2017 年 7 月　四川大学学报(自然科学版)　Jul. 2017
第 54 卷　第 4 期　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　Vol. 54　No. 4

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.008

特征值问题的组合杂交有限元方法

付　卫，王　皓，张世全
(四川大学数学学院，610064)

摘　要：本文将组合杂交有限元的思想应用于特征值问题，构造了求解最小特征值问题的一种新型有限元法. 首先，本文推导了最优误差估计，然后用数值算例验证了理论结果. 理论分析和数值算例表明，当组合系数 $\alpha \in (0,1)$ 时，本文的方法在最低阶时均能达到二阶精度，并且还能从数值算例中发现对于不同的 α，使得特征值问题最小值能从左右两个方向趋向于真实值，从而可以在粗网格上选取最优的 α 来得到更准确的结果.

关键词：组合杂交方法；特征值问题；混合有限元

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)04-0708-05

Combined hybrid finite element methods for eigenvalue problems

FU Wei, *WANG Hao*, *ZHANG Shi-Quan*
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we apply combined hybrid finite element methods to the eigenvalue problems and construct a new finite element method for solving the smallest eigenvalue. Firstly, we derive the optimal error estimation and then use numerical examples to verify our theoretical results. Both theoretical analyses and numerical results show that for all the combined coefficient $\alpha \in (0,1)$, our methods can obtain second order accuracy when the lowest order finite element spaces are used. From the numerical performance, we can also observe that the numerical solution can approach to the exact eigenvalue from both directions for different α, so we can choose the optimal α such that better approximations can be obtained on the coarse grid.

Keywords: Combined hybrid methods; Eigenvalue problems; Mixed finite element methods
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

偏微分方程的特征值问题是一类非常重要的实际问题，在很多领域都有广泛应用. 关于特征值问题的有限元法及其理论已有很多研究，如 Chatelin[1] 研究了 Banach 空间中线性算子特征值的数值逼近，Bubuska 和 Osborn[2] 以泛函分析为工具对二十世纪九十年代以前微分算子特征值问题协调有限元方法和混合有限方法[3] 的理论结果做了统一介绍. 林群和林甲富[4] 对有限元特征值的渐进展开和外推作了系统深入的讨论. 胡俊对集中质量有限元方法在特征值问题上的应用[5]. Andi 元在特征值上的应用做了研究[6]. 杨一都著有特征值问题有限元方法[7]，系统讲述了特征值问题的有限元方法和混合有限元方法. 此外还有一些比较少见的方法[8].

收稿日期：2017-03-18
基金项目：国家自然科学基金(11401407,11501389)
作者简介：付卫(1989－)，男，河南信阳人，硕士，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：1037137989@qq.com
通讯作者：张世全. E-mail：shiquanzhang@scu.edu.cn

组合杂交有限元方法首先由周天孝[9]提出，随后取得了很大的进展[10~15]. 组合杂交有限元方法是将同一泛函乘积空间上相互对偶的两种鞍点型变分格式做线性组合，优势互补，构成新的稳定方法. 组合杂交有限元方法不要求有限元空间满足任何 inf-sup 条件或平衡条件，通过单元水平消去应力参数，该方法能在整体计算量相当的情况下显著提高位移协调元的粗网格精度. 目前该方法已在线弹性问题[16]、R-M[13]板等问题中成功应用，但尚没有应用到特征值问题中. 本文将组合杂交有限元方法应用到特征值问题，构造了求解其最小特征值问题的一种新型有限元法.

2　特征值问题的组合杂交形式

考虑特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\ x\in\Omega,\qquad u=0,\ x\in\partial\Omega \tag{1}$$

这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为凸多边形区域. 设 (λ,u) 是特征值问题式 (1) 的特征对，对于 $\lambda\in\mathbf{R},0\neq u\in V=H_0^1(\Omega)$，有

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega uv\mathrm{d}x,\ \forall v\in V \tag{2}$$

引进新的函数 $\sigma=\nabla u$. 则原问题可整理成

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=\lambda u,\\ \boldsymbol{\sigma}=\nabla u,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{3}$$

