doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.001

奇异四阶三点边值问题正解的存在性

达举霞，韩晓玲
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了非线性四阶三点边值问题 $u^{(4)}(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)),t\in[0,1],u(0)=u'(\eta)=u''(1)=u'''(0)=0$ 正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 是正参数，$\eta\in[\frac{1}{2},1)$ 为常数. 利用锥上的不动点定理，本文获得了该问题的一个正解的存在性，并在关于非线性项 f 和 a 的假设条件下给出了问题存在正解的 λ 的取值范围. 值得注意的是这里的 $a(t)$ 是奇异函数.

关键词：三点奇异边值问题；四阶微分方程；正解；不动点定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0441-06

Positive solutions of singular fourth-order three-point boundary value problem

DA Ju-Xia, HAN Xiao-Ling
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we investigate existence of positive solutions for the following nonlinear singular fourth-order three-point boundary value problem: $u^{(4)}(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)),t\in[0,1],u(0)=u'(\eta)=u''(1)=u'''(0)=0$, where $\lambda>0$ is a positive parameter, $\eta\in[\frac{1}{2},1)$ is a constant. By using the fixed point theorem of cone expansion-compression type duo to Krasnoselskii and under some suitable assumptions of f and $a(t)$, we obtain the boundary of λ, in which the existence of positive solutions is guaranteed. Note that here we allow $a(t)$ has some suitable singularities.

Keywords: Three-point singular boundary value problem; Fourth-order differential equation; Positive solutions; Fixed point theorem
(2010 MSC 34B15, 34B18)

1　引　言

弹性梁是工程建筑的基本构件. 在弹性力学和工程物理中,四阶多点边值问题常被用于刻画弹性梁的平衡状态,因而备受关注[1-12]. 例如,2005 年，张和曾[1]运用 Krasnoselskii 不动点定理获得了四阶三点边值问题

$$u^{(4)}(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)),t\in[0,1],$$
$$u(0)=u'(0)=u''(\eta)=u'''(1)=0,$$
$$\frac{1}{3}<\eta<1$$

正解的存在性结果;2014 年，周，吴，韩[2]运用不动点理论获得了四阶三点边值问题

$$u^{(4)}(t)=g(t)f(u(t)),t\in[0,1],$$
$$u(0)=u'(0)=u''(\beta)=u''(1)=0$$

正解的存在性结果，这里 $\beta\in[\frac{1}{3},1]$ 为常数，$g\in([0,1],[0,+\infty))$; 2005 年,孙[3]运用锥上的不动

收稿日期：2016-09-26
基金项目：国家自然科学基金(11561063)
作者简介：达举霞(1990－)，女，甘肃兰州人，硕士研究生，要研究方向为常微分边值问题. E-mail：1414320179@qq.com
通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163.com

点定理获得了非线性奇异三阶三点边值问题

$$u'''(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)),0<t<1,$$
$$u(0)=u'(\eta)=u''(1)=0$$

正解的存在性，这里 λ 是正的参数，$\eta\in[\frac{1}{2},1)$ 是一个常数. 本文研究非线性奇异四阶三点边值问题

$$u^{(4)}(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)),t\in[0,1] \quad (1)$$
$$u(0)=u'(\eta)=u''(1)=u'''(0)=0 \quad (2)$$

正解的存在性,得到了存在正解时 λ 的取值范围，这里 $\lambda>0,\eta\in[\frac{1}{2},1]$,$a(t)$ 为定义在 $(0,1)$ 上的连续函数且在 $t=1$ 和 $t=0$ 处奇异，$f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)w$ 为连续函数. 本文所得结果是文献[3]中相应结果的直接推广.

2 预备知识

本文所用的主要工具定理如下：

定理 2.1 设 E 是一个 Banach 空间,并设 $K\subset E$ 是一个锥. 假定 Ω_1,Ω_2 是 E 的两个开子集,$0\in\overline{\Omega}_1,\overline{\Omega}_1\subset\overline{\Omega}_2$. 设 $T:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子,使得

(i) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$

或

(ii) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$,

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$上有不动点.

