

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.005

Black-Scholes 模型的三次三角 B-样条配点法

吴蓓蓓^{1,2}, 殷俊锋¹, 金 猛¹

(1. 同济大学数学科学学院, 上海 200092; 2. 上海电力学院数理学院, 上海 200090)

摘要: 本文研究了 Black-Scholes 欧式期权定价模型的三次三角 B-样条配点法. 对 Black-Scholes 方程, 该方法的空间离散采用三次三角 B-样条配点法, 时间离散采用向前有限差分, 并引入参数 θ 来建立混合差分格式. 利用稳定性分析的 Von Neumann (Fourier) 方法, 本文证明了该格式在 $1/2 \leq \theta \leq 1$ 时是无条件稳定的. 数值实验显示, 该方法的数值结果优于 Crank-Nicolson 有限差分法和三次 B-样条方法.

关键词: 期权定价; Black-Scholes 方程; 三次三角 B-样条; 有限差分

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)06-1153-06

Cubic trigonometric B-spline collocation method for Black-Scholes model

WU Bei-Bei^{1,2}, YIN Jun-Feng¹, JIN Meng¹

(1. School of Mathematics Science, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

Abstract: A cubic trigonometric B-spline collocation method is developed for numerical solution of the Black-Scholes equation governing European option pricing. In this method, the Black-Scholes equation is fully-discretized by using the cubic trigonometric B-spline collocation for spatial discretization and the forward finite difference for the time discretization. As a result, a hybrid difference scheme is obtained by introducing the parameter θ . According to the Von Neumann (Fourier) method, the presented method is proven to be unconditionally stable for $1/2 \leq \theta \leq 1$. A numerical experiment is performed to illustrate the validity and accuracy of the method. It is shown that this method is superior to the Crank-Nicolson finite difference method and cubic B-spline collocation.

Keywords: Option pricing; Black-Scholes equation; Cubic trigonometric B-spline; Finite difference (2010 MSC 39A14, 41A15)

1 引言

期权是重要的金融衍生品, 具有规避风险、风险投资和价值发现等功能及灵活性和多样性等特点, 也是金融风险管理的有效工具. 期权理论最初由 Black 和 Scholes^[1] 提出. 其核心问题是期权的定价问题. 由于在对 Black-Scholes 模型及其推广

形式进行期权定价时, 很难找到解析解, 因而多数研究人员采用高效的数值方法来研究期权定价问题. 这些方法主要有格点法^[2]、二叉树法^[3]、三叉树法^[4]、Monte Carlo 方法^[5]、有限差分法^[6,7]、有限元法^[8]、有限体积法^[9,10]及径向基函数法^[11,12]等.

B-样条具有良好的局部支承性, 目前已被广泛地应用于求解偏微分方程. 该方法计算简单, 精度

收稿日期: 2017-03-05

基金项目: 国家自然科学基金(11271289)

作者简介: 吴蓓蓓(1979-), 女, 理学博士, 副教授, 主要研究方向为计算金融. E-mail: wu_bb@aliyun.com

通信作者: 殷俊锋. E-mail: yinjf@tongji.edu.cn

高,且易于计算机实现. 近年来,B-样条方法也被国内外学者应用于期权定价问题,如 Rashidinia 等利用三次 B-样条配点法来定价单资产的欧式期权^[13],Huang 等提出了求解广义 Black-Scholes 偏微分方程的三次 B-样条配点法^[14],Kadalbajoo 等将三次 B-样条配点法与有限差分 θ 方法结合,给出了广义 Black-Scholes 偏微分方程的数值解^[15],Mohammadi 构造了广义 Black-Scholes 欧式期权定价模型的五次 B-样条配点法^[16],等.