对(3)式做变分可得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})=(\nabla u,\boldsymbol{\tau}),\forall\boldsymbol{\tau}\in W=(L^2(\Omega))^2 & (4)\\ (\boldsymbol{\sigma},\nabla v)=\lambda(u,v),\forall v\in V & (5)\end{cases}$$

根据组合有限元法的思想，在本文中我们将原始的变分形式与混合变分形式进行组合，即 α 乘以(4)式和 $(1-\alpha)$ 乘以(2)式加上 α 乘以(5)式：

$$\begin{aligned}&\alpha(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})-\alpha(\nabla u,\boldsymbol{\tau})=0,\forall\boldsymbol{\tau}\in W,\\&(1-\alpha)(\nabla u,\nabla v)+\alpha(\boldsymbol{\sigma},\nabla v)=\lambda(u,v),\\&\quad\forall v\in V\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为组合参数.

引入如下记号

$$a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})=\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}x,$$

$$b(\boldsymbol{\tau},u)=\int_\Omega\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla u\mathrm{d}x,$$

$$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x,$$

$$c(u,v)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x.$$

则式 (1) 的组合变分有限元形式如下

求 $(\lambda,\boldsymbol{\sigma},u)\in\mathbf{R}\times W\times V,(\boldsymbol{\sigma},u)\neq(0,0)$，使得

$$\alpha a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})-\alpha b(\boldsymbol{\tau},u)=0,\ \forall\boldsymbol{\tau}\in W \tag{7}$$

$$(1-\alpha)c(u,v)+\alpha b(\boldsymbol{\sigma},v)=\lambda(u,v)\ \ \forall v\in V \tag{8}$$

其中 V,W 上的内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)_V$ $\|\cdot\|_V$ 及 $(\cdot,\cdot)_W$ $\|\cdot\|_W$.

式(1)和式(7),(8)在 $u\in C^2(\Omega)$ 意义下是显然等价的. 所以为了求解式(7),(8)，构造有限元空间 $V_h\subset V,W_h\subset W$，把式(7),(8)限制在 $V_h\times W_h$ 上得到协调有限元格式：

求 $(\lambda_h,\boldsymbol{\sigma}_h,u_h)\in\mathbf{R}\times W_h\times V_h,(\boldsymbol{\sigma}_h,u_h)\neq(0,0)$，使得

$$\alpha a(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}_h)-\alpha b(\boldsymbol{\tau}_h,u_h)=0,\ \forall\boldsymbol{\tau}_h\in W_h \tag{9}$$

$$(1-\alpha)c(u_h,v_h)+\alpha b(\boldsymbol{\sigma}_h,v_h)=\lambda(u_h,v_h)\quad\forall v_h\in V_h \tag{10}$$

3　理论分析

3.1　特征值问题的组合杂交形式的算子理论

首先考虑组合杂交有限元的更一般形式如下：

求 $(\lambda,\boldsymbol{\sigma},u)\in\mathbf{R}\times W\times V,(\boldsymbol{\sigma},u)\neq(0,0)$，使得

$$\alpha a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})-\alpha b(\boldsymbol{\tau},u)=(f,\boldsymbol{\tau}),\ \forall\boldsymbol{\tau}\in W \tag{11}$$

$$(1-\alpha)c(u,v)+\alpha b(\boldsymbol{\sigma},v)=(g,v)_V,\forall v\in V \tag{12}$$

为了和特征值问题混合元方法类似，我们这里只考虑式(11),(12)对应的边值问题式(7),(8)($(0,g)$ 型)，及其离散格式(9),(10)式($(0,g)$ 型).

首先，因为组合杂交方法不需要限元空间满足任何 inf-sup 条件[9]，则对任意 $g\in V$，式(11),(12)存在唯一的解 $(\boldsymbol{\sigma},u)$，其对应的离散形式存在唯一的解 $(\boldsymbol{\sigma}_h,u_h)$. 于是可以定义线性有界算子

$S:V\to W,Sg=\boldsymbol{\sigma}$,

$S_h:V_h\to W_h,S_hg=\boldsymbol{\sigma}_h$,

$T:V\to V,Tg=u$,

$T_h:V_h\to V_h,T_hg=u_h$,

$C:V\to V,\forall u\in V,(Cu,v)=c(u,v),\forall v\in V$,

$C_h:V_h\to V_h,\forall u_h\in V_h,(C_hu_h,v_h)=c(u_h,v_h),\forall v_h\in V_h$.

