233}+$
$K_1^{-2}K_2^{-2}[(v^{-5}+v^{-3})E_{23}E_3-v^{-4}E_{233}]$；

(131) $E_{12233}F_{23}=$
$F_{23}E_{12233}-\frac{v^{-1}+v^{-3}}{v-v^{-1}}K_3^2K_2^2E_{123}$；

(132) $E_{12233}F_{123}=$
$F_{123}E_{12233}-\frac{v^{-5}+v^{-3}}{v-v^{-1}}K_1^{-2}K_2^{-2}K_3^{-2}E_{23}$；

(133) $E_{12233}F_{233}=F_{233}E_{12233}+$
$\frac{(1+v^{-2})^2}{v-v^{-1}}K_3^2K_2^2\left[(v+v^{-1})K_3^2E_2E_1-\frac{1}{v-v^{-1}}K_3^2E_{12}-F_3E_{123}\right]$；

(134) $E_{12233}F_{1233}=F_{1233}E_{12233}-$
$\frac{(v^{-5}+v^{-3})(v+v^{-1})}{(v-v^{-1})^2}K_3^4K_2^2K_1^2E_2$；

(135) $E_{12233}F_{12233}=F_{12233}E_{12233}+$
$\frac{v^{-5}+v^{-7}}{(v-v^{-1})^3}(K_3^4K_2^4K_1^2-K_1^{-2}K_2^{-4}K_3^{-4})$.

由 Grobner-Shirshov 基的等价条件，我们知道下面的单项式是 $U_q(B_3)$ 的一组基：

$$F_1^{n_1}F_{12}^{n_2}F_2^{n_3}F_{123}^{n_4}F_{12233}^{n_5}F_{1233}^{n_6}F_{23}^{n_7}F_{233}^{n_8}F_3^{n_9}K_1^{a_1}K_2^{a_2}\times K_3^{a_3}E_1^{m_1}E_{12}^{m_2}E_2^{m_3}E_{123}^{m_4}E_{12233}^{m_5}E_{1233}^{m_6}E_{23}^{m_7}E_{233}^{m_8}E_3^{m_9},$$

其中 $n_i,m_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant 9)$；$a_j\in\mathbf{Z}(1\leqslant j\leqslant 3)$.

为了计算 $U_q(B_3)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数，我们要证明此代数是一个 PBW 代数的商. 为此我们需要构造一个新 PBW 代数. 我们要找到一个向量使得它的每一个分量都是正数，并且它是一个标准单项式的指数向量. 因此我们不能用负指数（详见文献[1]）. 所以我们通过把 $U_q(B_3)$ 中的 k_i^{-1} 用 l_i，$i\in\{1,2,3\}$ 替换而得到新的代数. 我们记这个代数为 $V_q(B_3)$. 我们利用以上的拟交换关系进行直接计算知道如下形式的单项式组成 $V_q(B_3)$ 的一个 k-线性基：

$$F_1^{n_1}F_{12}^{n_2}F_2^{n_3}F_{123}^{n_4}F_{12233}^{n_5}F_{1233}^{n_6}F_{23}^{n_7}F_{233}^{n_8}F_3^{n_9}K_1^{a_1}K_2^{a_2}K_3^{a_3}l_1^{b_1}l_2^{b_2}l_3^{b_3}\times E_1^{m_1}E_{12}^{m_2}E_2^{m_3}E_{123}^{m_4}E_{12233}^{m_5}E_{1233}^{m_6}E_{23}^{m_7}E_{233}^{m_8}E_3^{m_9},$$

其中 $n_i,m_i\in\mathbf{N}$，$1\leqslant i\leqslant 9$；$a_j,b_j\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant j\leqslant 3$.

接下来，我们要证明代数 $V_q(B_3)$ 是一个 PBW 代数. 由 PBW 代数的定义知，只需要找出一个只有正分量的权向量 ω 使得它满足定义 2.11 中条件(1)和(2). 由文献[8]我们可以取权向量 ω 如下：

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\cdots,\omega_9,1,1,1,1,1,1,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\cdots,\omega_9).$$

通过简单的计算，我们知道条件(1)等价于下列不等式成立：

(1) $\omega_9+\omega_8>2+\omega_7$；

(2) $\omega_9+\omega_6>2+\omega_3$；

(3) $\omega_9+\omega_4>2+\omega_2$；

(4) $\omega_9+\omega_5>2+2\omega_3$；

(5) $\omega_7+\omega_8>2+\omega_9$；

(6) $\omega_7+\omega_3>2+\omega_1$；

(7) $\omega_7+\omega_2>2+2\omega_1$；

(8) $\omega_7+\omega_5>2+\omega_4$；

(9) $\omega_1+\omega_3>2+\omega_7$；

(10) $\omega_1+\omega_6>2+\omega_8$；

(11) $\omega_1+\omega_2>2+\omega_3$；

(12) $\omega_1+\omega_4>2+\omega_6$；

(13) $\omega_1+\omega_5>2+\omega_7+\omega_6$；

(14) $\omega_8+\omega_3>2+\omega_1+\omega_9$；

(15) $\omega_8+\omega_6>4+\omega_1$；

(16) $\omega_8+\omega_2>2+2\omega_1+\omega_9$；

(17) $\omega_8+\omega_4>4+2\omega_1$；

(18) $\omega_8+\omega_5>2+\omega_4+\omega_9$；

(19) $\omega_3+\omega_6>4+\omega_9$；

(20) $\omega_3+\omega_2>4+\omega_1$;

