doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.05.007

漂移项加控制的随机 Stokes 系统的零能控

林　璐
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文利用 Lebeau-Robbiano 型谱不等式得到了倒向随机 Stokes 系统的部分能观性结果，从而得到受控正向随机 Stokes 系统在有限维子空间上的零能控，建立了不加控制的随机 Stokes 系统的解的高频部分能量的衰减性估计，并最终通过迭代的方法得到此系统的零能控结果.

关键词：随机 Stokes 系统；谱不等式；零能控
中图分类号：O231.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)05-0935-06

Null controllablity of a stochastic Stokes system with control on the drift

LIN Lu
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we consider a controlled forward stochastic Stokes system with a diagonal matrix as the coefficient of diffusion term, and the diagonal matrix elements are the same bounded stochastic process. For the situation that only one control applied to the drift term, we use the Lebeau-Robbiano type spectral inequality to establish a “partial” observability estimate result, by which we get the the corresponding finite dimensional null controllability and establish the required decay estimate. Finally, we derive the null controllability of the forward stochastic Stokes system.

Keywords: Stochastic Stokes system; Spectral inequality; Null controllability

1　引　言

本文研究受控正向随机 Stokes 系统的零能控问题，即满足如下给定条件的受控随机 Stokes 系统的能控性：扩散项的系数为对角矩阵，其对角元素为相同的有界随机过程，控制加在漂移项.

对于能控性问题的研究，在文献[1,2]中 Laplace 算子的特征函数的性质基础上，文献[3,4]将进一步发展的 Lebeau-Robbiano 谱不等式用于确定性分布参数系统能控性问题的研究. 文献[5]利用 Lebeau-Robbiano 谱不等式研究了热方程的零能控和 Bang-Bang 控制问题. 文献[6]证明了 Laplace-Beltrami 算子的 Lebeau-Robbiano 谱不等式. 文献[7]研究了随机抛物系统的零能控问题. 文献[8]利用一致椭圆算子的 Lebeau-Robbiano 谱不等式对分数阶耦合随机抛物系统的零能控进行了讨论.

Stokes 方程是 Naiver-Stokes 方程的线性化方程. 了解受控 Stokes 系统的结构对了解受控 Naiver-Stokes 系统有着非常重要的意义. 文献[9]利用 Carleman 估计给出了加 $N-1$ 个数值控制的 N 维受控 Stokes 系统的零能控. 文献[10]证明了 Stokes 算子的 Lebeau-Robbiano 型的谱不等式并用于证明 Stokes 系统的零能控结果并给出控制代价的估计. 本文将对控制加在时间集 E 上的受控随机 Stokes 系统(4)的零能控进行讨论.

2　预备知识

设 G 是 $\mathbf{R}^3$ 中具有 C^∞ 边界 Γ 的有界区域，G_0

收稿日期：2017-05-03
基金项目：国家自然科学基金(11471231)
作者简介：林璐(1992－)，男，江西丰城人，硕士，主要研究方向分布参数系统的控制理论. E-mail：linlu_67@163.com

是 G 中的非空开子集. 引入流体力学中通常使用的函数空间 V 和 H [11]:

$$V = \{u \in (H_0^1(G))^3 : \mathrm{div} u = 0 \text{ 在 } G \text{ 中}\} \quad (1)$$

$$H = \{u \in (L^2(G))^3 : \mathrm{div} u = 0 \text{ 在 } G \text{ 中}, u \cdot \nu = 0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}\} \quad (2)$$

