doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.002

弹性问题的线性常数元稳定化方法

刘书琳[1]，胡 戎[2]

(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 川庆地质勘探开发研究院，成都 610051)

摘 要：当运用混合有限元法求解弹性问题时，LBB 条件的限制使得工程应用中常用的线性/常数元无法应用. 为了克服这一困难，本文将 Bochev-Dohrmann-Gunzburger 稳定性方法应用于弹性问题，通过增加新的投影稳定项和相容稳定项，提出了一种稳定化混合有限元方法. 该方法的优点在于不依赖空间维数和单元形状，也不需要计算高阶导数或边界跳跃量.

关键词：弹性问题；弱 inf-sup 条件；稳定化

中图分类号：O241.82 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)03-0447-05

Stabilized linear-constant finite element method for elasticity problem

LIU Shu-Lin[1]，*HU Rong*[2]

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Geological Exploration & Development Research Institute of Chuanqing Drilling Engineering Company Limited, CNPC, Chengdu 610051, China)

Abstract：The extensively used linear / constant element cannot be applied in solving elasticity problem because it dissatisfy the LBB condition. In this paper, we derive a stabilization scheme for elasticity problem based on the Bochev-Dohrmann-Gunzburger method by adding a consistent term and projection-type stabilization term, which can effectively bypass the inf-sup condition. The advantage a of our method lies in that it does not depend on the space dimension and require calculation of higher order derivatives or edge-based data structures.

Keywords：Elasticity problem; Weak inf-sup condition; Stabilization
(2010 MSC 65M12, 65M60)

1 引 言

平面弹性问题研究弹性体在力作用下的应变和应力是弹性力学中的一个重要内容. 在用混合元法求解平面弹性力学问题时主要有两大困难：(1) 为了保证平面弹性力学问题有唯一解，应力-位移有限元空间的选取必须满足 LBB 条件；(2) 弹性方程中的应力张量需要对称条件.

2002 年，Arnold 和 Winther[1] 提出了一个保证 LBB 的充分条件，然后在三角形网格上构造一系列稳定的混合有限元(MFE). 基于同样的想法，一些学者提出了协调和非协调混合有限元方法[2,3]. 但是，以上构造的这些有限元空间都具有过多的自由度.

另一方面，尽管不满足 LBB 的稳定条件，等阶和低阶有限元空间因为实现起来简单方便在工程计算实践中也非常流行. 为了克服其缺乏的稳定性，通常运用 Galerkin 稳定化方法对其补充，例如 Galerkin 最小二乘法[4]，bubble 函数法[5]，投影稳定化方法[6,7]等.

收稿日期：2016-12-08
基金项目：国家自然科学基金 11271273
作者简介：刘书琳(1992－)，女，湖南岳阳人，硕士，主要研究方向为计算数学. E-mail：shulin_liu@foxmail.com

近来,Shi 等人[8,9]分别将基于优化的 Verfürth 引理的最优稳定化方法和 Brezzi-Pitkäranta 方法用于弹性问题.以上两种方法的好处在于可以从弱 inf-sup 条件获得稳定项,但均只对 C_0 连续的低阶线性或双线性有限元空间成立,对于分片线性/常数元则不成立.此外,Bochev 等[10]针对 Stokes 问题引入一种抽象算子,提出了基于多项式压力投影的低阶元稳定化方法,即 Bochev-Dohrmann-Gunzburger 稳定性方法.本文将文献[10]中方法应用于弹性问题,通过增加相容稳定项和引入 Clement-like 算子的投影稳定化技巧,提出了一种新的投影稳定化方法,证明其稳定性,并给出了误差估计.