定义 2.2 设 E 是一个实的 Banach 空间. 一个非空闭凸集 $K\subset E$ 称为 E 上的一个锥，如果它满足下面两个条件：

(i) 若 $x\in K,\lambda>0$, 则 $\lambda X\in K$;

(ii) 若 $x\in K$, $-x\in K$, 则 $x=0$.

定义 2.3 如果一个算子是连续的并且映有界集到前紧集，则称它是全连续的.

考虑 Banach 空间 $C[0,1]$, 定义范数

$$\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|.$$

$C^+[0,1]=\{\|x\|\,|x(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\}$ 是非负函数 $C[0,1]$ 上的一个锥. 在证明主要结果之前，我们先给出一些预备结果.

引理 2.4 设 $y\in C[0,1]$. 则边值问题

$$u^{(4)}(t)=y(t),0<t<1 \quad (3)$$
$$u(0)=u'(\eta)=u''(1)=u'''(0)=0 \quad (4)$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

它的 Green 函数为：当 $s\geqslant\eta$ 时，

$$G(t,s)=\begin{cases}(t\eta-\frac{t^2}{2})(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ (t\eta-\frac{t^2}{2})(1-s)+\frac{(t-s)^3}{6},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}$$

当 $s\leqslant\eta$ 时，

$$G(t,s)=\begin{cases}(t\eta-\frac{t^2}{2})(1-s)-t\frac{(\eta-s)^2}{2},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ (t\eta-\frac{t^2}{2})(1-s)-t\frac{(\eta-s)^2}{2}+\frac{(t-s)^3}{6},\\ \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

简单计算可知 $0\leqslant G(t,s)\leqslant G(1,s),0\leqslant t,s\leqslant 1$.

引理 2.5 假设 $0<\theta<\frac{1}{2}$. 则任意 $y\in C^+[0,1]$, 边值问题(3)-(4) 的唯一解 $u(t)$ 非负且满足

$$\min_{t\in[\theta,1-\theta]}u(t)\geqslant\theta\|u\|.$$

证明 设 $y\in C^+[0,1]$ 及 $G(t,s)\geqslant 0$. 我们知道 $u(t)\in C^+[0,1]$. 由于

$$u^{(4)}(t)=y(t)\geqslant 0,t\in[0,1],$$

从而 $u''(t)$ 是一个递增函数. 再加上边界条件 $u''(1)=0$, 我们得到

$$u''(t)\leqslant 0,t\in[0,1].$$

因此 $u(t)$ 一个凸函数,也就是说,对任意 $t_1,t_2\in[0,1]$ 和 $\alpha\in[0,1]$,

$$u(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)\geqslant\alpha u(t_1)+(1-\alpha)u(t_2).$$

由 $u'(\eta)=0$ 可知 $\|u\|=u(\eta)$. 因此

$$u(t)\geqslant\|u\|\min\left\{\frac{t}{\eta},\frac{1-t}{1-\eta}\geqslant\|u\|\min\{t,1-t\},t\in[0,1]\right\}.$$

进一步，

$$\min_{t\in[\theta,1-\theta]}u(t)\geqslant\|u\|\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\{t,1-t\}\geqslant\theta\|u\|.$$

定义锥

$$K=\{u\in C^+[0,1]:\min_{t\in[\theta,1-\theta]}u(t)\geqslant\theta\|u\|\}$$

及积分算子 $T_\lambda:K\to C^+[0,1]$,

$$T_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \quad (5)$$

由引理 2.4 知边值问题 (1)-(2) 有一个正解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是 T_λ 的不动点. 证毕.

我们给出下列假设条件：

(H_1) $a\in C((0,1),(0,+\infty))$ 和 $0<\int_0^1 G(1,$

$s)a(s)\mathrm{d}s < \infty$；

(H_2) $f \in C([0,1]\times[0,+\infty),(0,+\infty))$.

引理 2.6　假设(H_1),(H_2)成立. 则 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续的.