其中 $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3) = \nu(x)$ 是在 $x \in \Gamma$ 处 G 的单位外法向量, V 和 H 都是 Hilbert 空间,其上的内积分别为:

$$\begin{cases} (u,v)_V = \int_G \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x, \\ (u,v)_H = \int_G u \cdot v \mathrm{d}x \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\nabla u \cdot \nabla v \triangleq \sum_{i=1}^{3} < \nabla u_i, \nabla v_i >_{\mathbf{R}^3}$. 又设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}, P)$ 是一个完备的带滤子的概率空间,其上定义有一个标准的一维布朗运动 $\{W(t)\}_{t \geqslant 0}$, $\{F\}_{t \geqslant 0}$ 是 $\{W(t)\}_{t \geqslant 0}$ 生成的自然滤子. 设 H 是一个 Hilbert 空间,记 $L_F^r(0,T;L^2(\Omega;H))$ 为满足 $|(E|X|_H^2)^{\frac{1}{2}}|_{L^r(0,T)} < \infty (1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 的全体 $\{F_t\}_{t \geqslant 0}$-适应 H-值过程 $X(\cdot)$ 构成的 Banach 空间. $L_F^2(\Omega;C([0,T];H))$ 为满足 $E(|X(\cdot)|^2_{C([0,T];H)}) < \infty$ 的全体 $\{F_t\}_{t \geqslant 0}$-适应 H-值连续过程 $X(\cdot)$ 构成的 Banach 空间, $L_F^\infty(0,T;H)$ 为全体 H-值 $\{F_t\}_{t \geqslant 0}$-适应的 H-值有界过程 $X(\cdot)$ 构成的 Banach 空间. 以上空间均赋有标准范数.

我们考虑如下受控的随机 Stokes 系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}y - \Delta y \mathrm{d}t + \nabla p \mathrm{d}t = \chi_E \chi_{G_0} u \mathrm{d}t + \\ \quad a(t) y \mathrm{d}W(t) & \text{在 } Q = (0,T) \times G \text{ 中}, \\ \mathrm{div} y = 0 & \text{在 } Q = (0,T) \times G \text{ 中}, \\ y = 0 & \text{在 } \Sigma = (0,T) \times \Gamma \text{ 上}, \\ y(0) = y_0 & \text{在 } G \text{ 中} \end{cases} \quad (4)$$

的零能控,其中 $a(t) = \mathrm{diag}(b(t), b(t), b(t))$, $b(\cdot) \in L_F^\infty(0,T;\mathbf{R})$, $T > 0$, E 是区间 $(0,T)$ 上具有正 Lebesgue 测度(即 $m(E) > 0$, 此处 $m(\cdot)$ 是 Lebesgue 测度)的子集, χ_E, χ_{G_0} 分别是 E, G_0 的特征函数, y 是状态变量, $y_0 \in H$. $u \in L_F^\infty(0,T;L^2(\Omega;H))$ 是控制.

在文献[11]中有如下结果:

$$(L^2(G))^3 = H \oplus H^\perp \quad (5)$$

其中

$$H^\perp = \{u \in (L^2(G))^3 : u = \nabla w, w \in H^1(G)\}.$$

记 $P:(L^2(G))^3 \to H$ 为 $(L^2(G))^3$ 到 H 的正交投影算子,则 Stokes 算子可以定义为:

$$\begin{cases} D(A) = (H^2(G))^3 \cap V, \\ Au = -P\Delta u, \forall u \in D(A) \end{cases} \quad (6)$$

易证 Stokes 算子 A 是一个具有紧预解式的自伴算子,而且是极大单调的,即

$$\begin{cases} (Au, u)_H \geqslant 0, \forall u \in D(A), \\ R(I+A) = H \end{cases} \quad (7)$$

于是可以设 $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ 为 Stokes 算子的特征函数系,且构成 H 的一组规范完备正交基,即满足 $|e_j|_H = 1, j = 1, 2, \cdots$ 及

$$\begin{cases} -\Delta e_j + \nabla p_j = \lambda_j e_j & \text{在 } G \text{ 中}, \\ \mathrm{div} e_j = 0 & \text{在 } G \text{ 中}, \\ e_j = 0 & \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 为相应的特征值序列,满足

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty \quad (9)$$

根据 Stokes 算子的定义,系统(3)可以写成如下抽象发展方程形式:

$$\begin{cases} \mathrm{d}y + Ay \mathrm{d}t = \chi_E \chi_{G_0} u \mathrm{d}t + a(t) y \mathrm{d}W(t), \\ \quad t \in (0,T], \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (10)$$

由于 Stokes 算子 A 是极大单调的自伴算子,由半群理论可以知道 A 可以生成一个 C_0-半群 $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t \geqslant 0}$.

