doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.007

# 稳态吊桥方程耦合系统正解的存在性

李涛涛
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

**摘　要**：本文研究了二阶和四阶常微分方程耦合系统

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,v(t)),t\in(0,1), \\ -v''(t)=\lambda g(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1), \\ v(0)=v(1) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 为参数，$f,g\in C([0,1]\times[0,\infty),\mathbf{R})$. 当 $f,g$ 满足适当的条件时，本文证明了 $\lambda$ 充分大时方程一个正解的存在性. 主要结果的证明基于 Schauder 不动点定理.

**关键词**：微分方程系统；正解；存在性；Schauder 不动点定理
**中图分类号**：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0473-04

# Existence of positive solutions for a coupled system of steady state suspension bridge equation

*LI Tao-Tao*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: In this paper, we are concerned with the existence of positive solutions of a coupled system of second-order and fourth-order ordinary differential equation

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,v(t)),t\in(0,1), \\ -v''(t)=\lambda g(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1), \\ v(0)=v(1), \end{cases}$$

where $\lambda$ is a positive parameter, $f,g\in C([0,1]\times[0,\infty),\mathbf{R})$. We obain the existence of a large positive solution under suitable assumptions on $f$ and $g$. The proof is based upon the Schauder's fixed point theorem.

**Keywords**: Differential equation systems; Positive solutions; Existence; Schauder's fixed point theorem
(2010 MSC 34B15, 34B18)

## 1　引　言

本文考虑二阶和四阶常微分方程耦合系统

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,v(t)),t\in(0,1), \\ -v''(t)=\lambda g(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1), \\ v(0)=v(1) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 为参数，$f,g\in C([0,$

**收稿日期**：2016-09-26
**基金项目**：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626016)
**作者简介**：李涛涛(1991－)，男，甘肃庆阳人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：15246051820@163.com

$1]\times[0,\infty),\mathbf{R})$. 近年来，许多学者在研究二阶和四阶常微分方程耦合系统方面具有极大的兴趣，参见文献[1-16]及其参考文献. 自然地，我们希望二阶和四阶常微分方程耦合系统也能得到类似的结果. 但据我们所知，关于上述耦合系统只存很少结果. 其中，文献[9]在 $\lambda=1, f, g\in C((0,1)\times[0,1),[0,\infty))$ 的假设下运用锥上的不动点定理获得了问题(1)多个正解的存在性. 进一步，文献[10]通过构造上下解和使用 Schauder 不动点定理获得了问题(1)正解存在性的一个充分必要条件，其中的非线性项 $f,g$ 满足更一般的假设，并且 $f,g$ 是非负的. 文献[11,12]运用 Leray-Schauder 不动点定理和临界点理论获得了类似系统 (1) 的一个解的存在性.

问题 (1) 可看作是吊桥方程

$$\begin{cases}y_{tt}+y_{xxxx}+\sigma_1 y_t+k(y-z)^+=w(t),\\ \quad (t,x)\in[0,L]\times\mathbf{R},\\ z_{tt}-z_{xx}+\sigma_2 z_t-k(y-z)^+=h(x,t),\\ \quad (t,x)\in[0,L]\times\mathbf{R},\\ y(0,t)=y(L,t)=y_{xx}(0,t)=y_{xx}(L,t)=0,\\ z(0,t)=z(L,t)=0\end{cases}\tag{2}$$

的稳态[13]，其中变量 $z$ 表示维持缆绳平衡的测量位移，变量 $y$ 表示路床上的位移，常数 $k$ 是一个弹簧常数. 显然，我们考虑的问题与文献[9,12]有很大的区别，主要特点如下：首先，问题(1)可以是半正问题，也就是说，$f$ 和 $g$ 可能取负值；第二，我们将证明 $\lambda$ 充分大时，问题(1)存在一个正解.

本文总假定：

$(\mathrm{H}_1)$ $f,g:[0,1]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 是连续函数，且存在常数 $L>0, K>0$ 使得

$f(t,x)\geqslant L, g(t,x)\geqslant L, x\geqslant K$，关于 $t\in[0,1]$ 一致地成立；

$(\mathrm{H}_2)$ $\forall M>0, N>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\widetilde{f}(M\widetilde{g}(Nx))}{x}=0,$$

其中 $\widetilde{h}(u)=\sup\limits_{t\in[0,1],x\leqslant u}h(t,x)$.