证明　由引理 2.5,我们知道 $T_\lambda(K)\subset K$. 对 $n\geqslant 2$，定义

$$a_n=\begin{cases}\inf\{a(t),a(\frac{1}{n})\}, & 0<t<\frac{1}{n},\\ a(t), & \frac{1}{n}<t<1-\frac{1}{n},\\ \inf\{a(t),a(1-\frac{1}{n})\}, & 1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

并定义 $T_n:K\to K$，

$$T_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a_n(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s.$$

由 Ascoli-Arzela 定理[8]，当 $n\geqslant 2$ 时,因为 $G(t,s)a_n(s)$在$[0.1]\times[0,1]$是连续的，因而 T_n 在K 上是紧的. 记 $B_Q=\{u\in K:\|u\|\leqslant Q\}$. 当 $n\to\infty$时，T_n 一致收敛到 T_λ.事实上，对任意 $t\in[0,1]$，固定 $Q>0u\in B_Q$，我们有

$$\begin{aligned}&|T_nu(t)-Tu(t)|=\\ &|\int_0^1[a(s)-a_n(s)]G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s|\leqslant\\ &\int_0^{\frac{1}{n}}|a(s)-a_n(s)|G(1,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\\ &\int_{1-\frac{1}{n}}^1|a(s)-a_n(s)|G(1,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\to 0,\\ &\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

再由假设(H_1)，(H_2),当 $t,s\in[0,1]$时，$G(t,s)\leqslant G(1,s)$. 因此当 $n\to\infty$ 时，T_n 一致收敛到 T_λ，并且 T_λ 是全连续的. 证毕.

为了叙述方便，我们给出下列记号：

$$A=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)\mathrm{d}s,$$

$$B=\max_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s,$$

这里我们选取 $\theta\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $t_0\in(\theta,1-\theta)$，因此 $A\geqslant B>0$. 同时我们定义

$$f_0=\lim_{x\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$f_\infty=\lim_{x\to\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$f^0=\lim_{x\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}$$

$$f^\infty=\lim_{x\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$f^0=\liminf_{x\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$\overline{f}^\infty=\liminf_{x\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}$$

$$\overline{f}_0=\limsup_{x\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$\overline{f}_\infty=\limsup_{x\to\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}.$$

3　正解存在性

定理 3.1　假设(H_1),(H_2) 成立,并设存在两个正常数 $r\neq R$，使得

(A_1) $f(t,x)\leqslant\dfrac{r}{\lambda A}$,$(t,x)\in[0,1]\times[0,r]$,

(A_2) $f(t,x)\geqslant\dfrac{R}{\lambda B}$,$(t,x)\in[0,1]\times[\theta R,\theta]$,

则边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解 $u^*\in K$，并且 $\min\{r,R\}\leqslant\|u^*\|\leqslant\max\{r,R\}$.

证明　我们仅仅考虑情形 $r<R$，情形 $r>R$ 是的证明类似的.

设

$\Omega_1=\{u\in[0,1]:\|u\|<r\}$，

$\Omega_2=\{u\in[0,1]:\|u\|<R\}$.

由假设(A_1),对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，

$$\begin{aligned}&\|T_\lambda u\|=\\ &\max_{t\in[]0,1}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant\\ &\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)\frac{r}{\lambda A}\mathrm{d}s=r=\|u\|,\end{aligned}$$

因此

$$\|T_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1\tag{6}$$

另一方面,对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_2\theta,R\leqslant|u(s)|\leqslant R,\theta\leqslant s\leqslant 1-\theta$. 再由假设$(\mathrm{A}_2)$有

$$\begin{aligned}&\|T_\lambda u\|\geqslant\\ &\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\geqslant\\ &\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)a(s)f(s,u)(s)\mathrm{d}s\geqslant\\ &\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)a(s)\frac{r}{\lambda B}\mathrm{d}s=R=\|u\|,\end{aligned}$$

因此

$$\|T_\lambda u\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2\tag{7}$$

由式 (6) 和式 (7),定理 2.1(i)成立，T_λ 有一个不动点 $u^*\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 则 u^* 是边值问题(1)-(2)的一个正解. 证毕.

定理 3.2　假设(H_1)-(H_2) 成立，并设

(A_3) $f^0=0,f_\infty=\infty$,

或

(A_4) $f_0 = \infty, f^\infty = 0$.

