doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.007

Sandwiched Renyi 量子相对熵单调性的另一证明

王友乐[1,2]，罗懋康[1]，邓　科[1]
(1.四川大学数学学院，成都 610064；2.电子信息控制重点实验室，成都 610000)

摘　要：量子相对熵在保迹完全正定的映射作用下是单调递减的.此外，对于一种新提出的 Sandwiched Renyi 量子相对熵，当映射满足 Schwarz 不等式或映射保迹正定时，也有研究证明该量子相对熵的单调性也成立. 本文利用复插值技巧给出当 $\alpha\in[\frac{1}{2},1)$ 时 Sandwiched Renyi 量子相对熵单调性的另一证明. 该技巧曾被用于证明 $\alpha\in(1,\infty)$ 时量子相对熵在保迹正定映射的作用下满足单调性.

关键词：Sandwiched Renyi 量子相对熵；单调性；复插值技巧
中图分类号：O29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)02-0257-03

A new proof for monotonicity of sandwiched Renyi relative entropy

WANG You-Le[1,2], *LUO Mao-Kang*[1], *DENG Ke*[1]
(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610000, China)

Abstract: It is well known that quantum relative entropy is monotonically decreasing under the completely positive and trace-preserving maps. For a new proposed sandwiched Renyi quantum relative entropy, the monotonicity still holds under the linear trace-preserving map whose Hilber-Schmidt adjoint map satisfies Schwarz inequality. In this paper, we give a new proof for the monotonicity of the sandwiched Renyi relative entropy for $\alpha\in[\frac{1}{2},1)$. The proof is based on the complex interpolation techniques, which is used to prove the monotonicity under the trace-preserving and positive map for $\alpha\in(1,\infty)$.

Keywords: Sandwiched Renyi relative entropy; Mapping; Complex interpolation technique

1　引　言

量子相对熵是量子信息中的重要概念并且被用做度量来区别量子态[1-13]. 设实函数 $D(\rho\|\sigma)$ 作用在量子态 ρ 和 σ 上，它是非负的且满足 Data-processing 不等式 $D(\rho\|\sigma)\geq D(N(\rho)\|N(\sigma))$，其中 N 是完全正定且保迹的映射. 一类重要的量子相对熵是 Renyi 量子相对熵. 它的一个变形是 α-Sandwiched Renyi 量子相对熵. 对于有限维 Hilbert 空间上的量子态 $\rho,\sigma\in S_d\subset M_d(C)$，即复 $d\times d$ 矩阵，其迹为 1，Sandwiched Renyi 量子相对的熵定义为

$$D_\alpha(\rho\|\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}\log\,(\sigma^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}\rho\sigma^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}})^\alpha & \mathrm{supp}(\rho)\subset\mathrm{supp}(\sigma),\\ +\infty & \text{其它},\end{cases}\tag{1}$$

这个定义首先在文献[4]和[5]出现，并在信息理论中得到应用，如假设检验和强反定理. 更多关于量子相对熵的讨论可见文献[6].

收稿日期：2017-04-19
基金项目：国家自然科学基金(11301361)
作者简介：王友乐，男，硕士研究生，主要研究方向为不确定性处理的数学.
通讯作者：邓科. E-mail：dk@scu.edu.cn

量子相对熵的一个重要的特性就是在量子信道的作用下不增,即对于完全正定且保迹的映射 $N: S_d \in \rho \to N(\rho) \in S_{d'}$,有如下的不等式成立:

$$\tilde{D}_\alpha(\rho \| \sigma) \geq \tilde{D}_\alpha(N(\rho) \| N(\sigma)).$$

该不等式称为 Data-processing 不等式. 对于 Sandwiched Renyi 量子相对熵,文献[7]证明了当 $\alpha > 1$ 时这个不等式成立,文献[8]证明了 $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \infty$ 时不等式同样成立,文献[9]则证明这个不等式中的映射要求可以弱化,即若映射 N 的伴随算子满足 Schwarz 不等式

$$N^*(X^\dagger X) \geq N^*(X)N^*(X),$$

其中 $X^\dagger$ 表示 X 的共轭算子,Data-processing 不等式也成立. 此外,文献[10]证明了当 $\alpha > 1$ 时 Data-processing 不等式对于保迹正算子成立.

本文给出 $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时 Sandwiched Renyi 量子相对熵单调性的另一证明,证明方法用到复插值技巧. 这个技巧曾被用于证明 $\alpha \in (1, \infty)$ 时量子相对熵在保迹正定映射的作用下满足单调性.