运用 Schauder 不动点定理，本文获得了以下存在性结果：

**定理 1.1** 若条件$(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_2)$成立，则存在 $\lambda^*>0$，使得当 $\lambda>\lambda^*$ 时，问题(1)存在一个充分大的正解 $(u,v)$.

**注 1** 令 $f(t,x)=x^\alpha-\varepsilon_1, g(t,x)=x^\gamma-\varepsilon_2$，其中 $\alpha,\gamma,\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ 为常数且 $\alpha,\gamma\in(0.1)$. 显然 $f,g$ 满足条件$(\mathrm{H}_1)$,$(\mathrm{H}_2)$.

## 2 预备知识

令 $X=C[0,1]$，其在范数 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 下构成 Banach 空间.

**引理 2.1**（Schauder 不动点定理） 令 $E$ 为 Banach 空间，$B\subset E$ 是有界闭凸子集. 若全连续算子 $T:E\to E$，使得 $T(B)\subset B$ 成立，则 $T$ 在 $B$ 上有一个不动点.

令 $f(t,x)=f(t,0), g(t,x)=g(t,0), x<0, t\in[0,1]$. 设 $p$ 是问题

$$\begin{cases}p^{(4)}(t)=1, t\in(0,1),\\ p(0)=p(1)=p''(0)=p''(1)=0\end{cases}$$

的解，$q$ 是问题

$$\begin{cases}-q''(t)=1, t\in(0,1),\\ q(0)=q(1)=0\end{cases}$$

的解. 显然

$$p(t)=\frac{t^4}{24}-\frac{t^3}{12}+\frac{t}{24}\geqslant 2\|p\|_\infty\min\{t,1-t\}\geqslant 0, t\in[0,1]\tag{3}$$

$$q(t)=\frac{1}{2}t(1-t)\geqslant 2\|q\|_\infty\min\{t,1-t\}\geqslant 0, t\in[0,1]\tag{4}$$

定义算子 $A:X\times X\to X\times X$,

$$A(u,v)(t)=\left(\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\ \lambda\int_0^1 G(s,t)g(s,u(s))\mathrm{d}s\right),$$

其中 $G(t,s)$ 是问题

$$\begin{cases}-x''(t)=0, t\in[0,1],\\ x(0)=0, x(1)=0\end{cases}$$

的 Green 函数. 显然算子 $A$ 是全连续的，求解问题(1)的解等价于求解算子 $A$ 的不动点.

令 $\psi=(p_\lambda,q_\lambda)$，其中 $p_\lambda=\frac{1}{2}\lambda Lp, q_\lambda=\frac{1}{2}\lambda Lq$，$\varphi=(C_\lambda p,\lambda\widetilde{g}(C_\lambda\delta)q)$，其中 $\delta=\|p\|_\infty$，$C_\lambda$ 是充分大的常数，使得 $\psi\leqslant\varphi$.

## 3 定理 1.1 的证明

假设当 $\lambda$ 充分大时存在算子 $A:[\psi,\varphi]\to[\psi,\varphi]$. 若假设成立，由引理 2.1 可得，当 $u\geqslant p_\lambda$ 且 $v\geqslant q_\lambda$ 时，算子 $A$ 有一个不动点 $(u,v)$. 显然当 $\lambda\to\infty$ 时，对任意的闭子区间 $D$ 都有 $u(t)$, $v(t)\to\infty$，其中 $D$ 满足 $\{0,1\}\cap D\neq 0$. 要证明上面的假设成立，我们只需证明

(A) 若 $(u,v)\geqslant\psi$, 则 $A(u,v)\geqslant\psi$,

(B) 若 $(u,v)\leqslant\varphi$, 则 $A(u,v)\leqslant\varphi$.

