doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.05.002

T_0 拓扑空间的拟连续性与交连续性

冯华容，寇　辉
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文在定向空间的基础上通过收敛的方式定义了拟连续空间和交连续空间，推广了 Domain 理论中的相应结果．主要结果如下：(1) 一个 T_0 空间是拟连续的，当且仅当它是局部强紧的，当且仅当它的开集格在集包含关系下是超连续格，当且仅当它的 sober 化是拟连续 dcpo；(2) 一个定向空间是交连续的当且仅当它的闭集格在集包含关系下是一个 Frame；(3) 一个 T_0 拓扑空间是 c-空间当且仅当它既是交连续的又是拟连续的．

关键词：定向空间；拟连续性空间；交连续空间；c-空间
中图分类号：O198.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)05-0905-06

Quasicontinuity and meet-continuity of T_0 spaces

FENG Hua-Rong, *KOU Hui*
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: By means of convergence, we introduce quasicontinuous sapces and meet-continuous sapces based on directed spaces. The main results are as follows: (1) A T_0 space is quascontinuous if and only if it is locally strongly compact, if and only if its open set lattice is a hypercontinuous complete lattice, if and only if it soberfication is a quasicontinuous dcpo; (2) A directed space is meet-continuous iff its closed set lattice is a frame; (3) A T_0 space is a c-space if and only it is quasicontinuous and meet-continuous.

Keywords: Directed space; Quasicontinuous space; Meet-continuous sapce; c-sapce
(2010 MSC 54A05)

1　引　言

拟连续 dcpo[1-13]是 Gierz 和 Lawson[8]于 1981 提出的一类重要序结构．该序结构具有许多与连续 dcpo 相似的性质，尤其是与连续 dcpo 一样存在对应的对偶定理：拟连续 dcpo 范畴与分配超连续格范畴对偶等价．交连续性是 Domain 理论的另一重要性质．传统的交连续性定义在 dcpo 交半格上，但在 Domain 理论中绝大多数序结构本身不存在交运算．文献[10]注意到传统交连续性的这一缺陷，在普通 dcpo 上定义了交连续的概念，并证明：一个 dcpo 是连续的当且仅当它既交连续又拟连续．目前该推广已成为 Domain 理论中交连续的标准定义[7]．

由于拟连续性和交连续性是基于 dcpo 上 Scott 拓扑给出的，因此一个自然的想法是：是否可在更一般的 T_0 空间上定义拟连续性和交连续性？最近，文献[13]定义了一类新的拓扑空间——定向空间，并证明了由定向空间构成的范畴具有 cartesian 闭性，赋予 Scott 拓扑的一般偏序集范畴

收稿日期：2017-04-12
基金项目：国家自然科学基金 (11371262)
作者简介：冯华容 (1991－)，女，四川巴中人，硕士，主要研究方向为 Domian 理论．E-mail：fenghuarong0809@163.com
通讯作者：寇辉．E-mail：kouhui@scu.edu.cn

是该范畴的真子范畴. 由于定向空间与偏序集赋予 Scott 拓扑具有许多相似的特征，因而在定向空间上引入拟连续性和交连续性具有可能性. 本文基于定向空间的性质，利用收敛性定义了拟连续空间和交连续空间，并得到如下主要结果：(1) 一个 T_0 空间是拟连续的当且仅当它是局部强紧的，当且仅当它的开集格在集包含关系下是超连续格，当且仅当它的 sober 化是拟连续 dcpo；(2) 一个定向空间是交连续的当且仅当它的闭集格在集包含关系下是一个 Frame；(3) 一个 T_0 拓扑空间是 c-空间当且仅当它既是交连续的又是拟连续的. 因此，本文所引入的拟连续与交连续性是对 Domain 相关理论的扩展.

2 预备知识

下面介绍本文所需的有关 Domain 理论和拓扑学的一些基本概念和符号[1,2,7].

设$(P,\leqslant)$为偏序集. 非空子集 A 称为定向的，若 $\forall x,y\in A$，存在 $z\in A$，使得 $x\leqslant z$ 且 $y\leqslant z$. P 称为定向完备偏序集(简称 dcpo)，若 P 中任意定向集 D 都有上确界(记为 $\vee D$). $\forall A\subseteq P$，记 $\downarrow A=\{a\in P: \exists x\in A, a\leqslant x\}$，$\uparrow A=\{a\in P: \exists x\in A, x\leqslant a\}$. 设$(X,O(X))$是一个拓扑空间，$A\subseteq X$. 符号$\bar{A}$和 A^o 分别表示 A 的闭包和内部.