则对任意的 $\lambda \in (0,\infty)$，边值问题(1)-(2)至少有一个正解.

证明 首先我们考虑第一种情形. 当(A_3)成立时,对任意$\lambda \in (0,\infty)$，由于 $f^0 = 0$，则对 $\frac{r}{\lambda A} > 0$，存在 $R_1 > 0$，使得 $\frac{f(t,x)}{x} \leqslant \frac{1}{\lambda A}$，此时 $(t,x) \in [0,1]\times[0,R_1]$. 从而

$$f(t,x) \leqslant \frac{x}{\lambda A} \leqslant \frac{R_1}{\lambda A}, \quad (t,x) \in [0,1]\times[0,R_1].$$

另一方面，由于 $f_\infty = \infty$，对 $\frac{1}{\lambda\theta B} > 0$，存在 $R_2 > R_1$，使得

$$\frac{f(t,x)}{x} > \frac{1}{\lambda\theta B} (t,x) \in [0,1]\times[\theta R_2,\infty).$$

这意味着

$$f(t,x) > \frac{x}{\lambda\theta B} > \frac{\theta R_2}{\lambda\theta B} = \frac{R_2}{\lambda B}, \quad (t,x) \in [0,1]\times[\theta R_2,\infty).$$

因此,由定理 3.1，T_λ 有一个不动点 $u^* \in K$.

其次,设(A_4)成立. 由 $f_0 = \infty$，对 $\frac{1}{\lambda\theta B} > 0$，存在 $R_1 > 0$，使得

$$f(t,x) \geqslant \frac{x}{\lambda\theta B}, (t,x) \in [0,1]\times[0,R_1] \tag{8}$$

及 $\Omega_1 = \{u \in C[0,1]: \|u\| < R_1\}$，且当 $u \in K \cap \Omega_1$ 时，$\max\limits_{t\in[\theta,1-\theta]} u(s) \geqslant \theta\|u\| = \theta R_1$. 于是由式(5)和式(8)可得

$$\|T_\lambda u\| = \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \geqslant \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \geqslant \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)\frac{1}{\lambda\theta B}u(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{\theta B}\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)\theta\|u(s)\|\mathrm{d}s = \|u\| \tag{9}$$

这意味着

$$\|T_\lambda u\| \geqslant \|u\|, u\in K\cap\partial\Omega \tag{10}$$

再次,由 $f^\infty = 0$，对 $\frac{1}{\lambda A} > 0$，存在 $R_0 > 0$，使得

$$f(t,x) \leqslant \frac{x}{\lambda A}, (t,x) \in [0,1]\times[R_0,\infty) \tag{11}$$

下面我们分 f 有界和 f 无界两种情形讨论.

情形(i)，f 有界. 设 $f \leqslant M$. 设 $R_2 = \max\{2R_1, \lambda MA\}$. 若 $u \in K$ 且 $\|u\| = R_2$，则有

$$\|T_\lambda u\| = \max_{t\in[0,1]} T_\lambda u(t) = \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)M\mathrm{d}s \leqslant \lambda MA \leqslant R_2 = \|u\|.$$

从而

$$\|T_\lambda u\| \leqslant \|u\|.$$

如果设 $\Omega_2 = \{u\in K: \|u\| \leqslant R_2\}$. 则

$$\|T_\lambda u\| \leqslant \|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{12}$$

情形(ii)，f 无界. 设 $R_2 > \max\{2R_1, R_0\}$，使得

$$f(t,x) \leqslant f(t,R_2), (t,x) \in [0,1]\times[0,R_2].$$

则 $u \in K$ 并且 $\|u\| = R_2$. 由式(5)和式(11)有

$$\|T_\lambda u\| = \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)\frac{R_2}{\lambda A}u(s)\mathrm{d}s \leqslant R_2 = \|u\|.$$

设 $\Omega_2 = \{u\in K: \|u\| \leqslant R_2\}$. 则

$$\|T_\lambda u\| \leqslant \|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{13}$$

由式(10)和式(12)可得定理 2.1(ii)成立,并且 T_λ 有一个不动点 $u^* \in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 同样,由式(10)和式(13)，定理 2.1(ii)成立并且 T_λ 有一个不动点 $u^* \in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 因此 u^* 是边值问题(1)-(2)的一个正解. 证毕.