则得到式(7),(8)等价的算子形式

$$\lambda Tu=u \tag{13}$$

$$(1-\alpha)Cu+\alpha\boldsymbol{\sigma}=S(\lambda u) \tag{14}$$

和式(9),(10)的等价的算子形式

$$\lambda_hT_hu_h=u_h \tag{15}$$

$$(1-\alpha)C_h u_h+\alpha\boldsymbol{\sigma}_h=S_h(\lambda_h u_h) \tag{16}$$

根据特征值问题的混合有限元法的算子理论[7],我们首先需要证明如下引理.

引理 3.1 T,T_h 是自共轭算子,C,C_h 是对称正定算子.

证明 首先,根据双线性形式 $c(u,v)$ 的对称正定性,C,C_h 是对称正定是显然的.

其次,利用与文献[7],[17]类似的技巧,容易得到 T,T_h 是自共轭算子.证毕.

引理 3.2 $\forall g\in V_h$,成立

$$\begin{aligned}((T-T_h)g,g)_{V_h}= & \\ & -\alpha a((S-S_h)g,(S-S_h)g)+ \\ & 2\alpha b((S-S_h)g,Tg-v_h)+ \\ & (1-\alpha)c(Tg-T_hg,Tg+T_hg-2v_h), \\ & \forall v_h\in V_h\end{aligned} \tag{17}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)c(Tg-T_hg,v_h)+ \\ &\quad \alpha b(Sg-S_hg,v_h)=0,\forall v_h\in V_h\end{aligned} \tag{18}$$

所以

$$\begin{aligned}&b(S_hg,T_hg-Tg)= \\ &\quad b(S_hg,T_hg)-b(S_hg,Tg)= \\ &\quad b(Sg-S_hg,Tg)+\frac{1}{\alpha}(g,T_hg-Tg)+ \\ &\quad \frac{(1-\alpha)}{\alpha}c(Tg-T_hg,Tg+T_hg).\end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}&(Tg-T_hg,g)= \\ &\quad \alpha b(Sg-S_hg,Tg)+\alpha b(S_hg,Tg-T_hg)+ \\ &\quad (1-\alpha)c(Tg-T_hg,Tg+T_hg),\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}&b(S_hg,Tg-T_hg)=-a(S_hg-Sg,S_hg)= \\ &\quad -a(S_hg-Sg,S_hg-Sg)-a(S_hg-Sg,Sg)= \\ &\quad -a(S_hg-Sg,S_hg-Sg)-b(S_hg-Sg,Tg).\end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}&((T-T_h)g,g)_{V_h}=- \\ &\quad \alpha a((S-S_h)g,(S-S_h)g)+ \\ &\quad 2\alpha b(Sg-S_hg,Tg-v_h)+ \\ &\quad 2\alpha b(Sg-S_hg,v_h)+ \\ &\quad (1-\alpha)c(Tg-T_hg,Tg+T_hg)= \\ &\quad -\alpha a((S-S_h)g,(S-S_h)g)+ \\ &\quad 2\alpha b(Sg-S_hg,Tg-v_h)+(1- \\ &\quad \alpha)c(Tg-T_hg,Tg+T_hg-2v_h).\end{aligned}$$

有了上面两个引理的准备,我们可以得到如下的定理.

定理 3.3 设 $\|T-T_h\|_{V_h}\to 0(h\to 0)$,$(\lambda_h,\boldsymbol{\sigma}_h,u_h)$是式(9),(10)的第 k 个特征对,$\|u_h\|_{V_h}=1$,λ 是式(7),(8)的第 k 个特征值,则 $\lambda_h\to\lambda(h\to 0)$,且存在相应于 λ 的特征函数$(\boldsymbol{\sigma},u)$,$\|u\|_V=1$,使下列恒等式成立:

$$\begin{aligned}\lambda_h-\lambda= & -\lambda^2(\alpha a((S-S_h)u,(S-S_h)u)- \\ & 2\alpha b((S-S_h)u,(Tu-v_h))- \\ & (1-\alpha)c((T-T_h)u,Tu+T_hu-2v_h))+ \\ & R_1,\forall v_h\in V_h\end{aligned} \tag{19}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{W_h}=\|S_h(\lambda u)-S(\lambda u)\|_{W_h}+R_2 \tag{20}$$

$$\|u-u_h\|_{V_h}=\|T_h(\lambda u)-T(\lambda u)\|_{V_h}+R_3 \tag{21}$$

其中$|R_1|\leqslant C\|(T-T_h)|_{V_\lambda}\|_{V_h}^2$;$|R_2|,|R_3|\leqslant C\|(T-T_h)|_{V_\lambda}\|_{V_h}$,$V_\lambda$ 是相应于 λ 的全体特征函数张成的空间.

证明 证明过程与文献[7]定理 5.1.1 类似,只是多加了一个对称正定项 $c(\cdot,\cdot)$).略.

定理 3.4 设定理 3.3 的条件满足,则 $\lambda_h\to\lambda(h\to 0)$,且存在相应于 λ 的特征函数$(\boldsymbol{\sigma},u)$,$\|u\|_V=1$,使下列恒等式成立:

$$\begin{aligned}\lambda_h-\lambda = & -\lambda_h^2(\alpha((S-S_h)u_h,(S-S_h)u_h)- \\ & 2\alpha b((S-S_h)u_h,(Tu_h-v_h))- \\ & 2(1-\alpha)c((T-T_h)u_h,Tu_h+ \\ & T_hu_h-v_h)) + R_1,\forall v_h\in V_h\end{aligned} \tag{22}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{W_h}=\|S_h(\lambda u_h)-S(\lambda u_h)\|_{W_h}+R_2 \tag{23}$$

$$\|u-u_h\|_{V_h}=\|T_h(\lambda u_h)-T(\lambda u_h)\|_{V_h}+R_3 \tag{24}$$

其中 $|R_1|\leqslant C\|(T-T_h)|_{V_\lambda}\|_{V_h}^2$;$|R_2|,|R_3|\leqslant C\|(T-T_h)|_{V_\lambda}\|_{V_h}$.

证明 这个定理只是定理 3.3 的离散形式,证明略.

3.2 特征值问题组合杂交形式的误差估计

下面介绍组合杂交有限元格式的具体构造.设 $K^h=\{k\}$是 Ω 上一族规则的任意四边形剖分[18],令 $\hat{k}=[-1,1]^2$ 为参考单元,$\forall k\in K^h$,$F_k:\hat{k}\to k$ 为标准的双线性变换.定义有限元空间

$$\begin{aligned}W_h=\{&\psi=(\psi_1,\psi_2):\psi_1|_k\in P^m(\hat{k})\circ F_k^{-1}, \\ &\psi_2|_k\in P^m(\hat{k})\circ F_k^{-1},\forall k\in K^h\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_h=\{&u|u\in H_0^1(\Omega);u|_k\in \boldsymbol{Q}^{(m+1)}(\hat{k})\circ F_k^{-1}, \\ &\forall k\in K^h,u|_{\partial\Omega}=0\}.\end{aligned}$$

下面利用定理 3.3 讨论式(9),(10)的误差估计.

定理 3.5　假设 $(\lambda,\boldsymbol{\sigma},u)$ 是问题式(1)的解，$(\lambda_h,\boldsymbol{\sigma}_h,u_h)$是问题式(9)，(10)的解，并且假设特征值问题的特征函数 $u\subset H^{m+2}(\Omega)$. 则成立如下误差估计形式

$$|\lambda-\lambda_h|\leqslant Ch^{2m+2},$$

$$\|u-u_h\|_0\leqslant Ch^{m+1},$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_0\leqslant Ch^{m+1}.$$

证明　由定理 3.3 可知，杂交组合形式只是比混合形式多了对称正定项，从而由边值问题的正则性可知

$$|\lambda-\lambda_h|=\lambda^2\alpha a(S-S_h)u,(S-S_h)u)-2\alpha b((S-S_h)u,(Tu-v))-2(1-\alpha)c((T-T_h)u,Tu+T_hu-v))+R_1\leqslant \lambda^2\alpha C_1h^{2m+2}+2\lambda^2\alpha C_2h^{2m+2}+2\lambda^2(1-\alpha)C_3h^{2m+2}+Ch^{2m+2}\leqslant Ch^{2m+2}.$$

同样，和文献[7]类似，可得

$$\|u-u_h\|_0\leqslant Ch^{m+1},$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_H\leqslant Ch^{m+1}.$$

证毕.

