doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.004

对称算子均衡问题解的存在性分析

张卫兵，颜文勇
(成都工业学院信息与计算科学系，成都 611730)

摘　要：本文研究了拓扑向量空间中对称算子均衡问题解的存在性. 在自然拟 C-凸及 C-上半连续的条件下，本文利用 KKMF 定理获得了拓扑向量空间中对称算子均衡问题解的存在性定理. 所得结果改进和推广了现有的工作.

关键词：对称算子均衡问题；自然拟 C-凸；C-上半连续；KKM 映像
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0459-04

Existence analysis of solutions for symmetric operator equilibrium problems

ZHANG Wei-Bing, *YAN Wen-Yong*
(Department of Information and Computing Science, Chengdu Technology University, Chengdu 611730, China)

Abstract: In this paper, the existence of solutions for symmetric operator equilibrium problems is investigated in topological vector spaces. By virtue of the conditions of natural quasi-C-convex and C-upper semicontinuity and the KKMF Theorem, the existence theorems of solutions for symmetric operator equilibrium problems are obtained. Our results improve and extent some corresponding known results.

Keywords: Symmetric operator equilibrium problems; Natural quasi-C-convex; C-upper semicontinious; KKM-mapping
(2010 MSC 47H10, 54C05)

1 引　言

均衡问题是优化问题、不动点问题、相补问题及变分不等式问题等的推广和概括，包含了很多从经济、机械以及工程所衍生出来的基本问题. 基于其形式的一般性和重要性，很多研究者在这方面做了大量的研究[1-8].

随着研究的深入，均衡问题的研究也从标量均衡问题推广到向量均衡问题及算子均衡问题. 2002 年，Domokos 和 Kolumbán[9] 给出了 Banach 空间中有算子解的变分不等式和向量变分不等式的意义：Banach 空间中，有算子解的变分不等式是几类变分不等式及向量变分不等式的推广和概括. 随后，一些研究者对各类有算子解的问题进行了研究. 例如：Kum 和 Kim[10,11] 研究了有算子解的广义向量变分不等式及广义向量拟变分不等式解的存在性，进而给出了拓扑向量空间中广义变分不等式及广义拟变分不等式的应用. Kazmi 和 Raouf[12] 研究了一类算子均衡问题. 随后，Kum 和 Kim[13] 又研究了广义算子拟均衡问题. 他们的结果推广了 Kazmi 和 Raouf 的结果. 2009 年，Kim[14] 等人研究了含参广义算子均衡问题解映像的半连续性. 2013 年，Salamon[15] 用向量拓扑伪单调性研究了含参算子均衡问题. 2014 年，

收稿日期：2017-01-13
基金项目：四川省科技厅项目基金(2017JY0051)；成都工业学院基金(2016RC006)
作者简介：张卫兵(1982－)，男，河南上蔡人，主要研究方向为优化理论及应用. E-mail：scu_zwb@126.com
通讯作者：颜文勇. E-mail：1051671804@qq.com

Salamonl[16]利用 KKM 定理给出了算子均衡问题解得存在性定理. Khan[17]研究了算子拟均衡系统问题解的存在性问题. 受上述工作的启发,本文主要研究对称算子均衡问题. 在适当的条件下,给出对称算子均衡问题解的存在性定理.

设 X_1,Y_1,X_2,Y_2,Z_1 和 Z_2 是拓扑向量空间. $L(X_1,Y_1),L(X_2,Y_2)$ 分别表示 X_1 到 Y_1, X_2 到 Y_2 的连续线性算子空间. 设 E_1,E_2 分别是 $L(X_1,Y_1)$ 和 $L(X_2,Y_2)$ 的两个非空子集. 又设 $F:E_1\times E_2\times E_1\to Z_1$, $G:E_1\times E_2\times E_2\to Z_2$ 是两个单值映像. 本文中我们主要研究如下的对称算子均衡问题:

(SOEP) 求 $(\tilde{f},\tilde{g})\in E_1\times E_2$, 使得

$$F(\tilde{f},\tilde{g},s)\notin -\mathrm{int}C_1,\ \forall s\in E_1,$$

$$G(\tilde{f},\tilde{g},t)\notin -\mathrm{int}C_2,\ \forall t\in E_2,$$

其中 C_1,C_2 分别是 Z_1,Z_2 中有非空内部的闭凸点锥.

