2017 年 11 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Nov. 2017
第 54 卷　第 6 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 54　No. 6

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.007

一类 Caputo 分数阶微分方程积分边值问题的正解

张立新，杨玉洁，贾文敬
(北京联合大学基础部，北京 100101)

摘　要：本文应用 Krasnosel'skii 及 Leggett-Williams 不动点定理研究了一类含积分边界条件的 Caputo 型分数阶微分方程的边值问题,得到了一个及三个正解存在的充分条件.

关键词：积分边值问题；正解；分数阶微分方程；不动点定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)06-1169-04

Positive solutions for integral boundary value problem of a class of Caputo fractional differential equations

ZHANG Li-Xin, *YANG Yu-Jie*, *JIA Wen-Jing*
(Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing 100101, China)

Abstract: We investigate the existence of positive solutions for a class of Caputo's fractional differential equations with integral boundary conditions. By means of the Krasnosel'skii and Leggett-Williams fixed point theorems, the existence theorems of one positive solution or three positive solutions are obtained, respectively.

Keywords: Integral boundary value problem; Positive solution; Fractional differential equation; Fixed point theorem
(2010 MSC 34A08, 34B18)

1　引　言

近年来,分数阶微分方程在流体力学、控制系统及生物系统的电传导等方面得到广泛应用[1].许多学者利用锥上的不动点定理和单调迭代等方法研究了分数阶微分方程的边值问题的正解,取得了很多成果[2-13],其中,文献[7-13]研究了含积分边界条件的分数阶微分方程的正解.

在文献[7]中,Cabada 和 Wang 利用 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理研究了边值问题

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=0, u(1)=\lambda\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

的正解的存在性,其中 $2<\alpha<3$,$0<\lambda<2$,${}^cD^\alpha$ 是 Caputo 型分数阶导数.在文献[9]中,张立新利用 Krasnosel'skii 不动点定理研究了积分边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^\alpha u(t)=\lambda f(t,u(t)), 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0, u(1)= \\ \quad \int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s, u'(1)=0 \end{cases}$$

的正解的存在性,其中 $3<\alpha\leqslant 4$ 是一个实数,$\lambda>0$ 是一个参数,$D_{0^+}^\alpha$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数.受上述文献的启发,本文考虑下面的分数阶微分方程的积分边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^\alpha u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=0, u(1)=\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性,其中 $2<\alpha<3$ 是一个实数,${}^cD_{0^+}^\alpha$ 是 Caputo 型分数阶导数.

收稿日期：2017-02-19
基金项目：国家自然科学基金(11601030)
作者简介：张立新(1971－),女,山东滨州人,副教授,主要研究方向为微分方程理论及其应用. E-mail:ldtlixin@buu.edu.cn

下面给出两个条件：

(A_1) $f \in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$；

(A_2) $g \in C([0,1],[0,+\infty))$，且

$$\sigma = \int_0^1 sg(s)\mathrm{d}s < 1.$$

2 预备知识

为方便读者，我们先给出一些关于分数阶微积分理论的定义和引理.

定义 2.1[1] 函数 $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 α 阶 Caputo 微分定义为

$$^cD_{0+}^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{y^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 n 为不小于 α 的最小整数.

定义 2.2[1] 函数 $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分定义为

$$I_{0+}^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s.$$

定义 2.3[1] 函数 $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 微分定义为

$$D_{0+}^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 n 为不小于 α 的最小整数.

引理 2.4[1] 设 $\alpha>0$，则分数阶微分方程

$$^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = 0$$

有唯一解 $u(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}t^j$.

引理 2.5[1] 设 $\alpha>0$，则

$$I_{0+}^{\alpha}\,{}^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = u(t) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}t^j.$$

引理 2.6 设 $y\in C[0,1]$，$2<\alpha<3$，则边值问题

$$\begin{cases} ^cD_{0+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, 0<t<1, \\ u(0) = u''(0) = 0, u(1) = \int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解 $u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t,s) = G_1(t,s) + \frac{t\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\mathrm{d}\tau}{1-\sigma} \tag{3}$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

证明 利用引理 2.5 把边值问题(2)转化为等价的积分方程

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s + u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2}t^2.$$

由边界条件 $u(0) = u''(0) = 0$ 得

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s + u'(0)t.$$

再由边界条件 $u(1) = \int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s$ 得

$$u'(0) = \int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s.$$

代入上式得

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s + t\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s + t\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 G_1(t,s)y(s)\mathrm{d}s + t\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

设 $\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s = A$. 由(5)式可得

$$A = \int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\int_0^1 G_1(s,\tau)y(\tau)d\tau + A\int_0^1 sg(s)\mathrm{d}s$$

于是有

$$A = \frac{\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\int_0^1 G_1(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau}{1-\int_0^1 sg(s)\mathrm{d}s} = \frac{\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\int_0^1 G_1(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau}{1-\sigma}.$$

代入(5)式得

$$u(t) = \int_0^1 [G_1(t,s) + \frac{t}{1-\sigma}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\mathrm{d}\tau]y(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.7 $G_1(t,s)$具有以下性质：

(i) $G_1(t,s)>0, t,s\in(0,1)$；

(ii) $\dfrac{(t-t^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G_1(t,s) \leqslant \dfrac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t,s\in[0,1]$.