本文用三次三角 B-样条配点法来定价欧式期权.该方法可被用于求解对流-扩散方程、双曲方程、边界值等问题^[17-24].我们将利用三次三角 B-样条配点法和有限差分格式来离散 Black-Scholes 偏微分方程,并对差分格式的稳定性进行分析,得到稳定性条件.数值实验显示,三次三角 B-样条配点法对求解欧式期权定价问题是有效的,其相对误差随网格加密而减小,且逼近效果好于 Crank-Nicolson 有限差分法^[7]和三次 B-样条方法^[13].

2 欧式期权模型

考虑定义在区域 $\Sigma: \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ 上的 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1)$$

其终止条件为

$$V(S, T) = \max(S - E, 0) \quad (2)$$

其中 $V(S, t)$ 是欧式看涨期权价格,随着原生资产价格 S 和时间 t 的变化而变化, σ 和 r 分别为波动率和无风险利率(均假定为常数), T 为到期日, E 为执行价格.为了利用数值方法求解以上问题,我们把问题限制在一个有限区域 $[S_{\min}, S_{\max}] \times [0, T]$ 上,其中 S_{\min} 和 S_{\max} 为适当选取的非负数,并且补充边界条件

$$V(S_{\min}, t) = \alpha(t), V(S_{\max}, t) = \beta(t), t \in [0, T] \quad (3)$$

作变换 $S=e^x$, 即 $x = \ln S$, 则上述问题(1)~(3)可转化为求下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, \\ u(x, T) = \max(e^x - E, 0) \end{cases} \quad (4)$$

边界条件为

$$u(x_{\min}, t) = \alpha(t), \quad u(x_{\max}, t) = \beta(t) \quad (5)$$

其中 $u(x, t) = V(S, t), (x, t) \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T], x_{\min} = \ln S_{\min}, x_{\max} = \ln S_{\max}$.

本文仅给出欧式看涨期权的三次三角 B-样条配点法,看跌情况的处理相类似.

3 配点法

以空间步长 h 和时间步长 τ 将求解区域 $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T]$ 划分为均匀网格,网格点为 (x_l, t_j) , 其中

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}, x_l = x_{\min} + lh,$$

$$\tau = \frac{T}{m}, t_j = j\tau, l=0, 1, \dots, n, j=0, 1, \dots, m.$$

利用三次三角 B-样条基函数配点法,可将式(4)的逼近解表示成

$$u(x, t) = \sum_{l=-3}^{n-1} \omega_l(t) \varphi_{3,l}(x) \quad (6)$$

这里 $\omega_l(t)$ 是与时间 t 相关的未知量, $\varphi_{3,l}(x)$ 是三次三角 B-样条基函数,定义为^[17]

$$\varphi_{3,l}(x) = \begin{cases} p^3(x_l), & x \in [x_l, x_{l+1}], \\ p(x_l)(p(x_l)q(x_{l+2}) + q(x_{l+3})p(x_{l+1})) + q(x_{l+4})p^2(x_{l+1}), & x \in [x_{l+1}, x_{l+2}], \\ q(x_{l+4})(p(x_{l+1})q(x_{l+3}) + q(x_{l+4})p(x_{l+2})) + p(x_l)q^2(x_{l+3}), & x \in [x_{l+2}, x_{l+3}], \\ q^3(x_{l+4}), & x \in [x_{l+3}, x_{l+4}], \end{cases}$$

其中

$$p(x_l) = \sin \frac{x - x_l}{2}, q(x_l) = \sin \frac{x_l - x}{2},$$

$$\kappa = \sin \frac{h}{2} \sinh \sin \frac{3h}{2}.$$

表 1 给出了函数 $\varphi_{3,l}(x)$ 及其一阶导数 $\varphi'_{3,l}(x)$ 和两阶导数 $\varphi''_{3,l}(x)$ 在节点处的值,其中

$$\gamma_1 = \sin^2 \frac{h}{2} \operatorname{csc} h \operatorname{csc} \frac{3h}{2},$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{1 + 2 \cosh}, \gamma_3 = -\frac{3}{4} \operatorname{csc} \frac{3h}{2},$$

