doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.002

带有导数项的 Neumann 问题正解的存在性

闫东亮，马如云
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘 要：本文研究了带有导数项的非线性 Newmann 问题

$$\begin{cases} u''(t)+ku(t)=f(t,u(t),u'(t)),t\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $0<k\leqslant\frac{\pi^2}{4}$，$f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 连续. 当函数 $f(t,x,y)$ 关于 x 和 y 满足一定的超线性增长条件及 Nagumo 条件时，本文得到了问题正解的存在性. 主要结果的证明基于不动点指数理论.

关键词：正解；Newmann 问题；不动点指数理论
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)06-1136-05

Existence of positive solutions of a second-order Neumann problem with derivative term

YAN Dong-Liang, *MA Ru-Yun*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070 China)

Abstract: Under the conditions that the nonlinear term $f(t,x,y)$ is superlinear growth on x and y and satisfies Nagumo-type conditions, the existence of positive solutions of the following second-order Newmann problem with derivative terms

$$\begin{cases} u''(t)+ku(t)=f(t,u(t),u'(t)),t\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

is considered, where $0<k\leqslant\frac{\pi^2}{4}$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ is continuous. The proof is based on the fixed point index theory in cones

Keywords: Positive solution; Newmann problems; Fixed point index theory
(2010 MSC 34B15, 34B18)

1 引 言

Neumann 边值问题具有广泛的物理背景. 对此类问题的研究已经取得了许多结果[1-5]. 2000 年，Jiang[2]研究了二阶 Newmann 问题

$$\begin{cases} u''(t)+au(t)=f(t,u(t)),t\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=0\end{cases}\tag{1}$$

正解的存在性，其中 $a\in(0,\frac{\pi^2}{4})$ 是一个常数. 在非线性项 f 满足超线性或次线性条件下，Jiang 得到了问题(1)正解的存在性，所用的工具是锥拉伸

收稿日期：2016-04-10
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626061)
作者简介：闫东亮(1990－)，女，甘肃平凉人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：yhululu@163.com
通讯作者：马如云. mary@nwnu.edu.cn

与锥压缩不动点定理. 该方法不能处理带有导数 u' 的非线性项. 2007 年, Jiang[3] 运用上下解方法获得了非线性 Newmann 问题

$$\begin{cases} u''(t)+Mu(t)=f(t,u(t),u'(t)), \\ \quad t\in(0,T), \\ u'(0)=u'(T)=0 \end{cases} \tag{2}$$

解的存在性,但未获得正解的存在性. 2008 年, Zhang[5] 又运用 Leray - Schauder 度理论研究了问题 (2) 正解的存在性,即,若记

$$f_0=\liminf_{|x|+|y|\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{|x|+|y|},$$

$$f^0=\limsup_{|x|+|y|\to0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{|x|+|y|},$$

$$f_\infty=\liminf_{|x|+|y|\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{|x|+|y|},$$

$$f^\infty=\limsup_{|x|+|y|\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{|x|+|y|}$$

并假设非线性项 f 满 $f_0>\lambda_1, f_\infty=0$,则问题(2)至少存在一个正解,其中 λ_1 是对应线性特征值问题的第一个特征值.

在上述条件下, $f(t,x,y)$ 关于 x 和 y 是次线性增长的. 那么,当 $f(t,x,y)$ 关于 x 和 y 是超线性增长时, 问题(2)是否存在一个正解呢? 相比次线性问题,处理超线性问题会更加复杂. 受以上文献启发, 本文运用不动点指数理论研究带有导数项的非线性二阶 Neumann 问题

$$\begin{cases} u''(t)+ku(t)=f(t,u(t),u'(t)), \\ \quad t\in(0,1), \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性,其中 $0<k\leqslant\frac{\pi^2}{4}$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 连续, $\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$. 令 $g(t,x,y)=-ax+f(t,x,y)$. 设 $g(t,x,y)$ 关于 y 满足以下的 Nagumo 条件:

