doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.005

一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性

叶芙梅
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u'' - a(t)u + f(t,u) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$a(t):[0,1]\to[0,\infty)$ 连续，主要结果的证明基于锥拉伸与压缩不动点定理.

关键词：Dirichlet 问题；锥；正解；存在性
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0463-04

Existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order Dirichlet problem

YE Fu-Mei
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order Dirichlet problem

$$\begin{cases} u'' - a(t)u + f(t,u) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

where $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous, $a(t):[0,1]\to[0,\infty)$ is continuous. The proof of the main results is based on the fixed-point theorem of cone expansion -compression.

Keywords: Dirichlet problem; Cone; Positive solution; Existence
(2010 MSC 34B15, 34B18)

1　引　言

常微分方程两点边值问题的可解性是学者们的研究热点，并已有许多重要结果[1-15]. 1994 年 Wang[1] 研究了二阶常微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u'' + g(t)f(u) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，基于其 Green 函数

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

和锥拉伸与压缩不动点定理，得到如下结果：

定理 A　设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续并且 $g(t)$ 在 $(0,\infty)$ 的任意子区间上不恒为零. 若 f 满足：

(1) 超线性情形：

$$f_0 = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = 0, f_\infty = \lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} = \infty,$$

收稿日期：2016-12-22
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626016)
作者简介：叶芙梅(1994－)，女，甘肃武威人，主要研究方向常微分方程边值问题. E-mail:18368916729@163.com

(2) 次线性情形：

$$f_0 = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = \infty, f_\infty = \lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} = 0,$$

则该问题至少存在一个正解.

2003 年，Li[2] 研究了二阶非线性 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u'' - Mu + f(t,u) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，基于其 Green 函数

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\omega t \cdot \sinh\omega(1-s)}{\omega\cdot\sinh\omega}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ \dfrac{\sinh\omega s \cdot \sinh\omega(1-t)}{\omega\cdot\sinh\omega}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{M}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

并运用锥拉伸与压缩不动点定理，得到如下结果：

定理 B 设 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$M>0$ 为常数. 若 f 满足：

(1) $\overline{f}_0 = \limsup\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0, \underline{f}_\infty = \liminf\limits_{u\to\infty}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty,$

或

(2) $\underline{f}_0 = \liminf\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty, \overline{f}_\infty = \limsup\limits_{u\to\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0,$

则该问题至少存在一个正解.

文献[1,2]在对应问题是 M=0 或 M 为常数时研究了其正解的存在性. 随后，这类问题又被许多学者研究和推广[3-7]. 现在，自然要问：当 M 为一个正函数 $a(t)$ 时二阶 Dirichlet 问题正解的存在性如何？事实上，在常系数情形下可以通过计算得出相应的 Green 函数，并获得其正性和上下界，而构造变系数 Dirichlet 问题的 Green 函数有一定的困难.

基于上述工作，本文将构造一般的 Green 函数，并利用抽象函数的正性和单调性讨论 Green 函数的正性与上下界，然后运用锥拉伸与压缩不动点定理研究二阶常微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u'' - a(t)u + f(t,u) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

本文主要结果如下：

定理 1.1 设 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续. $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续，若 f 满足

(1) $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0$ 且

$\lim\limits_{u\to\infty}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$ (超线性情形)，

或

(2) $\lim\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$ 且

$\lim\limits_{u\to\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0$ (次线性情形)，

则边值问题(1)至少存在一个正解.

注 1 在问题 (1) 中，当 $a(t)\equiv 0$ 时本文定理直接退化为定理 A；当 $a(t)\equiv M, M>0$ 为常数时，本文定理直接退化为定理 B，因此定理 1.1 是定理 A 和定理 B 的直接推广. 而本文所取极限更加广泛，推广了文献[1]的结论.

2 预备知识

设 $C = C[0,1]$，其在范数 $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. 问题(1)有解 $u = u(t)$ 当且仅当 u 是算子方程

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s := Au(t)$$

的解，其中 $G(t,s)$ 表示边值问题

$$\begin{cases} -u'' + a(t)u = 0, t\in(0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数，即

$$G(t,s) = \frac{1}{\Delta}\begin{cases} \varphi(t)\psi(s), 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ \varphi(s)\psi(t), 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

这里的

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi(0) & \varphi(0) \\ \psi'(0) & \varphi'(0) \end{vmatrix},$$

$\varphi(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} -u'' + a(t)u = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases}$$

的唯一解，$\psi(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} -u'' + a(t)u = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = -1 \end{cases}$$

的唯一解.