$$\gamma_4 = \frac{3(1 + 3 \cosh) \operatorname{csc}^2 \frac{h}{2}}{16(2 \cos \frac{h}{2} + \cos \frac{3h}{2})},$$

$$\gamma_5 = \frac{-3 \cot^2 \frac{h}{2}}{2(1 + 2 \cosh)}.$$

表 1 函数 $\varphi_{3,l}(x)$ 及其导数在节点处的值

Tab.1 Values of $\varphi_{3,l}(x)$ and its derivatives at the knots

x	x_l	x_{l+1}	x_{l+2}	x_{l+3}	x_{l+4}
$\varphi_{3,l}(x)$	0	γ_1	γ_2	γ_1	0
$\varphi'_{3,l}(x)$	0	$-\gamma_3$	0	γ_3	0
$\varphi''_{3,l}(x)$	0	γ_4	γ_5	γ_4	0

记点 (x_l, t_j) 处的逼近解为 $u_l^j = u(x_l, t_j)$, 在区间 $[x_l, x_{l+1}]$ 上的定义为

$$u_l^j = \sum_{k=l-3}^{l-1} \omega_k^j(t) \varphi_{3,k}(x) \tag{7}$$

根据表 1, 逼近解 u_l^j 及其关于 x 的一阶和两阶导数分别为

$$\begin{aligned} u_l^j &= \gamma_1 \omega_{l-3}^j + \gamma_2 \omega_{l-2}^j + \gamma_1 \omega_{l-1}^j, \\ (u_x)_l^j &= \gamma_3 \omega_{l-3}^j - \gamma_3 \omega_{l-1}^j, \\ (u_{xx})_l^j &= \gamma_4 \omega_{l-3}^j + \gamma_5 \omega_{l-2}^j + \gamma_4 \omega_{l-1}^j \end{aligned} \tag{8}$$

在点 (x_l, t_j) 处取关于时间变量的一阶向前差商, 并引入参数 θ ($0 \leq \theta \leq 1$), 则式(4)中的偏微分方程可以离散化为

$$\begin{aligned} \frac{u_l^{j+1} - u_l^j}{\tau} + (1-\theta) \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (u_{xx})_l^{j+1} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (u_x)_l^{j+1} - ru_l^{j+1} \right] + \theta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (u_{xx})_l^j + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (u_x)_l^j - ru_l^j \right] &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

当 $\theta=0$ 时, 式(9)为差分显式格式. 当 $\theta=1/2$ 时, 式(9)为 Crank-Nicolson 格式. 当 $\theta=1$ 时, 式(9)为隐式欧拉格式. 将式(8)代入到式(9)中, 生成具有 $n+3$ 个未知量的 $n+1$ 个方程. 为了使方程组具有唯一解, 还需要另外添加两个方程. 由式(5)的边界条件可得

$$\begin{aligned} u(x_{\min}, t_j) &= \gamma_1 \omega_{l-3}^j + \gamma_2 \omega_{l-2}^j + \gamma_1 \omega_{l-1}^j = \alpha(t_j), \\ u(x_{\max}, t_j) &= \gamma_1 \omega_{n-3}^j + \gamma_2 \omega_{n-2}^j + \gamma_1 \omega_{n-1}^j = \beta(t_j) \end{aligned} \tag{10}$$

于是, 对应的矩阵形式为

$$GW^j = HW^{j+1} + b \tag{11}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^* & \mu^* & \nu^* & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & \mu^* & \nu^* & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^* & \mu^* & \nu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^* & \mu^* & \nu^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix},$$