2 主要结果

定义 $S = \{z \in \mathbf{C}: 0 \leq \mathrm{re} z \leq 1\}$ 其中 re$z$ 表示虚数的实部. 证明主要用到参考文献[7]中的定理 2 的特殊形式,即在定理 2 中取 $\sigma = \mathrm{id}$.

定理 2.1 设 $G: S \to L(H)$ 是一个在 S 内部解析、在边界上连续的有界映射. 取 $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ 和 $0 < \theta < 1$,定义 p_θ:

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \tag{2}$$

满足 $p_0 \leq p_\theta \leq p_1$. 令 k 在 $\{0,1\}$ 中取值,且定义 M_k 为

$$M_k = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| G(k + \mathrm{i}t) \|_{p_k} \tag{3}$$

则

$$\| G(\theta) \|_{p_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \tag{4}$$

为证明 Sandwiched Renyi 量子相对熵在 $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时也满足 Data-processing 不等式,我们引入这种定义下的量子相对熵的差 $\tilde{D}_\alpha(\rho \| \sigma) - \tilde{D}_\alpha(N(\rho) \| N(\sigma))$ 的一种显示表达式 $\tilde{\Delta}_\alpha(\rho, \sigma, N)$[2]:

$$\tilde{\Delta}_\alpha(\rho, \sigma, N) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \log \| ([N(\rho)]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} [N(\sigma)]^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_{2\alpha} \tag{5}$$

其中用到 N 的 Stinespring 表示[11]:存在一个希尔伯特空间 E,使得

$$N(\rho) = \mathrm{tr}_E(U(\rho \otimes \mathrm{id}_E) U^\dagger),$$

这里id_E 是 E 上的恒等算子,$U_{A\to BE}$ 是量子通道 N 的等容扩张.

接下来我们给出 Data-processing 不等式的一种新的证明:

定理 2.2(Data-processing 不等式) 对于任意的密度矩阵 ρ, σ 和量子信道 N,当 $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时

$$\tilde{D}_\alpha(\rho \| \sigma) \geq \tilde{D}_\alpha(N(\rho) \| N(\sigma)) \tag{6}$$

成立.

证明 首先将 $U_{A\to BE}$ 简记为 U. 选取函数

$$G(z) = ([N(\rho)]^{\frac{z}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{z}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{z}{2}} \rho^{\frac{1}{2}},$$

$p_0 = 2, p_1 = 1$ 和 $\theta \in (0,1)$,

使得 $p_\theta = \frac{2}{1+\theta}$. 于是算子取值函数 $G(z)$ 满足定理 2.1 的条件. 计算可得下述结果:

$$\| G(\theta) \|_{\frac{2}{1+\theta}} = \| ([N(\rho)]^{\frac{\theta}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{\theta}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{\theta}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_{\frac{2}{1+\theta}} \tag{7}$$

$$\| G(\mathrm{i}t) \|_2 = \| ([N(\rho)]^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{\mathrm{i}t}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_2 \leq \| \rho^{\frac{1}{2}} \|_2 = 1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\| G(1+\mathrm{i}t) \|_1 &= \| ([N(\rho)]^{\frac{1+\mathrm{i}t}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{1+\mathrm{i}t}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{1+\mathrm{i}t}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_1 = \\
&\| ([N(\rho)]^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\rho)]^{\frac{1}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_1 = \\
&\| ([N(\rho)]^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\rho)]^{\frac{1}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_1 = \\
&\| ([N(\rho)]^{\frac{1}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{\mathrm{i}t}{2}} [N(\sigma)]^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE} \sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_1 = \\
&F(\rho, (R_{\sigma,N}^{\frac{t}{2}})(\rho))
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $R^{\frac{t}{2}}_{\sigma,N}$ 是 Petz 恢复算子. 我们有如下形式：

$$R^{t}_{\sigma,N}: X_B \to \sigma^{-it}\sigma, N(N(\sigma)^{it} X_B N(\sigma)^{-it})\sigma^{it},$$

$$P_{\sigma,N}: X_B \to \sigma^{\frac{1}{2}} N^{\dagger}(N(\sigma)^{-\frac{1}{2}} X_B N(\sigma)^{-\frac{1}{2}})\sigma^{\frac{1}{2}}.$$