(H_1) 对任意给定常数 $M>0$, 存在连续函数 $G_M(\rho)$, 使得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho+1)}=+\infty;$$

(H_2)

$$g(t,x,y)\leqslant G_M(|y|),(t,x,y)\in I\times[0,M]\times\mathbf{R}.$$

本文主要结果是

定理 1.1　设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 连续, $0<k\leqslant\frac{\pi^2}{4}$, 若 f 满足 (H_1), (H_2), 且存在非负常数 m,n, 满足 $\frac{m}{\pi}+n<1$ 及 $\delta>0$, 使得

$$f(t,x,y)\leqslant mx+ny, t\in I, |(x,y)|\leqslant\delta,$$

以及

(H3) 存在 $c>\frac{\pi^2}{4}$ 及 $C_0>0$, 使得

$$f(t,x,y)\leqslant cx-C_0,(t,x,y)\in I\times[0,M]\times\mathbf{R},$$

则问题(3)至少存在一个正解.

2　预备知识

令 $I=[0,1]$, $C(I)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数空间,在范数 $\|u\|_C=\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}\{|u|\}$ 下构成 Banach 空间. 设 $C^1(I)=C^1[0,1]$, 其在范数 $\|u\|_{C^1}=\max_{t\in[0,1]}\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$ 下构成 Banach 空间. 令 $C^+(I)$ 为 $C(I)$ 中所有非负函数构成的锥.

$$(u,v)=\int_0^1u(t)v(t)\mathrm{d}t,$$

$$\|u\|_2=(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $h(t)\in C(I)$. 考虑线性 Newmann 问题

$$\begin{cases} u''(t)+ku(t)=h(t), t\in(0,1), \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

由文献[3]可知,当参数 k 满足 $0<k\leqslant\frac{\pi^2}{4}$ 时,问题(4)非共振,且有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)h(s)\mathrm{d}s:=Sh(t).$$

其中,Green 函数 $G(t,s)$ 为

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cosh(m(1-t))\cosh(ms)}{m\sinh m}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1, \\ \dfrac{\cosh(m(1-s))\cosh(mt)}{m\sinh m}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1,\end{cases}$$

且 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上为正,这里 $m=\sqrt{k}$. 容易验证,算子 $S:C(I)\to C^2(I)$ 是全连续算子.

记 $\varphi(t)=\cosh(m(1-t))$, $\psi(t)=\cosh(mt)$, $0<t<1$. 则

$$G(t,s)=\frac{1}{m\sinh m}\begin{cases}\varphi(t)\psi(s), 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1, \\ \varphi(s)\psi(t), 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1.\end{cases}$$

由于

$$\varphi'(t)=-m\sinh(m(1-t))<0,$$

$$\psi'(t)=m\sinh(mt)>0, 0<t<1,$$

$\varphi(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递减, $\psi(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递增. 因为 $0\leqslant m(1-t)\leqslant m$, $0\leqslant mt\leqslant m$, 根据 $\cosh(x)$ 的单调性得

$$1 \leqslant \cosh(m(1-t)) \leqslant \cosh m,$$
$$1 \leqslant \cosh(mt)) \leqslant \cosh m.$$

则

$$1 \leqslant \varphi(t)\psi(s) \leqslant \cosh^2 m,$$
$$1 \leqslant \varphi(s)\psi(t) \leqslant \cosh^2 m.$$

易见

$$\frac{1}{m\sinh m} = A \leqslant G(t,s) \leqslant B = \frac{\cosh^2 m}{m\sinh m},$$
$$1 \geqslant \frac{G(t,s)}{B} \geqslant \sigma.$$

所以

$$\min u(t) = \min\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s \geqslant \sigma\int_0^1 Bh(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}s \geqslant \sigma \| u \|_\infty.$$

定义锥 $K:=\{u \in C^1(I) \mid u(t) \geqslant 0, \min u(t) \geqslant \sigma \| u \|_\infty\}$, 其中 $\sigma = 1/\cosh^2 m$. 对于任意的 $u \in K$, 令

$$F(u)(t):= f(t,u(t),u'(t)), t \in I.$$

则 $F:K \to C^+(I)$ 全连续.