注 2 当 $a(t) = k^2$(k 为常数)时，其 Green 函数及性质可参见文献[2]；当 $a(t) = -k^2$(k 为常数)时，其 Green 函数及性质可参见文献[8].

引理 2.1[14] 设 E 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥. Ω_1, Ω_2 是 E 的开子集，$0\in\Omega_1, \overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若全连续算子 $A: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(1) $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且

$\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

或

(2) $\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Au\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

则 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 上有一个不动点.

引理 2.2　$\varphi(t)$, $\psi(t)$ 具有以下性质：

(1) $\varphi(t)$ 严格单调递增，并且 $\forall t \in (0,1]$, $\varphi(t) > 0$；

(2) $\psi(t)$ 严格单调递增，并且 $\forall t \in [0,1)$, $\psi(t) > 0$.

证明　仅证明(1)，证明(2)类似.

以下分三步证明：

第一步，存在 $\sigma \in (0,1)$，使得 φ 在 $(0,\sigma)$ 上严格单调递增. 在 $(0,\sigma)$ 上，$u'' > 0$，显然 φ 在 $(0,\sigma)$ 上严格单调递增.

第二步，φ 在 $(0,1)$ 上不存在极大值. 事实上，由第一步可知 φ 在 $(0,\sigma)$ 上是正的、严格单调递增的. 因此由极大值原理可知，φ 在 $(0,1)$ 上不存在极大值，并且 φ 在 $(0,1)$ 上是非减的.

第三步，φ 在 $(0,1)$ 上是单调递增的. 反设不然. 则存在 $t_1, t_2 \in [0,1]$，满足 $t_1 < t_2$，但 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. 于是有

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t_2), t \in [t_1, t_2].$$

上式蕴含了

$$\varphi'(t) = \varphi''(t) = 0, t \in [t_1, t_2].$$

而由第一步和第二步可知，$\varphi(t_2) > 0, t \in [t_1, t_2]$. 因而

$$\varphi''(t_2) = a(t)\varphi(t_2) > 0.$$

这与 $\varphi''(t_2) = 0$ 矛盾. 证毕.

引理 2.3　$G(t,s)$ 有以下性质：

(1) $G(t,s) > 0, \forall t \in (0,1)$,

(2) $G(t,s) \leqslant G(s,s), \forall t,s \in (0,1)$,

(3) $G(t,s) \geqslant MG(s,s), \forall t,s \in [0,1]$,

其中 $M = \min\left\{\frac{\varphi(t)}{\varphi(1)}, \frac{\psi(t)}{\psi(0)}\right\}$.

3　主要结果的证明

定义锥

$$K := \{u \in C[0,1] : \min u(t) \geqslant M\|u\|\},$$

其中 $M = \min\left\{\frac{\varphi(t)}{\varphi(1)}, \frac{\psi(t)}{\psi(0)}\right\}$. 由于 $G(t,s) \leqslant G(s,s), \forall t,s \in [0,1]$. 并且对 $u \in K$ 有

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

所以 $\|Au(t)\| \leqslant \int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$. 进而由 $G(t,s) \geqslant MG(s,s), \forall t,s \in [0,1]$，对 $u \in K$，有

$$\min_{t\in[0,1]} Au(t) = \min_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant M\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant M\|Au\|.$$

所以 $A(K) \subset K$. 容易验证 $A: K \to K$ 是全连续算子. 则问题(1)的解等价于算子方程 $Au = u$ 的不动点.

超线性情形. 此时 $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u} = 0$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}\min\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u} = \infty$. 因为 $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u} = 0$，故存在 $p_1 > 0$，使得对 $0 \leqslant u \leqslant p_1$ 有 $f(t,u) \leqslant \eta u$，其中 $\eta > 0$ 满足

$$\eta\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \leqslant 1.$$

因此，若 $u \in K$, $\|u\| = p_1$，则

$$Au(t) \leqslant \int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \eta\|u\|\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \leqslant \|u\|.$$

记 $\Omega_1 := \{u \in E : \|u\| \leqslant p_1\}$. 则 $\|Au\| \leqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$. 因为 $\lim\limits_{u\to\infty}\min\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u} = \infty$，故存在 $\tilde{p}_2 > 0$，使得对 $u \geqslant \tilde{p}_2$ 有 $f(t,u) \geqslant \mu u$，其中 $\mu > 0$ 满足

$$\mu M\int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right)\mathrm{d}s \geqslant 1.$$

记

$$p_2 := \max\left\{2p_1, \frac{\tilde{p}_2}{M}\right\},$$

$$\Omega_2 := \{u \in E : \|u\| < p_2\}.$$

若 $u \in K$, $\|u\| = p_2$，则有

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1} u(t) \geqslant Mu(t) \geqslant \tilde{p}_2.$$

因此

$$Au\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right)\mu u\,\mathrm{d}s \geqslant \mu M\|u\|\int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right)\mathrm{d}s \geqslant \|u\|.$$

故

$$\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

所以由引理 2.1 的(1)知算子 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中

有一个不动点,并有 $p_1 \leqslant \|u\| \leqslant p_2$. 进而 $G(t,s) > 0$, 对 $0 < t < 1$ 有 $u(t) > 0$.