根据随机发展方程的理论[12],我们有如下的适定性结果.

定理 2.1 设 $a(\cdot) \in L_F^\infty(0,T;\mathbf{R}^{3\times 3})$. 则对任意的 $y_0 \in H$ 以及 $u \in L_F^\infty(0,T;L^2(\Omega;H))$, 系统(10)有唯一的的温和解 $y \in L_F^2(\Omega;C([0,T];H)) \cap L_F^2(0,T;D(A^{1/2}))$. 进一步有

$$|y|_{L_F^2(\Omega;C([0,T];H)) \cap L_F^2(0,T;D(A^{1/2}))} \leqslant C(|y_0|_H + |u|_{L_F^\infty(0,T;L^2(\Omega;H))}) \quad (11)$$

定义 2.2 称系统(4)在时刻 T 是零能控的,如果对任意的 $y_0 \in H$, 存在一个控制 $u \in L_F^\infty(0,T;L^2(\Omega;H))$, 使得系统的解满足 $y(T) = 0$, P-a.s.

下面首先给出关于 Stokes 算子的 Lebeau-Robbiano 型的谱不等式[10].

引理 2.3 设 $G_0 \subset G$ 是一个非空开集. 则存在两个常数 $C_1 \geqslant 0$ 和 $C_2 \geqslant 0$ 使得对任意的 $r \geqslant 1$ 和 $\{a_i\} \subseteq C$, 不等式

$$\sum_{\lambda_i \leqslant r} |a_i|^2 = \int_G |\sum_{\lambda_i \leqslant r} a_i e_i(x)|^2_{C^3} \mathrm{d}x \leqslant C_1 \mathrm{e}^{C_2\sqrt{r}} \int_{G_0} |\sum_{\lambda_i \leqslant r} a_i e_i(x)|^2_{C^3} \mathrm{d}x \quad (12)$$

成立.

其次给出在带滤子的概率空间上的 Riesz 型

表示定理.

引理 2.4[13]　假设 $1 \leqslant p,q < \infty$，H 是一个 Hilbert 空间，则

$$L_F^p(0,T;L^q(\Omega;H))^* = L_F^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega;H)) \tag{13}$$

其中 p' 和 q' 是 p 和 q 相应的 Hölder 共轭指数.

最后陈述一个实分析中关于实直线上 Lebesgue 可测集结构的事实.

引理 2.5[14]　对 a.e. $\tilde{t} \in E$，存在一列实数 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,T)$，使得 $t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < \tilde{t}$，$t_i \to \tilde{t}$，当 $i \to \infty$ 时，

$$m(E \cap [t_i, t_{i+1}]) \geqslant \rho_1 (t_{i+1} - t_i),\ i = 1,2,\cdots,\quad \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_{i+1}} \leqslant \rho_2 \tag{14}$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 是两个与 i 无关的正常数.

对任意的 s_1 和 s_2 满足 $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant T$，引入如下的倒向随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dz + \Delta z dt - \nabla p dt = -a(t)^{\mathrm{T}} Z dt + Z dW(t) & \text{在} (s_1,s_2) \times G \text{ 中}, \\ \operatorname{div} z = 0 & \text{在} (s_1,s_2) \times G \text{ 中}, \\ z = 0 & \text{在} (s_1,s_2) \times \Gamma \text{ 上}, \\ z(s_2) = \eta & \text{在} G \text{ 中} \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\eta \in L^2_{F_{s_2}}(\Omega;H)$. 令 $r_0 = |a(\cdot)|^2_{L_F^{\infty}(0,T;\mathbf{R}^{3\times 3})}$. 对任意给定的 $r \geqslant \lambda_1$，记 $H_r = \mathrm{span}\{e_i \mid \lambda_i \leqslant r\}$，并记 Π_r 为从 H 到 H_r 的正交投影算子. 记 $\Lambda_r = \{i \in \mathbf{N} \mid \lambda_i \leqslant r\}$. 我们有如下的部分能观性结果.