设$(X,O(X))$是一个 T_0 拓扑空间，其上特殊化序定义如下：$\forall x,y\in X, x\leqslant y\Leftrightarrow x\in\overline{\{y\}}$. 易证，$T_0$ 空间赋予特殊化序后为偏序集，所有开集均是上集，所有闭集均是下集，且$\overline{\{x\}}=\downarrow x$.

本文中所有 T_0 空间都看作赋予特殊化序的偏序集.

定义 2.1 设 P 是一个偏序集.

(1) 记 $B_v(P)=\{P\setminus\downarrow x: x\in P\}$以 $B_v(P)$为子基生成的拓扑称为 P 的上拓扑，记为 $v(P)$.

(2) 子集 $U\subseteq P$ 称为 Scott 开集，若 $U=\uparrow U$ 并且对于任意定向集 $D\subseteq U$，$\vee D\subseteq U$，意味着 $D\cap U\neq\varnothing$. 由所有 Scott 开集构成一个拓扑，称为 Scott 拓扑，并记为 $\sigma(P)$.

显然，上拓扑 $v(P)$弱于 Scott 拓扑 $\sigma(P)$.

定义 2.2 设 X 是一个 T_0 拓扑空间

(1) X 的一个网是指一个映射 $\xi: J\to X$，这里 J 是一个定向集. 通常，我们把一个网表示为(x_j)或$(x_j)_{j\in J}$. 设 $x\in X$，称(x_j)收敛到 x 或 x 是(x_j)的极限，记为$(x_j)\to x$ 或 $x\equiv\lim(x_j)$，若(x_j)终在 x 的每一个开邻域，即，任给 x 的开邻域 U，存在 $j_0\in J$，$x_j\in U$ 对所有 $j\geqslant j_0$ 成立.

(2) W 是 X 上的一个滤子，$x\in X$，称 x 是 W 的一个极限点，或者 W 收敛于 x，若 x 的全体邻域 $N(x)\subseteq W$.

T_0 拓扑空间 X 的每个定向集 D 都可看成 X 的一个网. 若 D 收敛到 x，则记为 $D\to x$. 令 $D(x)=\{(D,x): x\in X, D$ 是 X 的定向子集并且$D\to x\}$. 容易证明，若 D 是赋予 Scott 拓扑的 dcpo P 的一个定向集，则 $D\to x$ 当且仅当 $x\leqslant\vee D$.

定义 2.3[3] 设 X 是一个 T_0 空间. 子集 $U\subseteq X$ 称为定向开集，若 $\forall(D,x)\in D(X)$，$x\in U$ 意味着 $D\cap U\neq\varnothing$.

显然，开集是定向开集. 记所有定向开集为$d(X)$.

定义 2.4[13] 设$(X,O(X))$是一个 T_0 拓扑空间. 称 X 为定向空间，如果每个定向开集都是开集，即对任意 $U\subseteq X$，U 是开集当且仅当对任意定向集 D，若 $D\to x$，$x\in U$ 则 $D\cap U\neq\varnothing$.

每个偏序集赋予 Scott 拓扑是定向空间，而关于上拓扑则不一定是定向空间.

定义 2.5 设$(X,\leqslant)$是一个偏序集，2^X 是 X 的幂集.

(1) $\forall G,H\in 2^X\setminus\{\varnothing\}$，称 $G\leqslant H$，若 $\uparrow H\subseteq\uparrow G$；

(2) 设 $N(F)$是由 X 的子集构成的非空集族，若对任意 $F_1,F_2\in N(F)$，$\exists F\in N(F)$，使 $F_1,F_2\leqslant F$，即 $\uparrow F\subseteq\uparrow F_1\cap\uparrow F_2$，则称 $N(F)$是 X 的定向集族；

(3) 设 G,H 是 X 的两个非空子集，若对 X 的任意定向集 D，当 $\vee D\in\uparrow H$，有 $D\cap\uparrow G\neq\varnothing$，则称 G way below H，记作 $G\ll H$.

定义 2.6 设 P 是 dcpo，$x\in P$. 记 $pin(x)=\{F\subseteq P: F$ 有限且 $F\ll x\}$. 称 P 为拟连续 domain，若 $\forall x\in P$，$pin(x)$是定向集族，且 $\forall y\in P$，当 $x\not\leq y$ 时，存在 $F\in pin(x)$使得 $y\notin\uparrow F$.

引理 2.7(Rudin 引理) 设 $N(D)$是偏序集 P 的一个非空定向有限子集族，则存在定向集 $D\subseteq\cup_{F\in N(D)}F$，使得对任意 $F\in N(D)$，$D\cap F\neq\varnothing$.