2 变分形式与离散格式

设 Ω 是二维多边形区域,S 为对称张量空间,$H^m(\Omega)$为 Soblev 空间标准记号,$\|\cdot\|_m$ 为相应的标准范数.当 $m=0$ 时,我们用 $L^2(\Omega)$表示 $H^0(\Omega)$. $H_0^m(\Omega)$为在 $C_0^\infty(\Omega)$范数意义下的闭包.设$(H^m(\Omega))^2$ 为向量值函数集合,其分量均属于 $H^m(\Omega)$. $H^m(\Omega,\mathrm{S})$中的元素均为对称张量并且其四个分量均属于 $H^m(\Omega)$. $H(\mathrm{div},\Omega,\mathrm{S})$为散度和自身均平方可积的对称张量空间,相应的范数定义为:

$$\|\tau\|_{H(\mathrm{div})} = \sqrt{\|\tau\|_0 + \|\mathrm{div}\tau\|_0}.$$

记

$$\tau:\sigma = \sum\nolimits_{i,j=1}^{2}\tau_{ij}\sigma_{ij},$$

$$(\tau,\sigma) = \int_\Omega \tau:\sigma, \varepsilon(\nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\nu + (\mathrm{grad}\nu)^{\mathrm{T}}).$$

则弹性问题方程为

$$\begin{cases} A\sigma = \varepsilon(\nu),\ \mathrm{in}\ \Omega, \\ -\mathrm{div}\sigma = f,\ \mathrm{in}\ \Omega, \\ \quad u = 0,\ \mathrm{on}\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中为对一致正定对称有界柔性张量.定义

$$M = H(\mathrm{div},\Omega,\mathrm{S}), V = (L^2(\Omega))^2.$$

弹性问题混合有限元方法为:给定 f,求 $(\sigma,u)\in M\times V$ 满足

$$\begin{cases} \int_\Omega A\sigma:\tau + \int_\Omega u\cdot\mathrm{div}\tau = 0, & \forall\,\tau\in M, \\ \int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\sigma = -\int_\Omega f\cdot v, & \forall\, v\in V \end{cases} \tag{2}$$

令

$$a(\sigma,\tau) = \int_\Omega A\sigma:\tau + \int_\Omega u\cdot\mathrm{div}\tau,$$

$$b(\sigma,v) = \int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\sigma,$$

$$F(v) = \int_\Omega f\cdot v.$$

则由文献[11]可知,问题(1)有唯一解.

我们将问题重新写为以下形式:给定 f,求 $(\sigma,u)\in M\times V$ 满足

$$B((\sigma,u),(\tau,\nu)) = F(v) \tag{3}$$

其中

$$B((\sigma,u),(\tau,\nu)) = \int_\Omega A\sigma:\tau + \int_\Omega u\cdot\mathrm{div}\tau - \int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\sigma.$$

考虑用混合有限元方法求解问题,即求$(\sigma_h,u_h)\in M_h\times V_h$ 满足

$$B((\sigma_h,u_h),(\tau_h,\nu_h)) = F(v_h)$$
$$\forall\,(\tau_h,\nu_h)\in M_h\times V_h, M_h\subset M, V_h\subset V \tag{4}$$

设 T_h 为 Ω 的正则剖分.对于任意的 $T\in T_h$,T 为三角形或者矩形单元.令 h_T 为单元 T 的长度,$h=\max_{T\in T_h} h_T$. $\|\cdot\|_m$ 和$(\cdot,\cdot)_T$ 分别为单元上的范数与内积. $R_l(T)$表示三角形或者矩形单元 T 上不高于 l 次的单项式或多项式空间.设 T_h 为剖分 T_h 的边界的集合,定义

$$\|V\|_{T_h} = \sum_{\gamma_h\in T_h}(\int_{\gamma_h} v^2\mathrm{d}s)^{1/2}.$$

由有限元逼近结果知:$\forall\, u\in H^2(\Omega)$,$\exists\, u_h\in R_1$ 满足

$$\|u-u_h\|_0 + h^{\frac{1}{2}}\|u-u_h\|_{\Gamma_h} + \|u-u_h\|_1 \leqslant Ch^2\|u\|_2 \tag{5}$$

由逆不等式有

$$\|\nabla u_h\|_0 \leqslant Ch^{-1}\|u_h\|_0,\quad \forall\, u_h\in R_1 \tag{6}$$

$$\|[u_h]\|_{\Gamma_h} \leqslant Ch^{-\frac{1}{2}}\|u_h\|_0, \forall\, u_h\in R_0 \tag{7}$$

其中 C 均为正常数,$[u_h]$表示 u_h 在边界上的跳跃值.