3.3　组合杂交有限元的离散方程组

本节考虑组合杂交方法的快速实现. 令 V_h 的一组基为$\{\varphi_i\}_1^n$，W_h 的一组基为$\{\psi_j\}_1^d$，则

$$u_h=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{q}_i\varphi_i,\ \boldsymbol{\sigma}_h=\sum_{j=1}^d\boldsymbol{p}_j\psi_j,$$

$$a_{l,t}=a(\psi_l,\psi_t),b_{t,i}=b(\psi_t,\varphi_i),$$

$$c_{i,j}=c(\varphi_i,\varphi_j),\boldsymbol{q}_{i,j}=(\varphi_i,\varphi_j)$$

$$A=(a_{l,t})_{d\times d},B=(b_{t,i})_{d\times n},\ C=(c_{i,j})_{n\times n},$$

$$M=(\boldsymbol{q}_{i,j})_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)^T,$$

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_d)^T$$

则组合杂交方法式(9)，(10)对应的矩阵形式为

$$\begin{cases}\alpha A\boldsymbol{p}-\alpha B\boldsymbol{q}=0 & (25)\\ (1-\alpha)C\boldsymbol{q}+\alpha B^T\boldsymbol{p}=\lambda_hM\boldsymbol{q} & (26)\end{cases}$$

考虑到矩阵 A 是对称正定的，由式(25)可知 $\boldsymbol{p}=A^{-1}B\boldsymbol{q}$. 将其代入式(26)得到

$$[(1-\alpha)C+\alpha B^TA^{-1}B]\boldsymbol{q}=\lambda_hM\boldsymbol{q}.$$

由此便可以得出问题式(1)的特征值和特征函数.

注　由于应力参数可在单元水平消去，组合杂交方法的整体计算量与纯位移元式(2)相当. 与标准混合形式(4)，(5)式相比，组合杂交方法不要求有限元空间满足任何的稳定条件，应力空间和位移空间可以自由选取.

4　数值试验

在模型问题式(1)中取 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，此时其最小特征值为 $2\pi^2\approx19.7392$. 本文考虑两个数值算例. 第一个数值算例是取最低阶情形即 $m=0$，此时 W_h 为分片常数，V_h 为分片双线性元，按照误差估计，收敛的阶应该是 2 阶，由表 1 可知，数值结果与理论分析吻合.

表 1　分片常数与双线性元 $\lambda_h-\lambda$ 的计算结果

Tab. 1　The results of $\lambda_h-\lambda$ by using piecewise constant and bilinear elements

h \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1/2	3.6608	3.0608	2.4608	1.8608	1.2608	0.6608	0.0608	−0.5392	−1.1392
1/4	0.9217	0.8093	0.697	0.5891	0.4722	0.3598	0.2474	0.1351	0.0227
1/8	0.2289	0.2029	0.1769	0.1509	0.1248	0.0988	0.0728	0.0467	0.0207
1/16	0.0571	0.0507	0.0444	0.038	0.0316	0.0252	0.0188	0.0124	0.0061
1/32	0.0143	0.0127	0.0111	0.0095	0.0079	0.0063	0.0048	0.0032	0.0016
1/64	0.0036	0.0032	0.0028	0.0024	0.002	0.0016	0.0012	0.0008	0.0004
order	1.9980	1.9803	1.9559	1.9849	1.9819	1.9773	1.9425	1.8793	1.9307

由上表可得，对所有的 $\alpha\in(0,1)$，我们的方法都能达到二阶精度. 当 α 靠近 0 时，λ_h 从上界趋近于真实值，当 α 靠近 1 时从下界趋近于真实值，所以当取特殊的 α 值时就可以在粗网格上得到很好的近似值，经过测试当 α 取 0.711 时就可以得到 λ_h 在第一层网格上的值就是 19.7391.