定理 3.3 假设(H_1)，(H_2)成立,并设 $0 < Af^0 < \theta Bf_\infty < \infty$. 则对每一个 $\lambda \in (\frac{1}{\theta Bf_\infty}, \frac{1}{Af^0})$，边值问题(1)-(2)至少有一个正解.

证明 为了应用定理 2.1，我们构造集合 Ω_1，Ω_2. 设 $\lambda \in (\frac{1}{\theta Bf_\infty}, \frac{1}{Af^0})$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\frac{1}{\theta B(f_\infty - \varepsilon)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{A(f^0 + \varepsilon)}.$$

由 f^0 的定义，存在 $R_1 > 0$，使得

$$f(t,x) \leqslant$$

$(f^0+\varepsilon)x,(t,x)\in[0,1]\times[0.R_1]$.

设 $u\in K$ 并且 $\|u\|=R_1$. 则

$$\|T_\lambda u\|=\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)(f^0+\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)(f^0+\varepsilon)\|u\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)(f^0+\varepsilon)R_1\mathrm{d}s=$$
$$\lambda A(f^0+\varepsilon)\|u\|\leqslant\|u\|.$$

设 $\Omega_1=\{u\in K,\|u\|\leqslant R_1\}$. 则

$$\|T_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1 \tag{14}$$

由 f_∞ 的定义，存在 $\overline{R}_2$ 使得

$$f(t,x)\geqslant(f^0-\varepsilon)x,(t,x)\in[0,1]\times[R_2,\infty).$$

设 $R_2=\max\{2R_1,\theta^{-1}\overline{R}_2\}$, $\Omega_2=\{u\in K:\|u\|\leqslant R_2\}$. 又设 $u\in K$ 并且 $\|u\|=R_2$. 则

$$\min_{s\in[\theta,1-\theta]}u(s)\geqslant\theta\|u\|\overline{R}_2.$$

因此

$$\|T_\lambda u\|=\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)(f_\infty-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)(f_\infty-\varepsilon)\theta\|u\|\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\theta\max_{t\in[0,1]}\int_\theta^{1-\theta} G(t,s)a(s)(f_\infty-\varepsilon)\theta R_2\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\theta B(f_\infty-\varepsilon)\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{15}$$

由式 (14)和式 (15)，定理 2.1(i)成立，并且 T_λ 有一个不动点 $u^*\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 则 u^* 是边值问题(1)-(2)的一个正解. 证毕.

定理 3.4　假设(H_1),(H_2)成立,并设 $0<Af^\infty<\theta Bf_0<\infty$. 对每一个 $\lambda\in(\frac{1}{\theta Bf_\infty},\frac{1}{Af^\infty})$, 边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解.

证明　为了应用定理 2.1，我们构造集合 Ω_1, Ω_2. 设 $\lambda\in(\frac{1}{\theta Bf_0},\frac{1}{Af^\infty})$. 取 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{1}{\theta B\ (f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{A(f^\infty+\varepsilon)}.$$

由 f_0 的定义,存在 $R_1>0$，使得

$$f(t,x)\leqslant(f_0+\varepsilon)x,(t,x)\in[0,1]\times[0.R_1].$$

设 $u\in K$ 且 $\|u\|=R_1$. 则 $\min\limits_{s\in[\theta,1-\theta]}u(s)=\theta\|u\|=\theta R_1$. 因此

$$\|T_\lambda u\|=$$
$$\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\theta B(f_0-\varepsilon)\|u\|=\|u\|.$$

设 $\Omega_1=\{u\in K:\|u\|\leqslant R_1\}$. 则

$$\|T_\lambda u\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1 \tag{16}$$

由 f^∞ 的定义,存在 $\overline{R}_2$ 使得

$$f(t,x)\leqslant(f^\infty+\varepsilon)x,(t,x)\in[0,1]\times[\overline{R}_2,\infty].$$

下面我们分 f 有界和 f 无界两种情形讨论.