(A)的证明. 令 $(u,v)\geqslant\psi$. 我们需要证明

$$\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{L}{2}q(t),\quad t\in[0,1]\tag{5}$$

$$\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)G(t,s)f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant \frac{L}{2}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,t\in[0,1]\tag{6}$$

$\forall t\in[0,1]\times\mathbf{R}$, 令 $C$ 是 $L-g(t,x)$ 的正的上界. 则存在 $0<\sigma<\frac{1}{2}$. 令 $D:=[\sigma,1-\sigma]$, 使得

$$\frac{L}{2}q(t)-C\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)ds\geqslant 0,t\in[0,1].$$

令 $z(t)=\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)\mathrm{d}s$. 则 $z$ 满足 $-z''(t)=\chi_{[0,1]\setminus D},t\in[0,1],z(0)=z(1)=0$. 显然, $t\in[0,1]z(t)$ 是上凸的. 所以存在 $\zeta\in[0,1]$ 使得 $z'(\zeta)=0$. 因此我们可以得到

$$|z'(t)|=\left|-\int_\zeta^t z''(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant \int_\zeta^t|x_{[0,1]\setminus D}|\mathrm{d}s\leqslant 2\sigma.$$

所以有

$$z(t)=\int_0^t z'(s)\mathrm{d}s\leqslant 2\sigma t,t\in[0,1],$$

及

$$z(t)=\int_t^1-z'(s)\mathrm{d}s\leqslant 2\sigma(1-t),t\in[0,1].$$

由(3)式可得

$$z(t)\leqslant 2\sigma\min\{t,1-t\}\leqslant \frac{\sigma}{\|q\|_\infty}q(t),t\in[0,1].$$

当 $t\in[0,1]$, 令 $\sigma\leqslant\frac{\|p\|_\infty L}{2C}$, 可得

$$\frac{L}{2}q(t)-C\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant \frac{L}{2}q(t)-\frac{C\sigma}{\|q_\infty\|}q(t)\geqslant 0.$$

由于 $u\geqslant p_\lambda v\geqslant q_\lambda$, 若 $\lambda$ 充分大, 则当 $t\in[\sigma,1-\sigma]$时, $u(t),v(t)\geqslant K$. 因此, 当 $t\in[0,1]$ 时, $g(t,u(t))\geqslant L$. 因此 $t\in[0,1]$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s-\frac{L}{2}q(t)=\\&\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s-\frac{L}{2}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_D G(t,s)\left(g(s,u(s))-\frac{L}{2}\right)\mathrm{d}s+\\&\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)\left(g(s,u(s))-\frac{L}{2}\right)\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{L}{2}\int_D G(t,s)\mathrm{d}s+\\&\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)\left(g(s,u(s))-\frac{L}{2}\right)\mathrm{d}s=\\&\frac{L}{2}q(t)-\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)(L-g(s,u(s)))\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{L}{2}q(t)-C\int_{[0,1]\setminus D}G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant 0,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{L}{2}q(t),t\in[0,1]$$

成立.

同理, 当 $\lambda$ 充分大时,

$$\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\geqslant \frac{L}{2}\int_0^1 G(s,\tau)\mathrm{d}\tau,s\in[0,1].$$

(B)的证明. 令 $(u,v)\leqslant\varphi=(C_\lambda p,\lambda\tilde{g}(C_\lambda\delta_1)q)$. 我们需要证明 $A(u,v)\leqslant\varphi$, 即

$$\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,v(s))\mathrm{d}s\leqslant C_\lambda p\tag{7}$$

和

$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant \lambda\tilde{g}(C_\lambda\delta_1)q\tag{8}$$

由$(H_2)$可得, 如果 $C_\lambda$ 充分大,有

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,v(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)\tilde{f}(\lambda\delta_2\tilde{g}(C_\lambda\delta_1))\mathrm{d}s=\\&\lambda\tilde{f}(\lambda\delta_2\tilde{g}(C_\lambda\delta_2))p\leqslant C_\lambda p,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)\tilde{g}(C_\lambda\delta_1)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\\&\lambda\tilde{g}(C_\lambda\delta_1)q.\end{aligned}$$

所以 $A:[\psi,\varphi]\to[\psi,\varphi]$, 假设成立. 从而由引理 2.1 可得, 当 $u\geqslant p_\lambda$ 且 $v\geqslant q_\lambda$ 时, 算子 $A$ 有一个不动点 $(u,v)$.

**注 2**　运用定理 1.1 的证明方法,我们可以得到, 当 $\lambda$ 充分大时

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=\lambda f(t,v(t),u(t)),t\in(0,1),\\-v''(t)=\lambda g(t,v(t),u(t)),t\in(0,1),\\u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0,\\v(0)=v(1)=0\end{cases}$$

有一个正解,其中 $f,g$ 满足下面两个条件

$(\mathrm{H}_1')$ $f,g:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 是连续函数,且存在 $L>0,K>0$,使得

$f(t,x,y)\geqslant L,g(t,x,y)\geqslant L,x\geqslant K,y\geqslant K$

关于 $t\in[0,1]$ 一致成立.