命题 2.8 设 P 是 dcpo，则以下两条等价：

(1) P 为拟连续 Domain；

(2) $\forall x\in P$，$\forall U\in\sigma(P)$，若 $x\in U$，则存在有限集 $F\subseteq P$，满足 $x\in int_\sigma\uparrow F\subseteq\uparrow F\subseteq U$，这里 $\mathrm{int}_\sigma A$ 表示 A 关于 Scott 拓扑的内部.

定义 2.9[8] 设 P 为偏序集，在 P 上定义二元

关系如下：$\forall x,y\in P,x<y\Leftrightarrow y\in \mathrm{int}_v\uparrow x$，这里 int_v 表示关于上拓扑的内部算子. 完备格 P 称为超连续格，若 $\forall x\in P,x=\vee\{y\in P:y<x\}$.

在本文中，若无特殊说明，所有拓扑空间都要求具有 T_0 分离性.

3 拟连续空间

为引入拟连续空间，下面先将 dcpo 上的一些概念推广到 T_0 空间上.

定义 3.1 设 X 是一个 T_0 空间，G,H 是 X 的两个非空子集，称 G way below H（记作 $G\ll H$），若对 X 的任意定向集 D，当存在 $h\in H$ 满足 $D\to h\in H$ 时有 $D\cap\uparrow G\neq\varnothing$.

特别地，$\{y\}\ll H$ 简记为 $y\ll H$，$G\ll\{x\}$ 简记为 $G\ll x$. 显然 $G\ll H\Leftrightarrow\forall h\in H,G\ll h$.

记 $X^{(<w)}$ 为 X 上的所有非空有限集之集.

命题 3.2 设 X 是一个 T_0 拓扑空间，$G,G',H,H'\in 2^X\backslash\{\varnothing\}$，下述各条性质成立：

(1) $G\ll H\Rightarrow G\leqslant H$；

(2) $G\leqslant G'\ll H'\leqslant H\Rightarrow G\ll H$.

证明 (1). $\forall x\in\uparrow H,\exists h\in H$，使 $h\leqslant x$. 由 X 是 T_0 空间，有 $\{x\}\to h$. 又 $G\ll H$，所以 $\{x\}\cap\uparrow G\neq\varnothing$，即 $x\in\uparrow G$，从而 $\uparrow H\subseteq\uparrow G$，故 $G\leqslant H$.

(2) 对任意定向集 $D\subseteq X$，设 $D\to h\in H$. 由 $H'\leqslant H$，故存在 $h'\in H'$，使 $h'\leqslant h$，则 $D\to h'\in H'$. 又 $G'\ll H'$，所以 $D\cap\uparrow G'\neq\varnothing$. 由 $G\leqslant G'$，有 $\uparrow G'\subseteq\uparrow G$，从而 $D\cap\uparrow G\neq\varnothing$，即 $G\ll H$.

引理 3.3 设 $(X,O(X))$ 是一个 T_0 拓扑空间，$D(M)\subseteq 2^X$ 是在 $\leqslant$ 下为定向集族. 则 $F_M=\{A\subseteq X:\exists M\in D(M),\uparrow M\subseteq A\}$ 是一个滤子.

证明 任给 $A,B\in F_M$，则存在 $M_1,M_2\in D(M)$ 使得 $\uparrow M_1\subseteq A$，$\uparrow M_2\subseteq B$. 因为 $D(M)$ 是定向的，所以存在 $M\in D(M)$ 使得 $\uparrow M\subseteq\uparrow M_1\cap\uparrow M_2\subseteq A\cap B$，从而 $A\cap B\in\{A\subseteq X:\exists M\in D(M),\uparrow M\subseteq A\}$.

特别地，我们记 $F_M:=\{A\subseteq X:\exists M\in D(M),\uparrow M\subseteq A\}$，表示由定向族 $D(M)$ 生成的滤子. 如果滤子 F_M 收敛于 m，则称定向族 $D(M)$ 收敛于 m，记为 $D(M)\to m$.

由滤子收敛的定义有下述结果.

命题 3.4 设 $(X,O(X))$ 是一个 T_0 拓扑空间，$D(M)\subseteq 2^X$ 是一个定向集族. 则 $D(M)\to m$ 当且仅当任给 m 的开邻域 U，存在 $A\in M$ 使得 $A\subseteq U$.

对任意 $x\in X$，记 $fin(x)=\{F\in X^{(<w)}:F\ll x\}$. 接下来，我们给出拟连续空间的定义.

定义 3.5 一个 T_0 空间 X 称为拟连续空间，若下述两条成立：

(1) X 是定向空间；

(2) 对任意 $x\in X$，$fin(x)$ 是定向集族且收敛到 x.

引理 3.6 设 $D(F)$ 是 T_0 空间 X 的一个非空定向有限子集族，若 $G\ll H$ 且 $D(F)\to h\in H$，则存在 $F\in D(F)$ 使得 $F\subseteq\uparrow G$，即，$G\leqslant F$.