$H =$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & \nu & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W^j = [\omega_{l-3}^j, \omega_{l-2}^j, \omega_{l-1}^j, \cdots, \omega_{n-3}^j, \omega_{n-2}^j, \omega_{n-1}^j]^T,$$

$$W^{j+1} = [\omega_{l-3}^{j+1}, \omega_{l-2}^{j+1}, \omega_{l-1}^{j+1}, \cdots, \omega_{n-3}^{j+1}, \omega_{n-2}^{j+1}, \omega_{n-1}^{j+1}]^T,$$

$$b = [\alpha(t_j), 0, 0, \cdots, 0, 0, \beta(t_j)]^T,$$

$$\lambda^* = (1+r\theta\tau)\gamma_1 - \theta\tau\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma_3 - \frac{1}{2}\sigma^2\theta\tau\gamma_4,$$

$$\mu^* = (1+r\theta\tau)\gamma_2 - \frac{1}{2}\sigma^2\theta\tau\gamma_5,$$

$$\nu^* = (1+r\theta\tau)\gamma_1 + \theta\tau\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma_3 - \frac{1}{2}\sigma^2\theta\tau\gamma_4,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= (1-r(1-\theta)\tau)\gamma_1 + (1-\theta)\tau\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma_3 + \\ &\quad \frac{1}{2}\sigma^2(1-\theta)\tau\gamma_4, \end{aligned}$$

$$\mu = (1-r(1-\theta)\tau)\gamma_2 + \frac{1}{2}\sigma^2(1-\theta)\tau\gamma_5,$$

$$\begin{aligned} \nu &= (1-r(1-\theta)\tau)\gamma_1 - (1-\theta)\tau\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma_3 + \\ &\quad \frac{1}{2}\sigma^2(1-\theta)\tau\gamma_4. \end{aligned}$$

若终止向量 $W^m = (\omega_{m-3}^m, \cdots, \omega_{n-1}^m)^T$ 已知, 则第 j 时间层的逼近解 u_l^j 便可由递推公式(11)计算, 而终止向量 W^m 则由下列条件给出:

- (i) $(u_x)_0^m = 1,$
- (ii) $u_l^m = u(x_l, T), \quad l=0, 1, \cdots, n,$
- (iii) $(u_x)_n^m = 1,$

对应的矩阵形式为

$$AW^m = B \tag{12}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_3 & 0 & -\gamma_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_3 \end{bmatrix},$$

$$W^m = \begin{bmatrix} \omega_{-3}^m \\ \omega_{-2}^m \\ \omega_{-1}^m \\ \vdots \\ \omega_{n-3}^m \\ \omega_{n-2}^m \\ \omega_{n-1}^m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ u(x_0, T) \\ u(x_1, T) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, T) \\ u(x_n, T) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4 稳定性分析

将逼近解 $u(x, t)$ 和它在节点处的导数值代入式(9)可得差分方程

$$\lambda^* \omega_{l-3}^j + \mu^* \omega_{l-2}^j + \nu^* \omega_{l-1}^j = \lambda \omega_{l-3}^{j+1} + \mu \omega_{l-2}^{j+1} + \nu \omega_{l-1}^{j+1} \quad (13)$$

我们采用 Fourier 分析方法研究其稳定性所需要满足的条件. 令

$$\omega_l^j = \delta^j e^{i l \varphi}, \quad \varphi = \eta h \quad (14)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位, η 是波数. 将式(14)代入到式(13)中, 化简可得增长因子为

$$G(\varphi) = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} x_1 = \mu + (\lambda + \nu) \cos \varphi, \\ y_1 = (\nu - \lambda) \sin \varphi, \\ x_2 = \mu^* + (\lambda^* + \nu^*) \cos \varphi, \\ y_2 = (\nu^* - \lambda^*) \sin \varphi \end{cases} \quad (16)$$

根据 Von Neumann 条件, 要保证格式(13)稳定需满足条件 $|G(\varphi)| \leq 1$, 即

$$|G(\varphi)| = \sqrt{\frac{a(\varphi)}{b(\varphi)}} \leq 1 \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu(\lambda + \nu) \cos \varphi + 2\nu\lambda \cos 2\varphi, \\ b(\varphi) &= \lambda^{*2} + \mu^{*2} + \nu^{*2} + 2\mu^*(\lambda^* + \nu^*) \cos \varphi + 2\lambda^* \nu^* \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