$(\mathrm{H}_2')$ $\forall M>0,N>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tilde{f}(x,M\tilde{g}(x,Nx))}{x}=0,$$

且当 $x$ 充分大时

$$\frac{\tilde{g}(x,M\tilde{g}(x,Nx))}{\tilde{g}(x,Nx)}\leqslant 1,$$

其中 $\tilde{h}(u,v)=\sup\limits_{t\in[0,1],x\leqslant u,y\leqslant v}h(t,x,y)$.

# 4 应 用

**例 4.1** 考虑方程

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=\lambda f(t,v(t)),t\in(0,1),\\-v''(t)=\lambda g(t,u(t)),t\in(0,1),\\u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1),\\v(0)=v(1),\end{cases}$$

其中 $f(t,v)=v^{\frac{1}{2}}-t,g(t,u)=u^{\frac{1}{2}}-t$. 显然当 $v\geqslant 4,u\geqslant 4$ 时, $f(t,v)\geqslant 1,g(t,u)\geqslant 1$ 关于 $t\in[0,1]$ 一致成立,且

$$\tilde{g}(Nx)=\sup_{t\in[0,1],x\leqslant Nx}g(t,x)=\sup_{t\in[0,1],x\leqslant Nx}(x^{\frac{1}{2}}-t)=(Nx)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{f}(M\tilde{g}(Nx))=\sup_{t\in[0,1],x\leqslant M(Nx)^{\frac{1}{2}}}((M(Nx)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}-t)=M^{\frac{1}{2}}(Nx)^{\frac{1}{4}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tilde{f}(M\tilde{g}(Nx))}{x}=0.$$

显然,$(\mathrm{H}_1)$,$(\mathrm{H}_2)$成立. 由定理1.1可得存在 $\lambda^*>0$,使得当 $\lambda\geqslant\lambda^*$ 时问题(1)存在一个充分大的正解 $(u,v)$.

**参考文献:**


[1] Fink A M, Gatica J A. Positive solutions of second order systems of boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1993, 180: 93.

[2] Ma R Y. Multiple nonnegative solutions of second-order systems of boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2000, 42: 1003.

[3] Hai D D, Shivaji R. Positive solutions for semi-positone systems in an annulus [J]. Rocky MT J Math, 1999, 29: 1285.

[4] Hai D D, Shivaji R. An existence result on positive solutions for a class of semi-linear elliptic systems [J]. Proc Soc Edinburgh Sect A, 2004, 134: 137.

[5] Xi L J, Li F Y. Multiple positive solutions to a boundary value problem for a singular fourth-order system (in Chinese) [J]. Acta Math Sci Ser A Chin Ed, 2004, 24: 435.

[6] Sun Y. Necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions of a coupled system for elastic beam equations [J]. J Math Anal Appl, 2009, 335: 77.

[7] Miyagaki O H, Rodrigues R S, Roderigues R S. On positive solution for a class of degenerate quasi-linear elliptic positone/semi-positone systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 70: 99.

[8] Zhu F L, Liu L S, Wu Y H. Positive solutions for a nonlinear fourth-order singular semi-positone boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 448.

[9] Lu H Y, Yu H M, Liu Y S. Positive solutions of singular boundary value problems of a coupled system of differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2005, 302: 14.

[10] Geng T M, Gao C H, Wang Y X. Positive solutions of three-point eigenvalue problem for nonlinear third-order difference equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2016, 53: 1215.

[11] Cheng X Y. Existence of positive solution of a class of second-order ordinary differential system [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 9: 70.

[12] An Y K. Nonlinear perturbations of a coupled system of steady state suspension bridge equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2002, 51: 1285.

[13] Lazer A C, Mckenna P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridge: some new connections with nonlinear analysis [J]. Slam Rev, 1990, 32: 537.

[14] Ma Q Z. Asymptotic behavior of the coupled beam equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2007, 44: 1178.

[15] Da J X, Han X L. Existence of positive solutions for nonlinear third-order ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2016, 53: 1177.

[16] Gao T, Han X L. Positive solutions of third-order m-point boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2015, 38: 648.