证明 反证法. 若 $\forall F\in D(F),F\not\subseteq\uparrow G$，则 $F\backslash\uparrow G\neq\varnothing$. 显然 $\{F\backslash\uparrow G:F\in D(F)\}$ 为非空定向有限集族. 由 Rudin 引理知，存在定向集 $D\subseteq\cup\{F\backslash\uparrow G:F\in D(F)\}$，使得 $\forall F\in D(F),D\cap(F\backslash\uparrow G)\neq\varnothing$. 设 U 是 h 的开邻域. 由于 $D(F)\to h$，故存在 $F\in D(F)$ 使得 $F\subseteq U$，从而 $U\cap D\neq\varnothing$，即 $D\to h$. 因为 $G\ll H$，所以 $D\cap\uparrow G\neq\varnothing$. 即存在 $d\in D$，使得 $d\in\uparrow G$. 此与 $d\in\cup_{F\in D(F)}F\backslash\uparrow G$ 矛盾.

命题 3.7 一个定向空间 X 是拟连续的当且仅当对任意 $x\in X$，存在定向族 $D(x)\subseteq fin(x)$ 使得 $D(x)\to x$.

证明 由定义 3.5，必要性显然成立. 下证充分性. 设 $x\in X,G,H\in fin(x)$，且存在定向族 $D(x)\subseteq fin(x)$ 使得 $D(x)\to x$. 则由引理 3.6，存在 $F\in D(x)$ 使得 $G,H\leqslant F$. 从而 $fin(x)$ 是定向的. 由 $D(x)\subseteq fin(x),D(x)\to x$ 必有 $fin(x)\to x$.

命题 3.8（插值性） 设 X 是一个拟连续空间，$x\in X,H\in X^{(<w)}$. 若 $H\ll x$，则存在有限集 $F\subseteq X$ 使得 $H\ll F\ll x$.

证明 考虑集族 $\Phi=\{G\in X^{(<w)}:\exists F\in X^{(<w)},G\ll F\ll x\}$. 首先证明 Φ 非空. 由 X 是拟连续空间（见定义 3.5），集族 $fin(x)$ 定向从而非空. 任取 $F\in fin(x)$，则 $F\ll x$. 同理，$\forall y\in F$，$G_y\in X^{(<w)}$，$G_y\ll y$. 令 $G=\cup_{y\in F}G_y$，则 $G\ll F\ll x$，从而 $G\in\Phi$.

接下来证 Φ 为定向集族. 设 $G_i\in\Phi$，则存在 $F_i\in X^{(<w)}$ 满足 $G_i\ll F_i\ll x,i=1,2$. 因为 X 是拟连续的，集族 $fin(x)$ 定向，故存在 $F\in fin(x)$，使得 $F_1F_2\leqslant F$. 由命题 3.2，$G_1,G_2\ll F$. 任给 $y\in F$，由 X 的拟连续性，$fin(y)$ 定向且 $fin(y)\to y$. 由引理 3.6，存在 $F_y\in fin(y)$ 使得 $G_1,G_2\leqslant F_y$. 令 $E=\cup_{y\in F}F_y$，则 $E\ll F\ll x$ 并且 $E\subseteq\uparrow G_1\cap\uparrow G_2$. 从而 Φ 为定向集.

再证 $\Phi\to x$. 任取 x 的开邻域 U，由命题 3.4

及拟连续性，存在 $W\in fin(x)$使得 $W\subseteq U$. 同理，对任意 $w\in W$，存在 $G_w\in fin(w)$使得 $G_w\subseteq U$. 令 $G=\bigcup_{w\in W}G_w$，则 $G\ll F\ll x$ 且 $G\subseteq U$，故 $\Phi\to x$.

最后，由已知条件 $H\ll x$ 和引理 3.6，存在 $G\in\Phi$，使得 $G\subseteq\uparrow H$，从而由 Φ 的定义，存在有限集 $F\subseteq X$ 使得 $H\ll F\ll x$.

设 X 为一个 T_0 空间. 对任意 $F\in X^{(<w)}$，记 $\Uparrow F=\{x\in X: F\ll x\}$.

定理 3.9 设 X 是一个拟连续空间，则有以下性质：

(1) 任给 $F\in X^{(<w)}$，则 $\Uparrow F=(\uparrow F)^{\circ}$；

(2) 任给 X 的开集 U，若 $x\in U$，则存在 $F\in X^{(<w)}$ 使得 $x\in\Uparrow F\subseteq\uparrow F\subseteq U$. 因此，$\{\Uparrow F: F\in X^{(<w)}\}$是 X 的一个基.