易验证 $G(\varphi)$ 在 $\varphi = 0$ 处取到极大值. 在式(17)中令 $\varphi = 0$ 有

$$\left| \frac{\lambda + \mu + \nu}{\lambda^* + \mu^* + \nu^*} \right| = \left| \frac{1 - (1 - \theta)\tau\chi}{1 + \theta\tau\chi} \right| \leq 1 \quad (18)$$

其中

$$\chi = r + \frac{3}{8}\sigma^2 \tan^2 \frac{h}{4}.$$

从而解得

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\chi} \quad (19)$$

由此可知, 当满足式(19)时, 格式(13)是稳定的. 这表明当 $1/2 \leq \theta \leq 1$ 时差分格式(13)是无条件稳定的.

5 数值实验

考虑不支付红利的 6 个月期标的资产为股票的欧式看涨期权. 假设敲定价格为 10 美元, 无风险利率为每年 5%, 波动率为每年 20%, 用符号记为

$$T = 0.5, E = 10, r = 0.05, \sigma = 0.2.$$

计算区域为 $[1, 31] \times [0, 0.5]$, 相应的边界条件为 $\alpha(t) = 0, \beta(t) = S - Ee^{-r(T-t)}$. 其余参数与文献[13]中的取值相同.

数值实验中相对误差的计算公式为

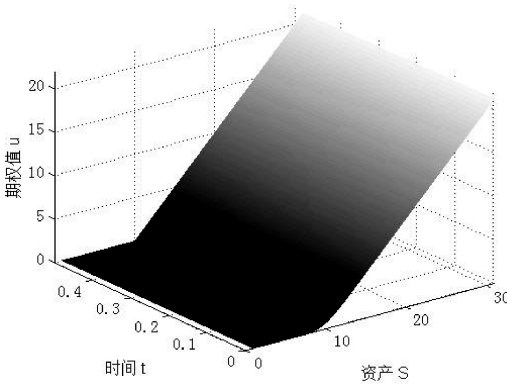
$$L_2 = \frac{\sqrt{\sum_i^n |U_i - u_i|^2}}{\sqrt{\sum_i^n |U_i|^2}},$$

其中 U_i 和 u_i 分别为在 $(x_i, 0)$ 处的解析解和逼近解. 所有计算均在一台 CPU 为 3.4GHz 和内存为 8GB 的机器上运行, 编程语言为 Matlab R2014a. 实验中 n 和 m 分别表示空间方向和时间方向的网格剖分数.

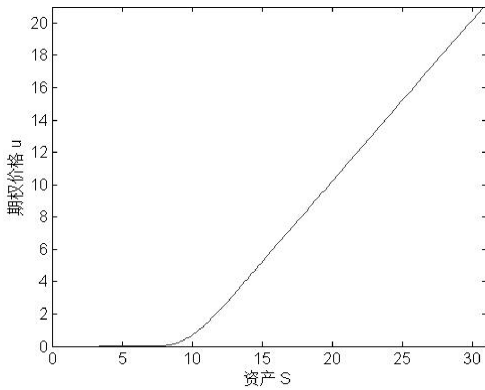
首先, 图 1 显示了当网格剖分为 $(m, n) = (300, 300)$ 时采用三次三角 B-样条配点法 ($\theta = 1/2$) 计算该欧式看涨期权所得的期权价格曲面以及当 $t = 0$ 时刻的期权值和相对误差. 从图中不难看出, 数值结果是稳定的.

其次, 选取不同的 θ 值, 对应的相对误差也不同, 如表 2 所示. 三次三角 B-样条配点法 (CTBS) 的相对误差随着网格剖分数的增大而变得越来越小, 而 $\theta = 1/2$ 的数值结果要好于 $\theta = 4/5$ 和 $\theta = 1$ 两种情形.