引理 2.8 设条件(A_2)成立，则 $G(t,s)$ 有以下性质：

$$\frac{(t-t^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}, t,s\in[0,1].$$

证明　由引理 2.7 得

$$\frac{(t-t^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}\int_0^1 \tau g(\tau)\mathrm{d}\tau}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \leqslant \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}.$$

引理 2.8 得证.

引理 2.9[14]　设 E 是一个 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω_1,Ω_2 是 E 中的两个有界开集，并且 $\Omega_1\subset\Omega_2$，假设 $A: P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 是全连续算子，如果

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|, x\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Ax\|\geqslant\|x\|, x\in P\cap\partial\Omega_2$，或

(ii) $\|Ax\|\geqslant\|x\|, x\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Ax\|\leqslant\|x\|, x\in P\cap\partial\Omega_2$

中有一个成立，那么 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点.

引理 2.10[15]　设 P 为实 Banach 空间 E 中的一个锥，$P_c=\{x\in P \mid \|x\|<c\}$，$\theta$ 是 P 上的一个非负连续凹泛函使得当 $x\in\overline{P}_c$ 时，$\theta(x)\leqslant\|x\|$，并且

$$P(\theta,b,d)=\{x\in P \mid \theta(x)\geqslant b, \|x\|\leqslant d\}.$$

又假设 $A:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 是全连续的且存在常数 $0<a<b<d\leqslant c$，使得

(C_1) 当 $x\in\overline{P}_a$ 时，$\|Ax\|<a$；

(C_2) $\{x\in P(\theta,b,d) \mid \theta(x)>b\}\neq\varnothing$ 且对 $x\in P(\theta,b,d)$ 有 $\theta(Ax)>b$；

(C_3) 当 $x\in P(\theta,b,c)$ 且 $\|Ax\|>d$ 时，$\theta(Ax)>b$.

那么 A 至少有三个不动点 x_1,x_2,x_3 满足

$$\|x_1\|<a, b<\theta(x_2), \|x_3\|>a, \theta(x_3)<b.$$

3　主要结果

设 $E=C[0,1]$，$\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$，则 E 为 Banach 空间. 在 E 定义锥 P：

$$P=\{u\in E \mid u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}.$$

在锥上定义非负连续凹泛函 $\theta(u)=\min\limits_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}|u(t)|$，其中 $0<\delta<\frac{1}{2}$. 显然，$\theta(u)\leqslant\|u\|$.

对任意 $u\in P$，定义非线性算子 T 如下：

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

引理 3.1　设(A_1)，(A_2)成立，则 $T(P)\subset P$.

证明　由引理 2.8 知 $G(t,s)\geqslant 0, t,s\in[0,1]$. 对于 $u\in P, u(t)\geqslant 0$. 再由假设(A_1)得 $f(s,u(s))\geqslant 0$，从而 $(Tu)(t)\geqslant 0$，即 $T(P)\subset P$.

按常规证法易证 $T:P\to P$ 是全连续的.

记

$$l=\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}(t-t^{\alpha-1}), M=(1-\sigma)\Gamma(\alpha+1),$$

$$N=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{l[(1-\delta)^\alpha-\delta^\alpha]}.$$

定理 3.2　设(A_1)，(A_2)成立，若存在两个正数 $r_2>r_1>0$ 使得

(H_1) $f(t,u)\leqslant Mr_2, (t,u)\in[0,1]\times[0,r_2]$；

(H_2) $f(t,u)\geqslant Nr_1, (t,u)\in[0,1]\times[0,r_1]$，

则边值问题(1)至少有一个正解 u 使得 $r_1\leqslant\|u\|\leqslant r_2$.

证明　令 $\Omega_2=\{u\in P \mid \|u\|<r_2\}$，当 $u\in\partial\Omega_2$ 时，有 $0\leqslant u(t)\leqslant r_2, t\in[0,1]$. 由($H_1$)及引理2.8 可得

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant \frac{Mr_2}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s=\frac{Mr_2}{(1-\sigma)\alpha\Gamma(\alpha)}=r_2=\|u\|.$$

所以

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|, u\in\partial\Omega_2.$$

令 $\Omega_1=\{u\in P \mid \|u\|<r_1\}$，当 $u\in\partial\Omega_1$ 时，有 $0\leqslant u(t)\leqslant r_1, t\in[0,1]$. 由($H_2$)及引理 2.8 可得

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant (t-t^{\alpha-1})\frac{Nr_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\geqslant \min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}(t-t^{\alpha-1})\frac{Nr_1}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{1-\delta}(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\geqslant \frac{lN[(1-\delta)^\alpha-\delta^\alpha]r_1}{\Gamma(\alpha+1)}=r_1=\|u\|.$$

所以

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|, u\in\partial\Omega_1.$$

由引理 2.9 知 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点，即边值问题(1)至少有一个正解.