证明 (1). 设 $F\subseteq X$ 是一个非空有限子集，$D\subseteq X$ 是一个定向集且 $D\to x\in\Uparrow F$. 由插值性(命题 2.8)，$\exists F'\in X^{(<w)}$ 使得 $F\ll F'\ll x$. 从而存在 $d\in D$ 使得 $d\in F'$. 由 $F\ll d\in D$ 有 $D\cap\Uparrow F\neq\varnothing$. 故 $\Uparrow F$ 是定向开集. 因为拟连续空间是定向空间，所以 $\Uparrow F$ 是开集. 下证 $\Uparrow F=(\uparrow F)^{\circ}$. 显然，$\Uparrow F\subseteq(\uparrow F)^{o}$. 任给 $y\in(\uparrow F)^{o}$ 及定向集 $D\subseteq X$. 若 $D\to y$，则 $D\cap\uparrow F\neq\varnothing$. 从而 $F\ll y, y\in\Uparrow F$.

(2). 设 $U\subseteq X$ 是开集且 $x\in U$. 由拟连续性及命题 3.4，$\exists F\in fin(x)$使得 $F\subseteq U$. 从而 $x\in\Uparrow F\subseteq\uparrow F\subseteq U$. 结合(1)可得，$\{\Uparrow F: F\in X^{(<w)}\}$是 X 的一个基.

接下来，我们给出拟连续空间的等价刻画.

定义 3.10 一个 T_0 空间称为局部强紧的，若对任意 $x\in U$ 及 x 的任意开邻域 U，存在 $F\in X^{(<w)}$ 使得 $x\in(\uparrow F)^{o}\subseteq\uparrow F\subseteq U$.

容易看出，局部强紧空间的非空子集 U 是开集当且仅当

$U=\bigcup\{(\uparrow F)^{o}: F\subseteq U$ 且 F 有限$\}$.

定理 3.11 $(X, O(x))$是一个 T_0 拓扑空间，则下述各条等价：

(1) X 为拟连续空间；

(2) 对任意 $x\in X$，存在定向集族 $D(x)\subseteq fin(x)$使得 $D(x)\to x$；

(3) X 是局部强紧空间；

(4) 开集格 $O(X)$是超连续分配格；

(5) X 的 sober 化 X^{S} 是拟连续 dcpo.

证明 (1)⇔(2). 由命题 3.7 可得.

(1)⇔(3). (1)⇒(3)由定理 3.9 可得. 下证(3)⇒(1). 首先证明 X 是一个定向拓扑空间. 反证法. 假定 U 是定向开集，但不是开集. 故存在 $x\in U$，任给 $F\in X^{(<w)}$，若 $x\in(\uparrow F)^{o}\subseteq\uparrow F$，则 $\uparrow F\not\subseteq U$. 此时，因 $U=\uparrow U$，故 $F\backslash U\neq\varnothing$. 令$\mathcal{F}=\{F\backslash U: F\in X^{(<W)}, x\in(\uparrow F)^{o}\}$. 由于 X 是局部强紧的，至少存在一个非空有限集 F 使得 $x\in(\uparrow F)^{o}$. 因此，$\mathcal{F}$是非空有限集族. 任给 $F_1\backslash U, F_2\backslash U\in\mathcal{F}$，由 $x\in(\uparrow F_1)^{o}\cap(\uparrow F_2)^{o}$ 有，存在非空有限集 G 使得 $x\in(\uparrow G)^{o}\subseteq\uparrow G\subseteq(\uparrow F_1)^{o}\cap(\uparrow F_2)^{o}$ 从而 $G\backslash U\subseteq\uparrow(F_1\backslash U)\cap\uparrow(F_2\backslash U)^{o}$. 因此，$\mathcal{F}$是定向的. 由 Rudin 引理，存在定向集 $D\subseteq\bigcup\mathcal{F}$，使得对任意 $F\backslash U\in\mathcal{F}, D\cap(F\backslash U)\neq\varnothing$. 由于$\{(\uparrow F)^{o}: F\in X^{(<w)}, x\in(\uparrow F)^{o}\}$是 x 的开邻域基，因此 $D\to x$. 又 $x\in U$ 且 U 是定向开集，故 $D\cap U\neq\varnothing$，这与 $D\subseteq\bigcup\mathcal{F}$矛盾. 故 U 必是开集，即，X 是定向空间.

下证 X 为拟连续空间. 记 $B(x)=\{F\in X^{(<w)}: x\in(\uparrow F)^{o}\}$. 则 $B(x)$是由非空有限集组成的定向集族. 显然，$\forall F\in B(x)$，$F\ll x$. 由局部强紧性的定义，$\{(\uparrow F)^{o}: F\in X^{(<w)}, x\in(\uparrow F)^{o}\}$是 x 的开邻域基，因此 $B(x)\to x$. 由命题 3.7，X 是拟连续空间.