命题 2.6　对任意的 $r \geqslant \lambda_1$ 以及 $\eta \in L^2_{F_{s_2}}(\Omega, H_r)$，系统(15)的解满足如下估计：

$$E|z(s_1)|_H^2 \leqslant \frac{C_1 e^{C_2\sqrt{r} + r_0(s_2 - s_1)}}{(m(E \cap [s_1,s_2]))^2} |\chi_E \chi_{G_0} z|^2_{L_F^1(s_1,s_2;L^2(\Omega;H))} \tag{16}$$

其中 $m(E \cap [s_1,s_2]) > 0$.

证明　对任意的 $\eta \in L^2_{F_{s_2}}(\Omega;H_r)$，可以将其展开为 $\eta = \sum_{i \in \Lambda_r} \eta_i e_i(x)$，其中 $\eta_i \in L^2_{F_{s_2}}(\Omega;\mathbf{R})$，$i \in \Lambda_r$. 于是方程(15)的解可以展开为

$$z(t) = \sum_{i \in \Lambda_r} z_i(t) e_i,\ Z(t) = \sum_{i \in \Lambda_r} Z_i(t) e_i \tag{17}$$

其中 $z_i(\cdot) \in C_F([s_1,s_2];L^2(\Omega;\mathbf{R}))$，$Z_i(\cdot) \in L_F^2(s_1,s_2;\mathbf{R})$，且满足如下倒向随机常微分方程：

$$\begin{cases} dz_i = \lambda_i z_i dt - b(t) Z_i dt + Z_i dW(t), \\ \quad t \in [s_1,s_2), \\ z_i(s_2) = \eta_i \end{cases} \tag{18}$$

由引理 2.3 可知，对任意的 $t \in [s_1,s_2]$，有

$$E|z(t)|_H^2 dx = E\sum_{i \in \Lambda_r} |z_i(t)|^2 \leqslant C_1 e^{C_2\sqrt{r}} E\int_{G_0} |z(t)|^2_{\mathbf{R}^3} dx \tag{19}$$

利用 Itô 公式，直接计算有

$$\begin{aligned} &E\left(e^{r_0 t}\int_G |z(t)|^2_{\mathbf{R}^3} dx\right) - E\left(e^{r_0 s_1}\int_G |z(s_1)|^2_{\mathbf{R}^3} dx\right) = \\ &E\int_{s_1}^t \int_G r_0 e^{r_0 s} |z(s)|^2_{\mathbf{R}^3} dx ds + 2E\int_{s_1}^t \int_G r_0 e^{r_0 s} \sum_{i \in \Lambda_r} \lambda_i |z_i|^2 dx ds - \\ &2E\int_{s_1}^t \int_G r_0 e^{r_0 s} \langle z(s), a(s)^T Z(s)\rangle_{\mathbf{R}^3} dx ds + E\int_{s_1}^t \int_G |Z(s)|^2_{\mathbf{R}^3} dx ds \geqslant 0 \end{aligned} \tag{20}$$

于是由(19)式，对任意的 $t \in [s_1,s_2]$，有

$$\int_{E\cap[s_1,s_2]} \left[E\int_G |z(s_1,x)|^2_{\mathbf{R}^3} dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant (C_1 e^{C_2\sqrt{r} + r_0(s_2 - r_1)})^{\frac{1}{2}} \int_{E\cap[s_1,s_2]} \left[E\int_{G_0} |z(t,x)|^2_{R^3} dx\right]^{\frac{1}{2}} dt \tag{21}$$