定义复合算子

$$A:K \to K, Au = S \circ F(u).$$

由算子 S 的全连续性可知,算子 A 是全连续的. 若 $u \in K$, 则

$$\min Au(t) = \int_0^1 G(t,s)F(u)(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{\cosh^2 m}\int_0^1 G(s,s)F(u)(s)\mathrm{d}s \geqslant \sigma \| Au \|.$$

从而算子 $A:K \to K$.

引理 2.1 设 $h \in C^+(I)$, 其 u 为问题(4)的一个解. 则

(1) 令 $u = \bar{u} + \tilde{u}$, 其中 $\bar{u} = u(0)$, $\tilde{u}(0) = 0$, 则 $\| \tilde{u} \|_C \leqslant \| \tilde{u}' \|_C$, $\| \tilde{u} \|_{C^1} = \| \tilde{u}' \|_C$;

(2) 存在常数 ξ, $0 < \xi < 1$, 使得当 $t \in (0,\xi)$ 时, $u'(t) > 0$; 当 $t \in (\xi,1)$ 时, $u'(t) < 0$.

证明 设 u 是问题(4)的一个解. 则

$$\| \tilde{u}(t) \| \leqslant \int_0^1 |\tilde{u}'(s)| \mathrm{d}s \leqslant t \| \tilde{u}' \|_C \leqslant \| \tilde{u}' \|_C.$$

所以 $\| \tilde{u} \|_C \leqslant \| \tilde{u}' \|_C$. 因为 $u'(0) = u'(1) = 0$, 根据罗尔定理,存在 $0 < \xi < 1$, 使得 $u''(\xi) = 0$. 则 $u'(\xi)$ 是一个常数. 结合边界条件,命题得证.

引理 2.2[3] 设 $u \in C^1[a,b]$ 使得 $\bar{u} = 0$. 则

$$\| u \|_2 \leqslant \frac{b-a}{\pi} \| u' \|_2,$$
$$\| u \|_\infty \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_2.$$

引理 2.3[7] 令 E 为一个 Banach 空间, $K \subset E$ 是 E 中的一个闭凸锥, Ω 是 E 中的有界开集,边界为 $\partial\Omega$, 且 $K \cap \overline{\Omega} = \varnothing$. 令 $A:K \cap \overline{\Omega} \to K$ 为一个全连续算子. 对于任意的 $u \in K \cap \partial\Omega$, 不动点指数 $i(A,K \cap \Omega,K)$ 有定义. 若对于任意的 $0 < \mu \leqslant 1$, $u \in K \cap \partial\Omega$ 有 $\mu Au \neq u$, 则 $i(A,K \cap \Omega,K) = 1$.

引理 2.4[7] 令 Ω 为 E 中的有界开集, $A:K \cap \overline{\Omega} \to K$ 是一个全连续算子. 如果存在 $v_0 \in K\backslash\Omega$ 使得对于任意的 $u \in K \cap \partial\Omega$, $\tau \geqslant 0$, 有 $u - Au \neq \tau v_0$, 则 $i(A,K \cap \Omega,K) = 0$.

引理 2.5[7] 令 Ω 为 E 中的有界开集, A_1, $A_2:K \cap \overline{\Omega} \to K$ 为两个全连续算子. 如果对于任意的 $u \in K \cap \partial\Omega$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, 有 $(1-s)A_1 u + sA_2 u \neq u$, 则 $i(A_1,K \cap \Omega,K) = i(A_2,K \cap \Omega,K)$.

3 定理 1.1 的证明

设 $0 < r < R < +\infty$. 定义集合

$$\Omega_1 = \{u \in C^1(I) \mid \| u \|_{C^1} < r\},$$
$$\Omega_2 = \{u \in C^1(I) \mid \| u \|_{C^1} < R\} \tag{5}$$

这里 $r \in (0,\delta)$, δ 由条件(H_2)给出.