另外 $F(\rho,\sigma) = \sqrt{\sigma^{\frac{1}{2}}\rho\sigma^{\frac{1}{2}}}$ 是量子态 ρ,σ 的 Fidelity 距离. 结合 $\|G(it)\|_2 \leq 1$ 和定理 2.1，对所有 $\theta \in (0,1)$ 有

$$\log \|([N(\rho)]^{\frac{\theta}{2}}[N(\sigma)]^{-\frac{\theta}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE}\sigma^{\frac{\theta}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\|_{\frac{2}{1+\theta}} \leq \log[\sup_{t\in\mathbf{R}} F(\rho,(\mathbf{R}^{\frac{t}{2}}_{\sigma,N})(\rho))]^{\theta}.$$

上式两边同乘以 $-\frac{2}{\theta}$ 有

$$-\frac{2}{\theta}\log \|([N(\rho)]^{\frac{\theta}{2}}[N(\sigma)]^{-\frac{\theta}{2}} \otimes \mathrm{id}_E) U_{A\to BE}\sigma^{\frac{\theta}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\|_{\frac{2}{1+\theta}} \geq -\frac{2}{\theta}\log[\sup_{t\in\mathbb{R}} F(\rho,(\mathbf{R}^{\frac{t}{2}}_{\sigma,N})(\rho))]^{\theta}.$$

令 $\theta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ 即可得

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha}(\rho,\sigma,N) \geq -2\log[\sup_{t\in\mathbf{R}} F(\rho,(\mathbf{R}^{\frac{t}{2}}_{\sigma,N})(\rho))] \tag{10}$$

为了得到结论，只需说明 $F(\rho,(\mathbf{R}^{\frac{t}{2}}_{\sigma,N})(\rho)) \leq 1$. 根据文献[3]中的 Uhmann 定理，系统 Q 上任意两个量子态 ρ,σ 都可以通过引入一个新的系统 R 组成成复合系统 $Q\otimes R$，使得 $Q\otimes R$ 上所有量子态 ρ 和 σ 的纯态 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$，即 $\mathrm{tr}_R(|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho$ 和 $\mathrm{tr}_R(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sigma$ 满足

$$F(\rho,\sigma) = \max_{|\psi\rangle,|\varphi\rangle} |\langle\psi|\varphi\rangle|.$$

显然这样的表达式说明 $F(\rho,\sigma)$ 的值不超过 1，等号成立当且仅当 $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$，也就是说 $\rho = \sigma$. 所以式(10)非负，结论得证.

3　结　语

我们给出了 $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$ 时 Sandwiched Renyi 量子相对熵在保迹完全正定算子作用下的单调性，证明方法用到了复插值定理，具体讨论可在文献[1]中查找. 但是对于同样 α 的取值时，映射的要求能不能弱化为保迹正算子则仍然有待证明.

参考文献：

[1]　Müller-Hermes A, Reeb D. Monotonicity of the quantum relative entropy under positive maps [J]. Ann Henri Poincaré, 2017, 18: 1777.

[2]　Seshadreesan K P, Berta M, Wilde M M. Renyi squashed entanglement, discord, and relative entropy differences [J]. J Phys A: Math Theor, 2015, 48: 395303.

[3]　Chuang M N. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[4]　Ruskai M B. Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality [J]. J Math Phys, 2002, 43: 4358.

[5]　Müllerlennert M, Dupuis F, Szehr O, *et al*. On quantum Rényi entropies: a new generalization and some properties [J]. J Math Phys, 2013, 54: 167.

[6]　Ohya M, Petz D. Quantum entropy and its use [J]. Berlin: Springer, 1995.

[7]　Beigi S. Quantum Renyi divergence satisfies data processing inequality [J]. J Math Phys, 2013, 54: 251.

[8]　Frank R L, Lieb E H. Monotonicity of a relative Renyi entropy [J]. J Math Phys, 2013, 54: 122201.

[9]　Uhlmann A. Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory [J]. Commun Math Phys, 1977, 54: 21.

[10]　Wilde M M, Winter A, Yang D. Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy [J]. Commun Math Phys, 2014, 331: 593.

[11]　Stinespring W F. Positive functions on c^*-algebras [J]. P Am Math Soc, 1955, 6: 211.

[12]　许可，吴小华. 去极化信道的多次量子纠错[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，50：342.

[13]　杨光，聂敏，杨武军. Sip 协议量子身份认证与密钥协商方案[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：87.