第二个数值算例取 m=1,此时 W_h 为分片线性元,V_h 为分片双二次元.按照理论分析,此时的收敛阶应该是 4 阶,由表 2 可知,数值结果与理论分析吻合.

表 2 分片线性与双二次元 $\lambda_h-\lambda$ 的计算结果

Tab. 2 The results of $\lambda_h-\lambda$ by using piecewise linear and biquadratic elements

h \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1/2	0.1209	−0.0245	−0.1290	−0.2519	−0.4026	−0.5975	−0.8707	−1.3033	−2.1413
1/4	0.0041	−0.0022	−0.0089	−0.0163	−0.0248	−0.0350	−0.0488	−0.0712	−0.1284
1/8	3E−04	−1E−04	−5E−04	−9E−04	−0.0014	−0.0018	−0.0024	−0.0031	−0.0045
1/16	1.6E−05	−8E−06	−3E−05	−6E−05	−8E−05	−1E−04	−1E−04	−2E−04	−2E−04
order	4.3273	3.9683	4.0078	4.0644	3.9917	4.1816	4.3657	4.2227	4.4621

同样,由上表可以得出,对所有的 $\alpha\in(0,1)$,我们的方法都能达到四阶精度.同时 α 靠近 0 时,λ_h 从上界趋近于真实值,当 α 靠近 1 时从下界趋近于真实值,所以当取特殊的 α 值时就可以在粗网格上得到很好的近似值,经过测试当 α 取 0.1742 时就可以得到 λ_h 在第一层网格上的值就是 19.7393.

参考文献:

[1] Chatelin F. Spectral Approximation of Linear Operators [M]. New York: Academic Press, 1983.

[2] Ciarlet P G, Lions J L. Finite element methods (Part I) [M]. North-Holand: Elsevier Science Publishers, 1991.

[3] Gatica G N. A simple introduction to the mixed finite element method [M]. New York: Springer International Publishing, 2014.

[4] Lin J, Lin Q. Global superconvergence of the mixed finite element methods for 2-d maxwell equations [J]. J Comput Math, 2003, 21: 637.

[5] Hu J, Huang Y Q, Shen H. The lower approximation of eigenvalue by lumped mass finite element method [J]. J Comput Math, 2004, 22: 545.

[6] Hu J, Huang Y. The correction operator for the canonical interpolation operator of the Adini element and the lower bounds of eigenvalues [J]. Sci China Math, 2012, 55: 187.

[7] 杨一都. 特征值问题有限元方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[8] 耿天梅,高承华,王燕霞. 非线性三阶差分方程三点特征值问题的正解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1215.

[9] 周天孝. 基于鞍点问题对偶组合的有限元法及其理论[J]. 中国科学, 1997, 27: 75.

[10] 曹睿,谢小平,王宇,等. 组合杂交有限元法对 Wilson 元的改进[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2009, 46: 315.

[11] Nie Y, Zhou T. 8-node hexahedron combined hybrid elements with high performance [J]. J Numer Methods Comput Appl, 2003, 24: 231.

[12] Zhou T, Xie X. Zero energy-error mechanism of the combined hybrid method and improvement of Allman's membrane element with drilling d. o. f.'s [J]. Commun Numer Meth Engng, 2004, 20: 241.

[13] Zhou T, Xie X. Coarse-mesh-accuracy improvement of bilinear Q4-plane element by the combined hybrid finite element method [J]. Appl Math Mech, 2003, 24: 1456.

[14] Xie X. From energy improvement to accuracy enhancement: improvement of plate bending elements by the combined hybrid method [J]. J Comput Math, 2004, 22(4): 581.

[15] 张世全,冯印江,童蓓蕾. 采用常应力模式的 8 节点组合杂交六面体有限元[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2009, 46: 1265.

[16] Zhou T. Stabilized hybrid finite element methods based on the combination of saddle point principles of elasticity problems [J]. Math Comput, 2003, 72: 1655.

[17] 何挺,胡兵,徐友才. 广义 Rosenau 方程的有限元方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1.

[18] 曾凤,冯民富. Stokes-Darcy 耦合问题的新等阶元投影稳定化方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 937.