假设存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ 及 $0 < \mu \leqslant 1$, 使得

$$\mu Au_0 = u_0.$$

则 $u_0 = S(\mu_0 F(u_0))$. 由 S 的定义可知, u_0 是当 $h = \mu_0 F_{u_0}$ 时线性问题(4)的解, u_0 满足边值问题

$$\begin{cases} u_0''(t) + ku_0(t) = \mu_0 f(t,u_0(t),u_0'(t)), \\ \quad t \in [0,1], \\ u_0'(0) = u_0'(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

由于 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_1$, 所以

$$u_0(t) \geqslant 0, |(u_0(t),u_0'(t))| < \delta, t \in [0,1].$$

由条件(H_2)知

$$0 \leqslant f(t,u_0(t),u_0'(t)) \leqslant mu_0(t) + n|u_0'(t)|,$$

即

$$u_0''(t) + ku_0(t) = f(t,u_0(t),u_0'(t)) \leqslant mu_0(t) + n|u_0'(t)|.$$

所以

$$u_0''(t) \leqslant -ku_0(t) + mu_0(t) + n|u_0'(t)| \leqslant mu_0(t) + n|u_0'(t)|.$$

再由引理 2.2 知

$$\| u_0'' \|_{L_2} \leqslant m \| u_0 \|_{L_2} + n \| u_0' \|_{L_2} \leqslant (\frac{m}{\pi} + n) \| u_0'' \|_{L_2}.$$

所以 $1 \leqslant \frac{m}{\pi} + n$. 这与条件($H_2$)矛盾. 所以不存在

这样 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ 及 $0 < \mu \leqslant 1$，使得 $\mu A u_0 = u_0$. 从而由引理 2.3 可知，$i(A, K \cap \Omega, K) = 1$.

另一方面，当 R 充分大时，可证明 $i(A, K \cap \Omega_2, K) = 0$. 定义 $F_1: K \to C^+(I)$，

$$F_1(u)(t) := f(t, u(t), u'(t)) + C_0 = F(u)(t) + C_0, t \in I,$$

其中 C_0 是条件(H_3)里的常数. 令 $A_1 = S \circ F_1$. 那么 $A_1: K \to K$ 是全连续算子.

我们首先证明 $i(A_1, K \cap \Omega_2, K) = 0$. 选择 $v_0 = \cos \frac{\pi}{2} t$. 那么 $v_0 = S((-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0)$. 容易验证 $v_0 \in K \backslash \Omega$. 以下证明当 $v_0 \in K \cap \partial\Omega_2$ 时 A_1 满足引理 2.4 的条件，即

$$u - A_1 u \neq \tau v_0, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2, \tau \geqslant 0 \tag{7}$$

反设(7)式不成立. 则存在 $u_1 \in K \cap \partial\Omega_2, \tau \geqslant 0$，使得 $u_1 - A_1 u = \tau_0 v_0$. 由于

$$u_1 = A_1 u + \tau_0 v_0 = S(F(u_1) + C_0 + \tau_0(-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0),$$

所以 u_1 是当

$$h = F(u_1) + C_0 + \tau_0(-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0 \in C^+(I)$$

时线性边值问题(4)的唯一解. 因此 $u_1 \in C^2(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u_1''(t) + k u_1(t) = f(t, u_1(t), u_1'(t)) + \\ \quad C_0 + \tau_0(-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0, t \in [0,1], \\ u_1'(0) = u_1'(1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

由于 $u_1 \in K \cap \partial\Omega_2$，所以 $u_1(t) \geqslant 0, t \in I$. 由条件($H_3$)可知，

$$f(t, u_1(t), u_1'(t)) \geqslant c u_1(t) - C_0, t \in I.$$

由以上不等式和(8)式可得

$$u_1''(t) + k u_1(t) = f(t, u_1(t), u_1'(t)) + C_0 + \tau_0(-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0(t) \geqslant c u_1(t) + \tau_0(-\frac{\pi^2}{4} + k) v_0 \geqslant c u_1(t), t \in I.$$