在下文中,如果没有特殊说明,C 均表示只与有关的正常数.

定义 2.1 (Clement-like 插值)[10] 设 $\Pi:R_0\subset L^2(\Omega)\to R_1\cap H_0^1(\Omega)$ 如下:对于剖分中的任意内部节点,设 Δ_i 是以为顶点的所有单元的集合,n_T 为单元内部节点的个数,$N_i(x)$为 R_1 节点基,N_{nodes} 为剖分的节点个数,$V_i(T)=V_i(T)/n_T$.给定 $u_h\in R_0$,令

$$u_i = \frac{\sum_{T\in\Delta_i} V_i(T)u_h}{\sum_{T\in\Delta_i} V_i(T)} = \sum_{T\in\Delta_i} d_{iT}u_h,$$

从而 $\Pi u_h = \sum_{i=1}^{N_{nodes}} u_i N_i(x) \in R_1$.

由文献[11],插值算子 Π 满足以下性质:

$$\|\Pi u_h\|_0 \leqslant C\|u_h\|_0 \quad \forall\, u_h\in R_0 \tag{8}$$

注 1　由定义可知，此算子不涉及梯度或跳跃，也不依赖于空间维数或单元形状. 这使得新的稳定化混合方法具有更好的计算性能.

3　弱 inf-sup 条件

接下来我们构造线性/常数有限元空间：

$$\begin{cases} M_h = \{\tau \in M \cap H^1(\Omega, S) \mid \tau|_T \in (R_1(T))^{2\times 2}\} \\ V_h = \{\nu \in V \cap (L^2(\Omega))^2 \mid v|_T \in (R_0(T))^2\} \end{cases} \tag{9}$$

众所周知，上述定义的有限元空间不满足 LBB 条件. 为了克服这一困难，我们首先通过一些引理推导出弱 inf-sup 条件.

引理 3.1　设 M_h 和 V_h 为如(9)式定义的有限元空间，则存在常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$ 满足：

$$\sup_{\tau \in M_h} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_h}{\|\tau\|_{H(\operatorname{div})}} \geqslant C_1 \|v_h\|_0 - C_2 h^{\frac{1}{2}} \|[v_h]\|_{\Gamma_h}, \ \forall \nu_h \in V_h \tag{10}$$

证明　由文献[11]可知，$\forall v_h \in V_h \subset (L^2(\Omega))^2$，存在 $\tau_0 \in H^1(\Omega, S)$ 满足

$$\begin{cases} \operatorname{div}\tau_0 = v_h, \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \|\tau_0\|_1 \leqslant C_3 \|v_h\|_0 \end{cases} \tag{11}$$

则

$$\sup_{\tau \in H^1(\Omega, S)} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau}{\|\tau\|_1} \geqslant \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_0}{\|\tau_0\|_1} \geqslant \beta_1 \|v_h\|_0.$$

设 $\pi_h\tau_0$ 为 τ_0 在 M_h 中的 Clement 插值. 则 $\|\pi_h\tau_0\|_1 \leqslant C_4 \|\tau_0\|_1$ 且

$$\|\tau_0 - \pi_h\tau_0\|_0 + h^{\frac{1}{2}} \|\tau_0 - \pi_h\tau_0\|_{\Gamma_h} \leqslant C_5 h \|\tau_0\|_1 \tag{12}$$