(3)⇒(4). 首先，开集格 $O(x)$关于集包含关系是一个分配的完备格. 任给 $U\in O(X)$，不妨设 $U\neq\varnothing$，则由(4)有 $U=\bigcup\{(\uparrow F)^{o}: F\subseteq$ 且 $F\in X^{(<w)}\}$. 任给 U 的非空有限子集 F，令

$\mu_F=\{V\in O(X):\forall a\in F, V\not\subseteq X\backslash\downarrow a\}$

则 μ_F 是$O(X)$关于上拓扑 $v(O(X))$的开集. 显然，任给 $V\in O(X)$，$V\in\mu_F$ 当且仅当 $F\subseteq V$. 因此，μ_F 是U 在开集格$O(X)$关于上拓扑的开邻域. 令 $Up[(\uparrow F)^{o}]=\{W\in O(X):(\uparrow F)^{o}\subseteq W\}$，则 $U\in\mu_F\subseteq Up[(\uparrow F)^{o}]$，即，$U$ 属于$(\uparrow F)^{o}$ 生成的主滤子关于开集格上拓扑的内部. 故由定义 2.9，开集格 $O(X)$是一个超连续格.

(4)⇔(5). 由于超连续分配格的谱空间是拟连续 dcpo，拟连续 dcpo 的开集格是超连续的，且开集格的谱空间是该拓扑空间 sober 化，所以(4)和(5)等价，参见文献[7-9].

(4)⇒(3). 设 $x\in U\in O(X)$. 则由 $O(X)$是超连续格，存在 $V\in O(X)$使得 $x\in V<U$. 故存在 $W_1, W_2,\cdots, W_n\in O(X)$使得

$U\in\{W\in O(X):\forall 1\leqslant i\leqslant n,$

$W\not\subseteq W_i\}\subseteq\{W\in O(X): V\subseteq W\}$.

任取 $a_i\in U\backslash W_i(i=1,2,\cdots,n)$，并令 $F=\{a_i: i=1,2,\cdots,n\}$. 下证 $V\subseteq\uparrow F$. 反证法. 假定 $\exists u\in V\backslash$

$\uparrow F$，则 $F\subseteq X\setminus\downarrow u$，从而 $X\setminus\downarrow u\not\subseteq W_i(i=1,2,\cdots,n)$．故 $V\subseteq X\setminus\downarrow u$，与 $u\in V$ 矛盾．因此，$x\in V\subseteq\uparrow F\subseteq U$．得证．

文献[9]已证明，一个 dcpo 是拟连续的当且仅当其 Scott 拓扑是超连续格，因此拟连续 dcpo 是拟连续空间的一个特殊子类．

4　交连续空间

交连续性是 Domain 理论中一个重要的性质，是拟连续与连续之间的纽带：一个 dcpo 是连续的当且仅当它既是交连续的又是拟连续的．本节中，我们将把交连续性推广到定向空间，并证明一个既是交连续的又是拟连续的空间恰好就是 c-空间．

首先，我们看交连续的原始定义．

定义 4.1[7]　设 P 是一个 dcpo 交半格．称 P 是交连续的，若对任意 $x\in P$ 及定向集 $D\subseteq P$，$x\wedge\vee D=\vee_{d\in D}x\wedge d$．

文献[10]把上述定义推广到一般的 dcpo 上，现已成为 Domain 理论中交连续的标准定义[7]．

定义 4.2　设 P 是一个 dcpo．称 P 是交连续的，若对任意 $x\in P$ 及定向集 $D\subseteq P$，$x\leqslant\vee D\Rightarrow x\in cl_\sigma(\downarrow D\cap\downarrow x)$．这里，$cl(\downarrow D\cap\downarrow x)$表示 $\downarrow D\cap\downarrow x$ 关于 Scott 拓扑 $\sigma(P)$的闭包．

任意 dcpo 上交连续、拟连续及连续之间的关系如下．

定理 4.3[10]　一个 dcpo 是连续的当且仅当它既是交连续的又是拟连续的．

接下来，我们把交连续推广到定向空间上．

定义 4.4　设 X 是一个定向空间．称 X 是交连续的，若对任意 $x\in X$ 及定向集 $D\subseteq X$，$D\to x\Rightarrow x\in\overline{\downarrow D\cap\downarrow x}$．