对上面不等式在 I 上积分，得

$$\int_0^1 u_1''(t) + \int_0^1 k u_1(t) \geqslant \int_0^1 c u_1(t).$$

由于 $u_1{}'(0) = u_1{}'(1)$，所以

$$k \int_0^1 u_1(t) \mathrm{d}t \geqslant c \int_0^1 u_1(t) \mathrm{d}t \tag{9}$$

这说明 $k \geqslant c$. 而由条件(H_3)可知，$c > \frac{\pi^2}{4}$. 矛盾！因此(7)式成立.

下一步，我们证明当 R 充分大时，A 和 A_1 在 $K \cap \partial\Omega_2$ 上满足引理 2.5 的条件，即

$$(1 - s) A u + s A_1 u \neq u, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2, 0 \leqslant s \leqslant 1 \tag{10}$$

假设(10)式不成立，则存在 $u_2 \in K \cap \partial\Omega_2, s_0 \in [0,1]$，使得 $(1 - s_0) A u_2 + s A_1 u_2 = u_2$. 因为

$$u_2 = S((1 - s_0) F(u_2) + s_0 F_1(u_2)),$$

由 S 的定义知 u_2 是当

$$h = (1 - s_0) F(u_2) + s_0 F_1(u_2) = F(u_2) + s_0 C_0$$

时线性边值问(4)的唯一解. 因此 $u_2 \in C^2(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u_2''(t) + k u_2(t) = f(t, u_2(t), u_2'(t)) + \\ \quad s_0 C_0, t \in [0,1], \\ u_2'(0) = u_2'(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

显然 $u_2(t) \geqslant 0, t \in I$. 由条件($H_3$)可知，

$$f(t, u_2(t), u_2'(t)) \geqslant c u_2(t) - C_0, t \in I.$$

由此不等式和(11)式可得

$$u_2''(t) + k u_2(t) = f(t, u_2(t), u_2'(t)) + s_0 C_0 \geqslant c u_2(t) - (1 - s_0) C_0, t \in I.$$

上式在 I 上积分，得

$$\int_0^1 u_2''(t) + \int_0^1 k u_2(t) \geqslant \int_0^1 c u_2(t) - C_0 \tag{12}$$

由于 $u_2'(0) = u_2'(1)$，所以

$$k \int_0^1 u_2(t) \geqslant c \int_0^1 u_2(t) - C_0,$$

即

$$\int_0^1 u_2(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{C_0}{c - k}.$$

由于 $u_2 \in K$，所以

$$\| u_2 \|_C = \int_0^1 \| u_2 \|_C \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \cosh^2 m u_2(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{C_0 \cosh^2 m}{c - k} := M.$$

对于上述 $M > 0$，由假设(H_1)，存在正的连续函数 $G_M(\rho)$，使得

$$-k u_2(t) + f(t, u_2(t), u_2'(t)) \leqslant G_M(| u_2'(t) |), t \in I.$$

由这个不等式和(11)式可得

$$u_2''(t) \leqslant G_M(| u_2'(t) |) + C_0, t \in I \tag{13}$$

由(H_1)得 $\int_0^{+\infty} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{G_M(\rho) + C_0} = +\infty$. 因而存在一个正常数 $M_1 \geqslant M$，使得

$$\int_0^{M_1} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{G_M(\rho) + C_0} > M \tag{14}$$

根据引理 2.1(2)，存在常数 $\xi, 0 < \xi < 1$，使得当 $t \in (0, \xi)$ 时，$u'(t) > 0$. 对(13)式两边乘以

$u_2'(t)$ 得

$$\frac{u_2'(t)u_2''(t)}{G_M(|u_2'|)+C_0} \leqslant u_2'(t), t \in [0,\xi].$$

上式在 $[0,\xi]$ 上积分,得

$$\int_0^{\xi} \frac{u_2'(t)u_2''(t)\mathrm{d}t}{G_M(|u_2'|)+C_0} \leqslant \int_0^{\xi} u_2'(t)\mathrm{d}t, t \in [0,\xi].$$