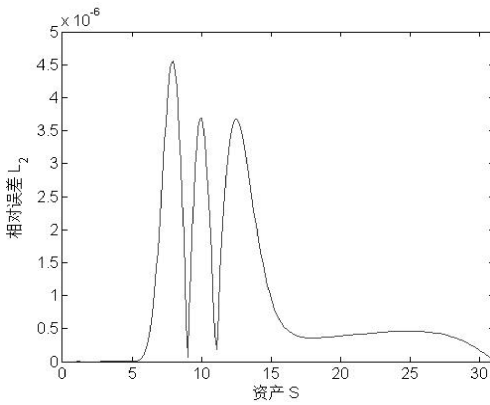
再次, 当网格剖分为 $(m, n) = (60, 300)$ 时, 三次三角 B-样条配点法 ($\theta = 1/2$) 与文献[7]中的 Crank-Nicolson 有限差分法 (FDCN) 计算的相对误差比较见图 2. 可以看出, 两种方法的相对误差走势基本相同. 而随着时间 t 减少, 三次三角 B-样条配点法的整体误差小于 Crank-Nicolson 有限差分法.



(a) 期权价格曲面



(b) 期权值



(c) 相对误差

图 1 欧式看涨期权

Fig. 1 European call option

表 2 取不同 θ 值时的相对误差比较

Tab. 2 Comparison of relative errors with different θ

(m, n)	CTBS($\theta=1/2$)	CTBS($\theta=4/5$)	CTBS($\theta=1$)
(20, 100)	7.19e-005	1.09e-004	1.55e-004
(40, 200)	1.30e-005	3.97e-005	6.74e-005
(60, 300)	4.99e-006	2.50e-005	4.40e-005
(80, 400)	3.21e-006	1.87e-005	3.30e-005
(100, 500)	2.53e-006	1.50e-005	2.65e-005

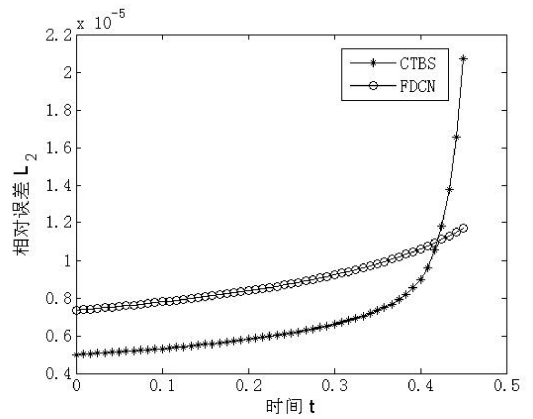


图 2 相对误差比较

Fig. 2 Comparison of relative errors

最后, 将本文三次三角 B-样条配点法(CTBS)与文献[13]中的三次 B-样条配点法(CBS)求解的相对误差和 CPU 时间作比较, 所得结果如表 3 所示. 两种数值方法所需要的 CPU 时间都随着网格的加密而变大. 在所用 CPU 时间几乎相同的情况下, 三次三角 B-样条配点法的数值结果要好于三次 B-样条配点法.

表 3 两种方法的相对误差和所需 CPU 时间比较

Tab. 3 Comparison of two methods on L_2 and CPU time

(m, n)	CTBS($\theta=1/2$)		CBS($\theta=1/2$)	
	L_2	CPU	L_2	CPU
(30, 150)	3.99e-005	0.07	4.12e-005	0.07
(50, 250)	1.34e-005	0.36	1.39e-005	0.36
(70, 350)	6.07e-006	1.42	6.28e-005	1.41
(90, 450)	3.09e-006	3.53	3.19e-006	3.53
(110, 550)	1.68e-006	8.98	1.72e-006	8.97

6 结论

本文研究了三次三角 B-样条配点法定价 Black-Scholes 欧式看涨期权. 数值实验显示, 文中所构造的数值方法在期权定价中是有效的, 其 Crank-Nicolson 格式($\theta=1/2$)的求解效率高于隐式欧拉格式($\theta=1$). 对相同的网格剖分, 三次三角 B-样条配点法计算的相对误差小于文献[7]中的 Crank-Nicolson 有限差分法和文献[13]中的三次 B-样条方法, 具有较高的数值精度.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. J Polit Econ, 1973, 81: 637.
 [2] Cox J C, Ross S, Rubinstein M. Option pricing: a