下面结论显然成立．

命题 4.5　设 X 是一个定向空间．

(1) 若 X 关于特殊化是一个 dcpo 且 $O(X)=\sigma(X)$，则定义等价于定义 4.2；

(2) 在(1)的条件下，若 X 还是交半格，则定义还等价于定义 4.1．

任给拓扑空间$(X,O(X))$，记 $\Gamma(X)=\{A\subseteq X:X\setminus A\in O(X)\}$，并赋予集包含序．则 $\Gamma(X)$是一个完备格且对任意$\{A_i:i\in I\}\subseteq\Gamma(X)$，$\vee_{i\in I}A_i=\overline{\cup_{i\in I}A_i}$．

定理 4.6　设 X 是一个定向空间．则下面三条等价：

(1) X 是交连续空间；

(2) 任给 $x\in X$ 及 $U\in O(X)$，$\uparrow(U\cap\downarrow x)$是开集；

(3) $\Gamma(X)$是一个 Frame，即，$\forall A\in\Gamma(X)$，$\forall\{A_i:i\in I\}\subseteq\Gamma(X)$，$A\wedge\vee_{i\in I}A_i=\vee_{i\in I}A\wedge A_i$．

证明　(1)$\Rightarrow$(2)．设 $x\in X$，$U\subseteq X$ 是开集．由于 X 是定向空间，由定义 2.4，只需证明 $\uparrow(U\cap\downarrow x)$是定向开集．任取定向集 $D\subseteq X$，$y\in X$ 使得 $D\to y\in\uparrow(U\cap\downarrow x)$．由 $y\in\uparrow(U\cap\downarrow x)$，$\exists z\in U\cap\downarrow x$ 使得 $z\leqslant y$．又由 $D\to y$ 有 $D\to z$．因为 X 是交连续空间，所以 $z\in\overline{\downarrow D\cap\downarrow z}$．从而 $U\cap(\downarrow D\cap\downarrow z)=\downarrow D\cap(U\cap\downarrow z)\neq\varnothing$．所以，$D\cap\uparrow(U\cap\downarrow x)\supseteq D\cap\uparrow(U\cap\downarrow z)\neq\varnothing$．

(2)$\Rightarrow$(3)．设 $A\in\Gamma(X)$，$\{A_i:\in I\}\subseteq\Gamma(X)$．$A\wedge\vee_{i\in I}A_i=A\cap\overline{\cup_{i\in I}A_i}\supseteq\overline{\cup_{i\in I}A\cap A_i}=\vee_{i\in I}A\wedge A_i$ 显然成立．下证 $A\wedge\vee_{i\in I}A_i\leqslant\vee_{i\in I}A\wedge A_i$，即 $A\cap\overline{\cup_{i\in I}A_i}\subseteq\overline{\cup_{i\in I}A\cap A_i}$．反证法．假定存在 $x\in A\cap\overline{\cup_{i\in I}A_i}$，$x\notin\cup_{i\in I}A\cap A_i$．则存在 x 的开邻域 $U\subseteq X$ 使得 $U\cap\cup_{i\in I}A\cap A_i=\varnothing$．令 $V=\uparrow(U\cap\downarrow x)$，则由(2)，$V$ 也是 x 的开邻域．注意到 $x\in\overline{\cup_{i\in I}A_i}$，$V\cap\cup_{i\in I}A_i\neq\varnothing$成立．从而存在 $i_0\in I$，$y\in X$ 使得 $y\in\uparrow(U\cap\downarrow x)\cap A_{i_0}$．故存在 $z\in U$，$z\leqslant x,y$．又因为闭集都是下集且 $x\in A$，$y\in A_{i_0}$，所以 $z\in U\cap A\cap A_{i_0}$．此与假设 $U\cap\cup_{i\in I}A\cap A_i=\varnothing$ 矛盾．

(3)$\Rightarrow$(1)．设定向集 $D\subseteq X$ 且 $D\to x\in X$．则 $x\in\overline{\downarrow D}$．由(3)，$\downarrow x\cap\overline{\downarrow D}=\downarrow x\cap\vee_{d\in 0}\downarrow d=\downarrow\vee_{d\in D}\downarrow d=\vee_{d\in D}\downarrow x\cap\downarrow d=\overline{\downarrow D\cap\downarrow x}$．从而 $x\in\overline{\downarrow D\cap\downarrow x}$得证．

c-空间是由 Erne，Ershov[3-6]引入的一类 T_0 拓扑空间，是连续 dcpo 的一种推广．

定义 4.7　一个 T_0 拓扑空间称为 c-空间，若 $\forall x\in X$，$\forall U\in O(x)$，$x\in U\Rightarrow\exists y\in X$，$x\in(\uparrow y)^o\subseteq\uparrow y\subseteq U$．