次线性情形. 此时 $\lim\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0$. 因为 $\lim\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$, 故存在 $p_1 > 0$, 使得对 $0 < u \leqslant p_1$ 有 $f(t,u) \geqslant \delta u$, 其中 $\delta > 0$ 满足

$$\delta M\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\mathrm{d}s \geqslant 1.$$

则对 $u \in K$, $\|u\| = p_1$ 有

$$Au(\frac{1}{2}) = \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\delta u\,\mathrm{d}s \geqslant \delta M\|u\|\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\mathrm{d}s \geqslant \|u\|,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

记 $\Omega_1 := \{u\in E: \|u\| \leqslant p_1\}$. 则 $\|Au\| \geqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$. 因为 $\lim\limits_{u\to\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,u)}{u} = 0$, 故存在 $\widetilde{p}_2 > 0$, 使得对 $u \geqslant \widetilde{p}_2$ 有 $f(t,u) \leqslant \lambda u$, 其中 $\lambda > 0$ 满足

$$\lambda\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \leqslant 1.$$

考虑以下两种情况:

(i) f 有界,即存在 N, 对 $\forall u \in (0,\infty)$, $f(u) \leqslant N$. 取

$$p_2 := \max\{2p_1, N\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\},$$

使得对 $u \in K$, 及 $\|u\| = p_2$ 有

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant N\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \leqslant p_2 = \|u\|.$$

则 $\|Au\| \leqslant \|u\|$.

(ii) f 无界. 取 $p_2 > \max\{2p_1, \widetilde{p}_2\}$, 使得

$$f(t,u) \leqslant f(t,p_2),\ 0 < u \leqslant p_2.$$

则对 $u \in K$, $\|u\| = p_2$, 有

$$Au(t) \leqslant \int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 G(s,s)f(s,p_2)\mathrm{d}s \leqslant \lambda p_2\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \leqslant p_2 = \|u\|.$$

综上所述,令

$$\Omega_2 := \{u\in E: \|u\| < p_2\},$$

有

$$\|Au\| \leqslant \|u\|\ u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

所以由引理 2.1 的(2)知算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点,故问题(1)至少存在一个正解. 证毕.

参考文献:

[1] Wang H Y. On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in the annulus [J]. J Differ Equations, 1994, 109: 1.

[2] Li Y X. Positive solutions of a second-order boundary value problems with sign-changing nonlinear terms [J]. J Math Anal Appl, 2003, 282: 232.

[3] Ma R Y, Thompson B. Multiplicity results for second-order two-point boundary value problems with superlinear or sublinear nonlinearities [J]. J Math Anal Appl, 2005, 203: 726.

[4] Jiang D Q, Liu H Z. Existence of positive solutions to second order Neumann boundary value problems [J]. J Math Res Exp, 2000, 20: 360.

[5] 陆静. 用格林函数法求解二阶微分方程边值问题 [J]. 太原师范学院:自然科学版, 2011, 10: 32.

[6] 吴红萍. 二阶 Dirichlet 边值问题的正解 [J]. 甘肃科学学报, 2007, 19: 53.

[7] Liu Z L, Li F Y, Multiple of positive solutions of nonlinear boundary problems [J]. J Math Anal Appl, 1996, 203: 610.

[8] Jiang D Q, Liu H Z, Xu X J. Non-resonant singular fourth-order boundary value problems [J]. Appl Math Lett, 2005, 18: 232.

[9] 达举霞, 韩晓玲. 三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 1177.

[10] Gao T, Han X L. Positive solutions of three-order ∞-point boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2016, 53: 47.

[11] 张海燕, 李耀红. 一类高分数阶微分方程积分边值问题的正解 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 512.

[12] 周韶林, 吴红萍, 韩晓玲. 一类四阶三点边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2014, 51: 11.

[13] Ma R Y. Multiplicity of positive solutions for second-order three-point boundary value problems [J]. Comput Math Appl, 2000, 40: 193.

[14] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南:山东科学技术出版社, 1985.

[15] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题 [M]. 北京:科学出版社, 2004.