- simplified approach [J]. *J Financ Econ*, 1979, 7: 229.
- [3] Gaudenzi M, Pressacco F. An efficient binomial method for pricing American put options [J]. *Decis Econ Financ*, 2003, 26: 1.
- [4] Rubinstein M. On the relation between binomial and trinomial option pricing models [J]. *J Derivat*, 2000, 8: 47.
- [5] Liu Q, Guo S X. Variance-constrained canonical least-squares Monte Carlo: an accurate method for pricing American options [J]. *N Am J Econ Financ*, 2014, 28: 77.
- [6] Chawla M M, Evans D J. High-accuracy finite-difference methods for the valuation of options [J]. *Int J Comput Math*, 2005, 82: 1157.
- [7] Fadugba S E, Nwozo C R. Crank Nicolson finite difference method for the valuation of options [J]. *Pac J Sci Tec*, 2013, 14: 136.
- [8] Chacur A A, Ali M M, Salazar J G. Real options pricing by the finite element method [J]. *Comput Math Appl*, 2011, 61: 2863.
- [9] Angermann L, Wang S. Convergence of a fitted finite volume method for the penalized Black-Scholes equation governing European and American Option pricing [J]. *J Numer Math*, 2007, 106: 1.
- [10] 甘小艇, 殷俊峰. 二次有限体积法定价美式期权 [J]. *计算数学*, 2015, 37: 67.
- [11] Golbabai A, Ahmadian D, Milev M. Radial basis functions with application to finance: American put option under jump diffusion [J]. *Math Comput Model*, 2012, 55: 1354.
- [12] Rad J A, Parand K, Ballestra L V. Pricing European and American options by radial basis point interpolation [J]. *Appl Math Comput*, 2015, 251: 363.
- [13] Rashidinia J, Jamalzadeh S, Mohebianfar E. B-spline collocation approach to the solution of options pricing model [J]. *J Comput Sci Comput Math*, 2014, 4: 5.
- [14] Huang J, Cen Z D. Cubic spline method for a generalized Black-Scholes equation [J]. *Math Prob Eng*, 2014, 2014: 1.
- [15] Kadalbajoo M K, Tripathi L P, Kumar A. A cubic B-spline collocation method for a numerical solution of the generalized Black-Scholes equation [J]. *Math Comput Model*, 2012, 55: 1483.
- [16] Mohammadi R. Quintic B-spline collocation approach for solving generalized Black-Scholes equation governing option pricing [J]. *Comput Math Appl*, 2015, 69: 777.
- [17] Nazir T, Abbas M, Ismail A I M, *et al.* The numerical solution of advection-diffusion problems using new cubic trigonometric B-splines approach [J]. *Appl Math Model*, 2016, 40: 4586.
- [18] Abbas M, Majid A A, Ismail A I M, *et al.* The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems [J]. *Appl Math Comput*, 2014, 239: 74.
- [19] 陈彩龙, 韩晓玲. 分数阶常微分方程多点边值问题的上下解方法 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2017, 54: 43.
- [20] 张海燕, 李耀红. 一类高分数阶微分方程积分边值问题的正解 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2016, 53: 512.
- [21] 达举霞, 韩晓玲. 三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2016, 53: 1177.
- [22] 郑茂波, 胡兵. 耗散 SRLW 方程的拟紧致非线性有限差分逼近 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2015, 52: 715.
- [23] 李晓明, 余跃玉, 胡兵. 时间分数阶对流-扩散方程的有限差分法 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2013, 50: 225.
- [24] Hamid N N, Majid A A, Ismail A I M. Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two [J]. *Int J Math Comput Phys Elec Comput Eng*, 2010, 4: 1377.