从而

$$\sup_{\tau \in M_h} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_h}{\|\tau_h\|_{H(\operatorname{div})}} \geqslant \frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0)\right|}{C_6 \|\pi_h\tau_0\|_1} \geqslant \frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0)\right|}{C_6 \|\tau_0\|_1} \geqslant$$

$$\frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_0 + \int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0 - \tau_0)\right|}{C_6 \|\tau_0\|_1} \geqslant \frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_0\right|}{C_6 \|\tau_0\|_1} - \frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0 - \tau_0)\right|}{C_6 \|\tau_0\|_1} \geqslant$$

$$C_7 \|v_h\|_1 - \frac{\left|\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0 - \tau_0)\right|}{C_6 \|\tau_0\|_1}.$$

又 $v_h|_T \in R_0(T)$，则由 Green 公式及(12)式得

$$\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0 - \tau_0) = \sum_T \int_T v_h \cdot \operatorname{div}(\pi_h\tau_0 - \tau_0) \mathrm{d}T = \sum_T \int_{\partial T} (\pi_h\tau_0 - \tau_0) \cdot v_h \cdot n \mathrm{d}s =$$

$$\sum_{\gamma_h \in \Gamma_h} \int_{\gamma_h} (\pi_h\tau_0 - \tau_0) \cdot [v_h] \cdot n \mathrm{d}s \leqslant \left(\sum_{\gamma_h \in \Gamma_h} \int_{\gamma_h} [v_h]^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\gamma_h \in \Gamma_h} \int_{\gamma_h} (\pi_h\tau_0 - \tau_0)^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\|[v_h]\|_{\Gamma_h} \|\pi_h\tau_0 - \tau_0\|_{\Gamma_h} \leqslant C h^{\frac{1}{2}} \|[v_h]\|_{\Gamma_h} \|\tau_0\|_1.$$

所以

$$\sup_{\tau \in M_h} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_h}{\|\tau\|_{H(\operatorname{div})}} \geqslant C_1 \|v_h\|_0 - C_2 h^{\frac{1}{2}} \|[v_h]\|_{\Gamma_h}.$$

证毕.

引理 3.2　设 M_h 和 V_h 为如(9)式定义的有限元空间，算子 Π 如定义 2.1，则存在 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 满足

$$\sup_{\tau \in M_h} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \operatorname{div}\tau_h}{\|\tau_h\|_{H(\operatorname{div})}} \geqslant k_1 \|v_h\|_0 - k_2 \|v_h - \Pi v_h\|_0, \forall \nu_h \in V_h \tag{13}$$

证明　由引理 3.1，只需证明

$$h^{\frac{1}{2}} \|[v_h]\|_{\Gamma_h} \leqslant \|v_h - \Pi v_h\|_0, \forall v_h \in R_0^2.$$

因为 $\Pi v_h \subset (H_0^1(\Omega))^2 \subset (C^0(\Omega))^2$，所以 $[\Pi v_h|_{\gamma_h}] = 0$. 再根据逆不等式(7)得

$$h \|[v_h]\|_{\Gamma_h}^2 = \sum_{\gamma_h} h \|[v_h]\|_{0,\gamma_h}^2 = \sum_{\gamma_h} h \|[v_h - \Pi v_h]\|_{0,\gamma_h}^2 = h \|[v_h - \Pi v_h]\|_{\Gamma_h}^2 \leqslant C \|v_h - \Pi v_h\|_0^2.$$

我们称(13)式为弱 inf-sup 条件，它将在下面的稳定化策略中发挥重要作用.