情形(i)，f 是有界的，$f\leqslant M$. 设 $R_2=\max\{2R_1,\lambda MA\}$. 若 $u\in K$ 且 $\|u\|=R_2$，则

$$\|T_\lambda u\|=$$
$$\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)M\mathrm{d}s=$$
$$\lambda MA\leqslant R_2=\|u\|.$$

从而 $\|T_\lambda u\|\leqslant\|u\|$. 如果设

$$\Omega_2=\{u\in K:\|u\|\leqslant R_2\},$$

则

$$\|T_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{17}$$

情形(ii)，f 是无界的. 设 $R_2>\max\{2R_1\ \overline{R}_2\}$，使得

$$f(t,x)\leqslant f(t,R_2),(t,x)\in[0,1]\times[0,R_2].$$

对 $u\in K$ 且 $\|u\|=R_2$，有

$$\|T_\lambda u\|=$$
$$\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u)(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda A(f^\infty+\varepsilon)\|u\|\leqslant\|u\|.$$

设 $\Omega_2=\{u\in K:\|u\|\leqslant R_2\}$. 则

$$\|T_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{18}$$

由式(16)和式(17)可知，定理 2.1(ii)成立，T_λ 有一个不动点 $u^*\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 同样，由式(16)和式(18)可知定理 2.1(ii)成立，T_λ 有一个不动点 $u^*\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$. 因此 u^* 是特征值问题(1)-(2)的一个正解. 定理证毕.

下面定理的证明是类似的.

定理 3.5 假设(H_1),(H_2)成立. 则

(i) 若 $f_\infty=\infty, 0<f^0<\infty$, 则对每一个 $\lambda \in (0, \frac{1}{Af^0})$, 边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解;

(ii) 若 $f_0=\infty, 0<f^\infty<\infty$, 则对每一个 $\lambda \in (0, \frac{1}{Af^\infty})$, 边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解;

(iii) 若 $f_0=\infty, 0<f^\infty<\infty$, 则对每一个 $\lambda \in (\frac{1}{\theta Bf^\infty}, \infty)$, 边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解;

(iv) 若 $f_\infty=\infty, 0<f^0<\infty$, 则对每一个 $\lambda \in (\frac{1}{\theta Bf^0}, \infty)$, 边值问题 (1)-(2) 至少有一个正解.

参考文献:

[1] Zhang Y H, Zeng Y D. The existence of positive solution for a fourth three-point boundary value problem [J]. J Fuzhou Univ: Nat Sci Ed, 2006, 33: 325.

[2] Zhou S L, Wu H P, Han X L. Existence of positive solutions of the fourth-order three-point boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2014, 51: 11.

[3] Sun Y. Positive solutions of singular fourth-order three-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2005, 36: 589.

[4] Sun J P, Zhao J. Iterative technique for a third-order three-point BVP with sign-changing Green´s function [J]. J Math Anal Appl, 2003, 215: 1.

[5] Da J X, Han X L. Existence of positive solutions for a nonlinear third-order ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2016, 6: 1177.

[6] Palamides A P, Veloni A N. A singular third-order 3-point boundary-value problem with non-positive Green's function [J]. Electron J Differ Eq, 2007, 151: 1.

[7] Alex P. Palamides, George Smyrlis. Positive solutions to a singular third-order three-point boundary value problem with an indefinitely signed Green´s function [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68: 2014.

[8] Sun Y, Zhu C. Existence of positive solutions for singular fourth-order three-point boundary value problems [J]. Adv Differ Equ-NY, 2013, 51: 1.

[9] Zhou Y L, Zhang X M. Triple positive solutions of fourth-order impulsive differential equations with integral boundary conditions [J]. Bound Value Probl, 2015, 2: 1.

[10] Wang H Y. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. J Math Anal Appl, 1997, 208: 252.

[11] Anderson D, Davis J M. Multiple solutions and eigenvalues for third-order right focal boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2002, 267: 135.

[12] Li Y X. Existence of positive solutions for the cantilever beam equations with fully nonlinear terms [J]. Nonlinear Anal-Real, 2016, 27: 221.