(21) $\omega_3+\omega_5>4+\omega_6$;

(22) $\omega_6+\omega_2>4+\omega_1+\omega_9$;

(23) $\omega_6+\omega_4>6+\omega_1$;

(24) $\omega_6+\omega_5>6+\omega_3$;

(25) $\omega_2+\omega_4>6+\omega_9$;

(26) $\omega_2+\omega_5>6+\omega_8$;

(27) $\omega_4+\omega_5>8+\omega_7$.

为了方便读者,我们通过下面给出的不等式(1)的证明来解释以上 27 个不等式的构造. 因为

$$E_1F_{12}=F_{12}E_1+F_2K_1^2,$$

我们得到

$$Exp(E_1F_{12}-F_{12}E_1)=Exp(F_2K_1^2)=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)$$

和

$$\varepsilon_1+\varepsilon_{12}=(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0).$$

因为向量 ω 满足

$$Exp(E_1F_{12}-F_{12}E_1)\prec\varepsilon_1+\varepsilon_{12},$$

我们便得到不等式:

$$2+\omega_7<\omega_9+\omega_8 \tag{1}$$

通过求解该不等式组,我们得到

$$\omega=(2,4,3,5,6,4,2,3,2,1,1,1,1,1,1,2,4,3,5,6,4,2,3,2).$$

对此向量,定义 2.11 中条件(2)显然成立. 因此对于这个 ω 及序 $\leqslant_\omega$,$V_q(B_3)$是一个 PBW 代数.

下面我们证明 $\varphi:V_q(B_3)\cong U_q(B_3)$. 为此我们定义映射 $\varphi:V_q(B_3)\to U_q(B_3)$如下:

$$F_i\to F_i,E_i\to E_i,K_i\to K_i,l_i\to K_i^{-1},F_{12}\to F_{12},F_{23}\to F_{23},F_{123}\to F_{123},F_{233}\to F_{233},F_{1233}\to F_{1233},F_{12233}\to F_{12233},E_{23}\to E_{23},E_{123}\to E_{123},E_{12}\to E_{12},E_{233}\to E_{233},E_{1233}\to E_{1233},E_{12233}\to E_{12233},$$

其中 $i=1,2,3$. 显然,φ 是一个满同态,且 $\ker(\varphi)=\{K_il_i-1,i=1,2,3\}$. 因为 K_1l_1,K_2l_2,K_3l_3 是中心元,即对于任意 $r\in V_q(B_3)$,我们有 $rK_il_i=K_il_ir$. 因此 $I=\langle K_il_i-1\rangle$是 $V_q(B_3)$的一个双边理想,从而有

$$U_q(B_3)\cong\frac{V_q(B_3)}{I},$$

且通过直接计算可知 $G=\{K_1l_1-1,K_2l_2-1,K_3l_3-1\}$ 是 I 的约化 Grobner-Shirshov 基. 于是

$$Exp(I)=((0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24})\cup((0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24})\cup((0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24}).$$

我们取

$$\alpha_1=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24},$$

$$\alpha_2=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24},$$

$$\alpha_3=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)+\mathbf{N}^{24}.$$

则有

$$Supp(\alpha_1)=\{12,15\},$$

$$Supp(\alpha_2)=\{11,14\},$$

$$Supp(\alpha_3)=\{10,13\}.$$

最后,我们得到

$$\min\{card(\sigma),\sigma\in V(Exp(I))\}=3.$$

由定义 2.13,我们知道 $\dim(Exp(I))=21$. 再由定理 2.14,我们有本文主要结果:

定理 3.1 $GK\dim(U_q(B_3))=GK\dim(\frac{V_q(B_3)}{I})=\dim(Exp(I))=21.$

参考文献:

[1] Buese J, Gomez-Torrecillas J, Verschoren A. Algorithmic methods in non-commutative algebra: applications to the quantum groups [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Jantzen J C. Lectures on quantum groups [M]. Providence: AMS, 1996.

[3] Ringel C M. PBW-basis of quantum groups [J]. J Reine Angew Math, 1996, 470: 51.

[4] Ringel C M. Hall algebras and quantum groups [J]. Invent Math, 1990, 101: 583.

[5] Guhe D. Hall polynomials for Dynkin quivers [D]. Bielefeld: Bielefeld University, 2000.

[6] Yunus G, Obul A. Groebner-Shirshov basis of quantum groups [J]. Algebr Colloq, 2015, 22: 495.

[7] Bokut L A, Malkolmson P. Grobner-Shirshov basis for quantum enveloping algebras [J]. Israel J Math, 1996, 96: 97.

[8] Torrecillas J G. Gelfand-Kirillov dimension of multi-filtered algebras [J]. P Edinburgh Math, 1999, 52: 155.