4　稳定化策略及其稳定性

在 $V_h \times V_h$ 中定义

$$G(u_h, v_h) = \int_\Omega (u_h - \Pi u_h) \cdot (v_h - \Pi v_h)$$

并考虑如下的变分问题：对于 $\gamma > 0$，求 $(\sigma_h, u_h) \in M_h \times V_h$ 满足：$\forall (\tau_h, \nu_h) \in M_h \times V_h$，

$$B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) = F_h((\tau_h, v_h)) \tag{14}$$

其中，对于 $(\sigma, u), (\tau, \nu) \in M \times V$，

$$B_h((\sigma,u),(\tau,\nu))=$$
$$B((\sigma,u),(\tau,\nu))+(\mathrm{div}\sigma,\mathrm{div}\tau)+$$
$$\gamma G(u,v) \tag{15}$$
$$F_h((\tau,\nu))=F(v)-(f,\mathrm{div}\tau) \tag{16}$$

在 $M\times V$ 上定义范数

$$|||(\tau,\nu)|||^2=\|\tau\|^2_{H(\mathrm{div})}+\|v\|^2_0.$$

容易得到

$$|B_h((\sigma,u),(\tau,\nu))|\leqslant$$
$$c_1|||(\sigma,u)|||\cdot|||(\tau,\nu)||| \tag{17}$$
$$F_h((\tau,\nu))\leqslant c_2|||(\tau,\nu)||| \tag{18}$$

定理 4.1 $\forall(\sigma_h,u_h)\in M_h\times V_h$,存在 $C>0$ 满足

$$\sup_{(\tau_h,v_h)\in M_h\times V_h}\frac{B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h,v_h))}{|||(\tau_h,v_h)|||}\geqslant$$
$$C|||(\sigma_h,u_h)||| \tag{19}$$

证明 任意给定 $(\sigma_h,u_h)\in M_h\times V_h$,可构造 (τ_h,v_h)满足

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h,v_h))\geqslant$$
$$C|||(\sigma_h,u_h)|||\cdot|||(\tau_h,v_h)|||.$$

事实上,由于 $A=A(x,y):S\to S$ 为对 Ω 一致正定对称有界的,所以存在正常数 α_1,α_2,满足

$$\int_\Omega A\tau:\tau\geqslant\alpha_1\|\tau\|_0,\forall\tau\in M,$$
$$\int_\Omega A\sigma:\tau\leqslant\alpha_2\|\tau\|_0\|\sigma\|_0,\forall\sigma,\tau\in M.$$

取 $(\tau_h^1,v_h^1)=(\sigma_h,u_h)$. 则

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h^1,v_h^1))=$$
$$\int_\Omega A\sigma_h:\sigma_h+\|\mathrm{div}\sigma_h\|_0^2+\gamma G(u_h,u_h)\geqslant$$
$$\alpha_3\|\sigma_h\|^2_{H(\mathrm{div})}+\gamma\|u_h-\Pi u_h\|_0^2 \tag{20}$$

其中 $\alpha_3=\min\{1,\alpha_1\}$. 对于 $u_h\in V_h$,由引理 3.2 知,存在 $\rho_h=M_h$,满足

$$\int_\Omega u_h\cdot\mathrm{div}\rho_h\geqslant\|\rho_h\|_{H(\mathrm{div})}(k_1\|u_h\|_0-$$
$$k_2\|u_h-\Pi u_h\|_0).$$

特别地,可以取

$$\|\rho_h\|_{H(\mathrm{div})}=\|u_h\|_0.$$

令 $(\tau_h^2,v_h^2)=(\rho_h,0)$. 则对于任意 $l_1>0,l_2>0$,有

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h^2,v_h^2))=$$
$$\int_\Omega A\sigma_h:\rho_h+\int_\Omega u_h\cdot\mathrm{div}\rho_h+$$
$$\int_\Omega\mathrm{div}\sigma_h\cdot\mathrm{div}\rho_h\geqslant$$
$$\alpha_2\|\sigma_h\|_{H(\mathrm{div})}\cdot\|u_h\|_0+k_1\|u_h\|_0^2-$$
$$k_2\|u_h\|_0\cdot\|u_h-\Pi u_h\|_0-\|u_h\|_0\cdot$$
$$\|\sigma_h\|_{H(\mathrm{div})}\geqslant$$
$$-\frac{(\alpha_2+1)l_1}{2}\|\sigma_h\|_{H(\mathrm{div})}+$$
$$\left(k_1-\frac{(\alpha_2+1)}{2l_1}-\frac{k_2l_2}{2}\right)\|u_h\|_0^2-$$
$$\frac{k_2}{2l_2}\|u_h-\Pi u_h\|_0^2.$$