定理 3.3　设(A_1)，(A_2)成立，且存在正数 a,b,c,d 满足 $0<a<b<d<c$，且 $b=l(1-\sigma)d$，使得

(H_3) $f(t,u)<Ma, (t,u)\in[0,1]\times[0,a]$；

(H_4) $f(t,u)>Nb, (t,u)\in[\delta,1-\delta]\times[b,d]$；

(H_5) $f(t,u)\leqslant Mc, (t,u)\in[0,1]\times[0,c]$，

则边值问题(1)至少有 3 个正解 u_1,u_2 和 u_3 满足

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_1(t)|<a, b<\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}|u_2(t)|<$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_2(t)|\leqslant c \tag{6}$$

和

$$a<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_3(t)|\leqslant c,\ \min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}|u_3(t)|<b \tag{7}$$

证明 下面用 Leggett-Williams 不动点定理证明边值问题(1)至少有3个正解,需要逐一验证定理的条件.

若 $u\in\overline{P_c}$,则 $\|u\|\leqslant c$. 由假设(H_5)可得 $f(t,u(t))\leqslant Mc,0\leqslant t\leqslant 1$,因此

$$\|Tu\|\leqslant\frac{1}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{Mc}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha+1)}=c.$$

同理,若 $u\in\overline{P_a}$,由假设(H_3)可得 $f(t,u(t))<Ma,0\leqslant t\leqslant 1$,从而 $\|Tu\|<a$,所以引理2.10的条件(C_1)满足. 取 $u(t)=\dfrac{b+d}{2},0\leqslant t\leqslant 1$,显然 $u(t)\in P(\theta,b,d)$,因此

$$\{u\in P(\theta,b,d)\,|\,\theta(u)>b\}\neq\varnothing.$$

若 $u\in P(\theta,b,d)$,则 $b\leqslant u(t)\leqslant d,\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta$. 由假设($H_4$)可得 $f(t,u)>Nb,\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta$. 因此

$$\theta(Tu)=\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}|(Tu)(t)|=$$
$$\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}(t-t^{\alpha-1})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}(t-t^{\alpha-1})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{1-\delta}(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s>$$
$$\frac{lNb}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{1-\delta}(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s=\frac{lN[(1-\delta)^\alpha-\delta^\alpha]b}{\Gamma(\alpha+1)}=b.$$

引理2.10的条件(C_2)满足.

当 $u\in P(\theta,b,c)$ 且 $\|Tu\|>a$ 时,由于

$$\|Tu\|\leqslant\frac{1}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

所以

$$(Tu)(t)\geqslant\frac{t-t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$(1-\sigma)(t-t^{\alpha-1})\|Tu\|,$$

从而有

$$\theta(Tu)=\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}|(Tu)(t)|\geqslant$$
$$\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta}(1-\sigma)(t-t^{\alpha-1})\|Tu\|>$$
$$l(1-\sigma)d=b.$$

引理2.10的条件(C_3)也满足. 因此边值问题(1)至少有3个正解 u_1,u_2 和 u_3 满足(6)和(7)式. 定理得证.

参考文献:

[1] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and application of fractional differential equation [M]. Amsterdam: North-Holland, 2006.

[2] Bai Z B, Lü H S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. J Math Anal Appl, 2005, 311:495.

[3] Bai Z B. On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2010, 72: 916.

[4] Wang Y Q, Liu L S, Wu Y H. Positive solutions for a class of fractional boundary value problem with changing sign nonlinearity [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2011, 74: 6434.

[5] Liang S H, Zhang J H. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 5545.

[6] Zhao Y G, Sun S R, Han Z L, *et al*. The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. Commun Nonlinear SCI, 2011, 217: 2086.

[7] Cabada A, Wang G T. Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. J Math Anal Appl, 2012, 389: 403.

[8] Cabada A, Hamdi Z. Nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 2014, 228: 251.

[9] 张立新. 一类含积分边界条件的分数阶微分方程的正解的存在性[J]. 应用数学学报, 2015, 38: 423.

[10] Sun Y P, Zhao M. Positive solutions for a class of fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Appl Math Lett, 2014, 34: 17.

[11] 王勇. 非线性分数阶微分方程积分边值问题的正解[J]. 应用数学, 2016, 29: 1.

[12] 张海燕, 李耀红. 一类高分数阶微分方程的积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 512.

[13] 薛益民. 含积分边界条件的分数阶微分方程耦合系统正解的唯一性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016 , 53: 1227.

[14] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Groningen: Noordhoff, 1964.

[15] Leggett R W, Williams L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces [J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28: 673.