2 预备知识

定义 2.1[12] 映像 $G:E\to Z$ 称为

(1) C-凸的, 如果对任意的 $f,g\in E$ 及 $\lambda\in[0,1]$, 使得

$$G(\lambda f+(1-\lambda)g)\in\lambda G(f)+(1-\lambda)G(g)-C;$$

(2) 自然拟 C-凸的, 如果对任意的 $f,g\in E$ 及 $\lambda\in[0,1]$, 使得

$$G(\lambda f+(1-\lambda)g)\in Co\{G(f),G(g)\}-C,$$

其中 $Co(A)$ 表示集合 A 的凸包.

注 1[12] 在定义 2.1 中,

(1) 每一个 C-凸映像是自然拟 C-凸的;

(2) G 是自然拟 C-凸的当且仅当对任意的 $f,g\in E$ 及 $\lambda\in[0,1]$, 存在 $\mu\in[0,1]$ 使得

$$G(\lambda f+(1-\lambda)g)\in\mu G(f)+(1-\mu)G(g)-C.$$

定义 2.2 设 E,Z 是两个 Hausdorff 线性拓扑空间, X 是 E 的一个非空子集, $C\subseteq Z$ 是一个闭凸点锥. 映像 $F:X\to Z$ 称为:

(1) 在 $x_0\in X$ 处是 C-上半连续的(C-下半连续的), 如果对 $0\in Z$ 的任意邻域 V, 都存在 $0\in E$ 的一个邻域 U 使得

$$F(x)\in F(x_0)+V-C,\quad\forall x\in U\cap X,$$

$$(F(x)\in F(x_0)+V+C,\quad\forall x\in U\cap X);$$

(2) 在 X 上是 C-上半连续的(C-下半连续的), 如果它在每一点 $x\in X$ 是 C-上半连续的(C-下半连续的).

定义 2.3[18] 设 E 是向量空间 X 的一个非空子集. 映像 $G:E\to 2^E$ 称为 KKM 映像, 如果对 E 的任意有限子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 有

$$Co(\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i)\neq\varnothing.$$

引理 2.4[18] 设 E 是拓扑向量空间 X 的一个非空子集, 映像 $G:E\to 2^E$ 是一个 KKM 映像. 如果使得对每一个 $x\in E$, $G(x)$ 是闭集且至少存在一点 $x_0\in E$ 使得 $G(x_0)$ 是紧集, 则有

$$\bigcap_{x\in E}G(x)\neq\varnothing.$$

3 对称算子均衡问题解的存在性

定理 3.1 如果下面的条件成立:

(1) $E_1\times E_2$ 是 $L(X_1,Y_1)\times L(X_2,Y_2)$ 的一个非空紧子集;

(2) 对任意的 $(f,g)\in E_1\times E_2$, 有 $F(f,g,f)=0$, $G(f,g,g)=0$;

(3) F 是 C_1-上半连续的, G 是 C_2-上半连续的;

(4) 对任意固定的 (f,g), $F(f,g,\cdot)$ 是自然拟 C_1-凸的, $G(f,g,\cdot)$ 是自然拟 C_2-凸的,

则对称算子均衡问题(SOEP)有解.

证明 定义集值映像: $A_1:E_1\times E_2\to E_1$, $A_2:E_1\times E_2\to E_2$, $A:E_1\times E_2\to E_1\times E_2$ 如下:

$$A_1(f,g)=\{s\in E_1\mid F(f,g,s)\in -\mathrm{int}C_1\},$$

$$A_2(f,g)=\{t\in E_2\mid G(f,g,t)\in -\mathrm{int}C_2\},$$

$$A(f,g)=\{(s,t)\in E_1\times E_2\mid s\in A_1(f,g)\text{ 或 }t\in A_2(f,g)\}.$$

令

$$T(s,t)=(E_1\times E_2)\backslash A^{-1}(s,t).$$

首先, 我们证明 $T(s,t)$ 在 $E_1\times E_2$ 上是非空紧集. 假设存在 $(s_0,t_0)\in E_1\times E_2$ 使得

$$T(s_0,t_0)=\varnothing.$$

因此 $A^{-1}(s_0,t_0)=E_1\times E_2$, 即

$$(s_0,t_0)\in A(f,g),\quad\forall(f,g)\in E_1\times E_2.$$

由此可得 $(s_0,t_0)\in A(s_0,t_0)$, 进而有 $s_0\in A_1(s_0,t_0)$ 或 $t_0\in A_2(s_0,t_0)$. 不妨设 $s_0\in A_1(s_0,t_0)$. 则有

$$F(s_0,t_0,s_0)\in -\mathrm{int}C_1.$$

这与 $F(s_0,t_0,s_0)=0\notin -\mathrm{int}C_1$ 矛盾. 所以 $T(s,t)$ 在 $E_1\times E_2$ 是非空的.

下面证明 $T(s,t)$ 是紧集. 因为 $E_1\times E_2$ 是紧集, 我们只需证明 $T(s,t)$ 是闭集即可. 因为 $T(s,t)=(E_1\times E_2)\backslash A^{-1}(s,t)$, 所以只需证明 $A^{-1}(s,t)$ 是开集即可. 由 A 的定义可知

$$A^{-1}(s,t)=\{(f,g)\mid s\in A_1(f,g) \text{ 或 } t\in A_2(f,g)\}=\{(f,g)\mid (f,g)\in A_1^{-1}(s) \text{ 或} (f,g)\in A_2^{-1}(t)\}=A_1^{-1}(s)\cup A_2^{-1}(t).$$

定义集值映像 $T_1:E_1\to E_1\times E_2$ 如下：

$$T_1(s)=(E_1\times E_2)\backslash A_1^{-1}(s).$$

令 $(f_\alpha,g_\alpha)\in T_1(s)$ 且 $(f_\alpha,g_\alpha)\to(f_0,g_0)$. 则有

$$F(f_\alpha,g_\alpha,s)\notin -\operatorname{int}C_1 \quad (1)$$

我们断言

$$F(f_0,g_0,s)\notin -\operatorname{int}C_1.$$

否则，

有 $F(f_0,g_0,s)\in -\operatorname{int}C_1$.

则存在 $0\in Z_1$ 的一个邻域 V 使得

$$F(f_0,g_0,s)+V\in -\operatorname{int}C_1 \quad (2)$$

由于 $F(\cdot,\cdot,s)$ 是 C_1 -上半连续的，对于(2)式中的 V，当 (f_α,g_α) 充分逼近 (f_0,g_0) 时，有

$$F(f_\alpha,g_\alpha,s)\in F(f_0,g_0,s)+V-C_1 \quad (3)$$

由(2),(3)式可得

$$F(f_\alpha,g_\alpha,s)\in -\operatorname{int}C_1-C_1\subseteq -\operatorname{int}C_1.$$

这与(1)式矛盾. 因此 $T_1(s)$ 是闭集. 进而可知 $A_1^{-1}(s)$ 是开集.

同理可证 $A_2^{-1}(t)$ 也是开集. 综上知 $A^{-1}(s,t)=A_1^{-1}(s)\cup A_2^{-1}(t)$ 是开集.

最后，我们证明 $T(s,t)$ 是一个 KKM 映像.

反证法. 假设存在一个有限子集 $\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_n,t_n)\}$ 及 (s,t)，满足

$$(s,t)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i(s_i,t_i),$$

其中 $\lambda_i\in[0,1]$ 且 $\sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 使得

$$(s,t)\notin\bigcup_{i=1}^{n}T(s_i,t_i).$$

由 T 的定义可知

$$(s,t)\in A^{-1}(s_i,t_i).$$

因此 $s_i\in A_1(s_i,t_i)$ 或 $t_i\in A_2(s_i,t_i)$. 不妨设 $s_i\in A_1(s_i,t_i)$，则有

$$F(s,t,s_i)\in -\operatorname{int}C_1.$$

由于 $F(s,t,\cdot)$ 是自然 C_1 -凸的，则存在 $\mu_i\in[0,1]$ 满足 $\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mu_i=1$，使得

$$0=F(s,t,\sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i s_i)\in\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mu_i F(s,t,s_i)-C_1\subseteq\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mu_i(-\operatorname{int}C_1)-C_1\subseteq -\operatorname{int}C_1.$$

矛盾. 所以 $T(s,t)$ 是一个 KKM 映像.