取 $l_1=\frac{2(\alpha_2+1)}{k_1},l_2=\frac{k_1}{2k_2}$. 则

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h^2,v_h^2))\geqslant$$
$$-\frac{(\alpha_2+1)^2}{k_1}\|\sigma_h\|^2_{H(\mathrm{div})}+$$
$$\frac{k_1}{2}\|u_h\|_0^2-\frac{k_2^2}{k_1}\|u_h-\Pi u_h\|_0^2.$$

令 $(\tau_h,v_h)=(\tau_h^1,v_h^1)+\lambda(\tau_h^2,v_h^2)$. 则

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h^2,v_h^2))\geqslant$$
$$\left(\alpha_3-\lambda\frac{(\alpha_2+1)^2}{k_1}\right)\|\sigma_h\|^2_{H(\mathrm{div})}+$$
$$\lambda\frac{k_1}{2}\|u_h\|_0^2+\left(\gamma-\lambda\frac{k_2^2}{k_1}\right)\|u_h-\Pi u_h\|_0^2.$$

取 $\lambda=\min\left\{\frac{\alpha_3k_1}{(\alpha_2+1)^2},\frac{\gamma k_1}{2k_2^2}\right\}$. 则

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h^2,v_h^2))\geqslant$$
$$\frac{\alpha_3}{2}\|\sigma_h\|^2_{H(\mathrm{div})}+\frac{\gamma}{2}\|u_h-\Pi u_h\|_0^2+$$
$$\min\left\{\frac{\alpha_3k_1^2}{(\alpha_2+1)^2},\frac{\gamma k_1^2}{2k_2^2}\right\}\|u_h\|_0^2\geqslant$$
$$c_1|||(\sigma_h,u_h)|||^2,$$

其中

$$c_1=\min\left\{\frac{\alpha_3}{2},\frac{\alpha_3k_1^2}{(\alpha_2+1)^2},\frac{\gamma k_1^2}{2k_2^2},\frac{\gamma}{2}|c-1|\right\}.$$

另一方面,

$$|||(\tau_h,v_h)|||^2=\|\sigma_h+\lambda\rho_h\|^2_{H(\mathrm{div})}+\|u_h\|_0^2\leqslant$$
$$2\|\sigma_h\|^2_{H(div)}+(2\lambda^2+1)\|u_h\|_0^2\leqslant$$
$$c_2^2|||(\sigma_h,u_h)|||^2.$$

所以

$$B_h((\sigma_h,u_h),(\tau_h,v_h))\geqslant$$
$$C|||(\sigma_h,u_h)|||\cdot|||(\tau_h,v_h)|||,$$

其中 $C=\frac{c_1}{c_2}$. 证毕.

注 2 (20)式解释了在稳定化策略式中增加相容稳定项的原因.

5 误差估计

设 $I_h\in L(H(\mathrm{div},\Omega,S),M_h)$,$J_h\in L((L^2(\Omega))^2,V_h)$分别为插值算子,$\theta(\sigma)=I_h\sigma-\sigma_h$,

$\theta(u)=J_hu-u_h$. 设逼近误差为

$$e(\sigma)=\sigma-\sigma_h, e(u)=u-u_h.$$

设 $\omega(\sigma)=\sigma-I_h\sigma, \omega(u)=u-J_hu$ 为插值误差.