在以上不等式左边做变量替换 $\rho = u_2'(t)$,则有

$$\int_0^{u_2'(\xi)} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)+C_0} \leqslant u_2(\xi) - u_2(0) \leqslant \| u_2 \|_{C[0,\xi]}.$$

因为 $\| u_2' \|_{C[0,\xi]} = u_2'(\xi)$,所以

$$\int_0^{\| u_2' \|_{[0,\xi]}} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)+C_0} \leqslant M.$$

因为 $u = \bar{u} + \tilde{u}$,所以 $u' = \tilde{u}'$,$\| u' \|_{C[0,\xi]} = \| \tilde{u}' \|_{C[0,\xi]}$,即

$$\| \tilde{u}_2 \|_{C[0,\xi]} \leqslant \| \tilde{u}_2' \|_{C[0,\xi]} = \| u_2' \|_{C[0,\xi]} \leqslant M_1 \tag{15}$$

则一定存在充分大的 $R > M_1$,使得当 $u_2 \in \partial\Omega_2$ 时,有

$$\| u_2 \|_{C[0,\xi]} = R, \| \tilde{u}_2 \|_{C[0,\xi]} \geqslant M_1.$$

这与(15)式矛盾.所以当 R 充分大时,A 和 A_1 在 $K \cap \partial\Omega_2$ 上满足引理2.5的条件.从而

$$i(A, K \cap \Omega_2, K) = i(A_1, K \cap \Omega_2, K).$$

再由上式得 $i(A, K \cap \Omega_2, K) = 0$. 由不动点指数理论,有

$$i(A, K \cap \Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1, K) = i(A, K \cap \Omega_2, K) - i(A_1, K \cap \Omega_1, K) = -1.$$

因此 A 在 $\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1$ 有一个不动点,即边值问题(3)有一个正解.证毕.

参考文献:

[1] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Diff Equ, 2003, 190: 643.

[2] Jiang D Q, Chu J F, Zhang M R. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations [J]. J Diff Equ, 2005, 211: 282.

[3] Jiang D Q, Yang Y, Chu J F, *et al*. The monotone method for Neumann functional differential equations with upper and lower solutions in the reverse order [J]. Nonlinear Anal, 2007, 67: 2815.

[4] Ma R Y, Gao C H, Chen R P. Existence of positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Bound Value Probl, 2010, 2010: 1.

[5] Zhang G W. Positive solutions of two-point boundary value problems for second-order differential equations with the nonlinearity dependent on the derivative [J]. Nonlinear Anal, 2008, 69: 222.

[6] Erbe L H, Wang H Y. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743.

[7] Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

[8] Li Y X. Positive solutions for second order boundary value problems with derivative terms [J]. Math Nach, 2016, 289: 2058.

[9] Cabada A, Habets P, Lois S. Monotone method for the Neumann problem with lower and upper solutions in the reverse order [J]. Appl Math Comput, 2001, 117: 1.

[10] Miciano A R, Shivaji R. Multiple positive solutions for a class of semipositone Neumann two point boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 102.

[11] Gao H L, Ma R Y. Multiple positive solutions for a class of Neumann problems [J]. Electron J Qual Theo, 2015, 48: 1.

[12] Ma R Y, Chen T L. Positive solutions for a class of semipositone Neumann problems [J]. Bound Value Probl, 2016,1: 1.

[13] 马如云.非线性常微分方程非局部问题 [M].北京:科学出版社,2004.

[14] 高婷,韩晓玲.三阶无穷多点边值问题正解的存在性[J].四川大学学报:自然科学版,2016,53:35.

[15] 姚庆六.一类非线性三阶常微分方程的多重正解[J].四川大学学报:自然科学版,2005,42:33.

[16] 达举霞,韩晓玲.三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性[J].四川大学学报:自然科学版,2016,53:1177.