根据引理 2.4，存在 $(\tilde f,\tilde g)\in E_1\times E_2$，使得

$$(\tilde f,\tilde g)\in\bigcap_{(s,t)\in E_1\times E_2}T(s,t).$$

由此可得对任意的 $(s,t)\in E_1\times E_2$，有

$$(\tilde f,\tilde g)\notin A^{-1}(s,t).$$

所以 $A(\tilde f,\tilde g)=\varnothing$. 进而可得 $A_1(\tilde f,\tilde g)=\varnothing$，$A_2(\tilde f,\tilde g)=\varnothing$. 综上，存在 $(\tilde f,\tilde g)$ 使得

$$F(\tilde f,\tilde g,s)\notin -\operatorname{int}C_1,\ \forall s\in E_1,$$

$$G(\tilde f,\tilde g,t)\notin -\operatorname{int}C_2,\ \forall t\in E_2.$$

即对称算子均衡问题(SOEP)有解. 证毕.

参考文献：

[1] Bianchi M, Schaible S. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems [J]. J Optimiz Theory App, 1996, 90: 31.

[2] Chadli O, Chaldi Z, Riahi H. Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions and applications to variational inequalities [J]. J Optimiz Theory App, 2000, 105: 299.

[3] 朱胜，黄建华，万丙晟. Bregman 弱相对非扩张映象与均衡问题的强收敛定理[J]. 四川大学学报：自然科学版, 2016, 53: 471.

[4] Hadjisavvas N, Schaible S. From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case [J]. J Optimiz Theory App, 1998, 96: 297.

[5] Dai H X. Generalized mixed equilibrium problem [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报：自然科学版), 2013, 50: 950.

[6] Konnov I. A general approach to finding stationary point and the solutions of related problems [J]. Comp Math Math Phys+, 1996, 36: 585.

[7] Ye J N, Chen L J, Huang J H. Hölder continuity of solutions for parametric primal and dual vector mixed quasi-equilibrium problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报：自然科学版), 2016, 53: 1202.

[8] Yuan X Z. KKM theory and application in nonlinear analysis [M]. New York/Basel: Marcel Dekker Inc , 1999.

[9] Domokos A, Kolumbán J. Variational inequalities with operator solutions [J]. J Global Optim, 2002, 23: 99.

[10] Kum S, Kim W K. Generalized vector variational and quasivariational inequalities with operator solutions [J]. J Global Optim, 2005, 32: 581.

[11] Kum S, Kim W K. Applications of generalized variational and quasivariational inequalities with opera-

tor solutions in a TVS [J]. J Optimiz Theory App, 2007, 133: 65.

[12] Kazmi K R, Raouf A. A class of operator equilibrium problems [J]. J Math Anal Appl, 2005, 308: 554.

[13] Kum S, Kim W K. On generalized operator quasiequilibrium problems [J]. J Math Anal Appl, 2008, 345: 559.

[14] Kim W K, Kum S, Lee K H. Semicontinuity of the solution multifunctions of the parametric generalized operator equilibrium problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 2182.

[15] Salamon J. Sensitivity analysis of the solution map of parametric operator equilibrium problems [J]. Publ Math-Debrecen, 2013, 83: 625.

[16] Salamon J. On operator equilibrium problems [J]. Math Commun, 2014, 19: 581.

[17] Khan S A. System of operator quasi equilibrium problems [J]. Int J Anal, 2014, 2014: 848206.

[18] Fan K. A generalization of Tychnoff's fixed-point theorem [J]. Math Ann, 1961, 142: 305.