连续偏序集赋予 Scott 拓扑是 c-空间，但反过来并不成立．比如实数集上赋予 Alexander 拓扑是 c-空间，其拓扑严格细于 Scott 拓扑．

命题 4.8　c-空间必是拟连续空间．

证明　由上述定义及定理 3.2 立即可得．

命题 4.9　c-空间必是交连续空间．

证明　设 X 是一个 c-空间．由上述命题知，X 是一个定向空间．设 $D\subseteq X$ 是一个定向集且 $D\to x\in X$．任给 X 的开邻域 U，则由定义 4.7，存在 $y\in X$ 使得 $x\in(\uparrow y)^o\subseteq\uparrow y\subseteq U$．故 $D\cap\uparrow y\neq\varnothing$，即，$y\in\downarrow D$．又 $y\leqslant x$，所以 $y\in U\cap\downarrow D\cap\downarrow$

x，即，$x\in\overline{\downarrow D\cap\downarrow x}$.

接下来我们证明交连续的拟连续空间是 c-空间.

命题 4.10 交连续的拟连续空间是 c-空间.

证明 设 X 是一个交连续的拟连续空间. 设 $x\in X$ 且 $U\subseteq X$ 是 x 的开邻域. 由 X 的拟连续性，存在有限集 $F\subseteq X$ 使得 $x\in(\uparrow F)^o\subseteq\uparrow F\subseteq U$. 下证，存在 $a\in F$，$x\in(\uparrow a)^o$. 反证法. 假定 $\forall a\in F$，$x\notin(\uparrow a)^o$. 令 $F=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 由定理 3.9，$\forall G\in fin(x)$，$\forall 1\leqslant i\leqslant n$，$G\not\subseteq\uparrow a_i$. 令 $F_i=\{G\setminus\uparrow a_i\}$，则 F_i 是定向的非空有限集集族且 $F_i\to x$. 由 Rudin 引理，存在定向集 $D_i\subseteq\cup F_i$，$\forall G\setminus\uparrow a_i\in F_i$，$D_i\cap(G\setminus\uparrow a_i)\neq\varnothing$ 从而 $D_i\to x$ 且 $D_i\cap\uparrow a_i=\varnothing$. 由 $x\in\overline{\downarrow D_i\downarrow x}$ 有，存在 $y_1\in(\uparrow F)^o\cap\downarrow D_1\cap\downarrow x$，从而 $D_2\to y_1$. 同理，$\exists y_2\in(\uparrow F)^o\cap\downarrow D_2\cap\downarrow y_1$. 由归纳法，当 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 时，存在 $\exists y_{i+1}\in(\uparrow F)^o\cap\downarrow D_{i+1}\cap\downarrow y_i$. 从而，$y_n\leqslant y_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant y_{i+1}\leqslant y_i\leqslant\cdots\leqslant y_1$. 由 $y_n\in\uparrow F$，必存在 $1\leqslant i_0\leqslant n$ 使得 $a_{i_0}\leqslant y_{i_0}$. 又 $y_{i_0}\in\downarrow D_{i_0}$，所以 $y_{i_0}\in\downarrow D_{i_0}\cap\downarrow a_{i_0}$ 矛盾. 因此，存在 $a\in F$，$X\in(\uparrow a)^o\subseteq\uparrow a\subseteq U$. 由定义 4.7，$X$ 是一个 c-空间.

综上，我们得到本节的主要结果.

定理 4.11 一个拓扑空间是 c-空间当且仅当它既是交连续的又是拟连续的.

参考文献：

[1] Abramsky S, Jung A. Domain Theory, Handbook of logic in computer science[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.

[2] Amadio R M, Curien P L. Domains and lambda-calculi [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[3] Banaschewski B, Hoffmann R E. Continuous lattices[M]. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981.

[4] Herrlich H, Porst H E. Category theory at work [M]. Berlin: Heldermann, 1991.

[5] Bjorner D, Broy M, Pottosin I V. Formal methods in programming and their applications [M]. Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 1993.

[6] Ershov Y L. The bounded complete hull of an α-space [J]. Theor Comput Sci, 1997, 175: 3.

[7] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, *et al*. Continuous lattices and domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[8] Gierz G, Lawson J D. Generalized continuous and hypercontinuous lattices[J]. Rocky MT J Math, 1981, 11: 271.

[9] Gierz G, Lawson J D, Stralka A. Quasicontinuous posets [J]. Houston J Math, 1983, 9: 191.

[10] Lawson J D, Zhang G Q, Liu Y M, *et al*. Domains and processes Ⅱ, semantic structures in computation [M]. Dordrecht: Springer, 2003.

[11] Lawson J D. The duality of continuous posets [J]. Houston J Math, 1979, 5: 357.

[12] 原雅燕，寇辉. 关于函数空间的超连续[J]. 数学年刊:A 辑, 2010, 31: 571.

[13] 俞月，寇辉. 由 T0 空间定义的特殊化序的定向空间[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 217.