定理 5.1　设 (σ,u) 为问题(2)的解，则

$$\|e(\sigma)\|_{H(\mathrm{div})}+\|e(u)\|_0\leqslant C(\|\omega(\sigma)\|_{H(\mathrm{div})}+\|\omega(u)\|_0+\|u-\Pi u\|_0).$$

证明　由(3)式和(14)式可得到误差估计：对于任意 $(\tau_h,v_h)\in M_h\times V_h$，都有

$$B_h((e(\sigma),e(u)),(\tau_h,v_h))=\gamma G(u,v_h).$$

由定理 4.1 得

$$|\!|\!|(\theta(\sigma),\theta(u))|\!|\!|\leqslant C\cdot\sup_{(\tau_h,v_h)\in M_h\times V_h}\frac{B_h((\theta(\sigma),\theta(u)),(\tau_h,v_h))}{|\!|\!|(\tau_h,v_h)|\!|\!|}\leqslant C\cdot\sup_{(\tau_h,v_h)\in M_h\times V_h}\left\{\frac{\gamma\int_\Omega(u-\Pi u)\cdot(v_h-\Pi v_h)}{|\!|\!|(\tau_h,v_h)|\!|\!|}-\frac{B_h((\omega(\sigma),\omega(u)),(\tau_h,v_h))}{|\!|\!|(\tau_h,v_h)|\!|\!|}\right\}.$$

又易知

$$\left|\gamma\int_\Omega(u-\Pi u)\cdot(v_h-\Pi v_h)\right|\leqslant C\gamma\|u-\Pi u\|_0\|v_h\|_0\leqslant C\gamma\|u-\Pi u\|_0|\!|\!|(\tau_h,v_h)|\!|\!|,$$

$$|B_h((\omega(\sigma),\omega(u)),(\tau_h,v_h))|\leqslant C|\!|\!|(\omega(\sigma),\omega(u))|\!|\!|\cdot|\!|\!|(\tau_h,v_h)|\!|\!|.$$

从而有

$$|\!|\!|(\theta(\sigma),\theta(u))|\!|\!|\leqslant C(|\!|\!|(\omega(\sigma),\omega(u))|\!|\!|+\|u-\Pi u\|_0).$$

另一方面，由三角不等式有

$$|\!|\!|(e(\sigma),e(u))|\!|\!|\leqslant|\!|\!|(\omega(\sigma),\omega(u))|\!|\!|+|\!|\!|(\theta(\sigma),\theta(u))|\!|\!|\leqslant C(|\!|\!|(\omega(\sigma),\omega(u))|\!|\!|+\|u-\Pi u\|_0).$$

证毕.

参考文献：

[1] Arnold D N, Winther R. Mixed finite element for elasticity [J]. Numer Math, 2002, 92: 401.

[2] Hu J, Shi Z C. Lower order rectangular nonconforming mixed finite elements for plane elasticity [J]. SIAM J Numer Anal, 2008, 46: 88.

[3] Hu J, Man H Y, Zhang S Y. A simple conforming mixed finite element for linear elasticity on rectangular grids in any space dimension [J]. J Sci Comput, 2013, 58: 367.

[4] Franca L P, Stenberg R. Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1991, 28: 1680.

[5] Franca L P, Farhat C. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods [J]. Comput Meth Appl Mech Engrg, 1995, 123: 299.

[6] 曾凤，冯民富. Stokes-Darcy 耦合问题的新等阶元投影稳定化方法 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2015, 52: 937.

[7] 覃燕梅. Navier-Stokes 方程最优控制问题的一种新型投影稳定化方法 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016, 52: 973.

[8] Shi D Y, Li M H, Xu C. A new stabilization method for the linear elasticity problem [J]. J Sci Comput, 2015, 65: 1025.

[9] Shi D Y, Li M H, Dai Y. The Brezzi - Pitkäranta stabilization scheme for the elasticity problem [J]. J Comput Appl Math, 2015, 286: 7.

[10] Bochev P, Dohrmann C R, Gunzburger M. Stabilization of low-order finite elements for the Stokes equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2006, 44: 82.

[11] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用 [M]. 北京：科学出版社，2006.