注意到 $m(E \cap [s_1,s_2]) > 0$，则有对任意的 $\eta \in L^2_{F_{s_2}}(\Omega;H_r)$，有

$$E|z(s_1)|_H^2 \leqslant \frac{C_1 e^{C_2\sqrt{r} + r_0(s_2 - s_1)}}{(m(E \cap [s_1,s_2]))^2} |\chi_E \chi_{G_0} z|^2_{L_F^1(s_1,s_2;L^2(\Omega;H))} \tag{22}$$

考虑如下受控正向随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dy - \Delta y dt + \nabla p dt = \chi_E \chi_{G_0} u dt + a(t) y dW(t) & \text{在} (s_1,s_2) \times G \text{ 中}, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{在} (s_1,s_2) \times G \text{ 中}, \\ y = 0 & \text{在} (s_1,s_2) \times \Gamma \text{ 上}, \\ y(s_1) = y_{s_1} & \text{在} G \text{ 中} \end{cases} \tag{23}$$

其中 $y_{s_1} \in L^2_{F_{s_1}}(\Omega;H)$. 利用经典的对偶方法，下述命题 2.2 给出了上述受控随机 Stokes 系统的有限维零能控的结果.

命题 2.7[7]　设 $m(E \cap [s_1,s_2]) \neq 0$，则对任意的 $r \geqslant \lambda_1$ 以及 $y_{s_1} \in L^2_{F_{s_1}}(\Omega;H)$，存在控制 $u_r \in L_F^{\infty}(s_1,s_2;L^2(\Omega;H))$，使得系统(23)相应于 $u = u_r$ 的解 y 满足 $\Pi_r(y(s_2)) = 0$，P-a.s. 进一步，u_r 满足如下估计：

$$|u_r|^2_{L_F^{\infty}(s_1,s_2;L^2(\Omega;H))} \leqslant \frac{C_1 e^{C_2\sqrt{r} + r_0(s_2 - s_1)}}{(m(E \cap [s_1,s_2]))^2} |y_{s_1}|^2_{L^2_{F_{s_1}}(\Omega;H)} \tag{24}$$

对任意给定的 $s\in[0,T)$，考虑如下不加控制的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dy-\Delta y dt+\nabla p dt= \\ \quad a(t)ydW(t) & 在(s,T)\times G 中, \\ \operatorname{div}y=0 & 在(s,T)\times G 中, \\ y=0 & 在(s,T)\times\Gamma 上, \\ y(s)=y_s & 在 G 中 \end{cases} \tag{25}$$

其中 $y_s\in L^2_{F_s}(\Omega;H)$. 下面给出系统(25)的解的高频部分能量的衰减估计.

命题 2.8 设 $r\geqslant\lambda_1$. 则对满足 $\Pi_r(y_s)=0$，P-a. s. 的任意的 $y_s\in L^2_{F_s}(\Omega;H)$，系统(25)的解对任意给定的 $t\in[s,T]$ 满足如下衰减性估计：

$$E|y(t)|_H^2\leqslant e^{-(2r+r_0)(t-s)}|y_s|^2_{L^2_{F_s}(\Omega;H)} \tag{26}$$

证明 对于任意 $y_s\in L^2_{F_s}(\Omega;H)$，满足 $\Pi_r(y_s)=0$，P-a. s.，可将其展开为 $y=\sum_{i\in N\backslash\Lambda_r}y_s^ie_i(x)$，其中 $y_s^i\in L^2_{F_s}(\Omega;\mathbf{R})$，$i\in\mathbf{N}\backslash\Lambda_r$. 方程(25)的解可展开为

$$y(t)=\sum_{i\in\mathbf{N}\backslash\Lambda_r}y^i(t)e_i \tag{27}$$

其中 $y^i(\cdot)\in C_F([s_1,s_2];L^2(\Omega;\mathbf{R}))$，且其满足如下随机常微分方程：

$$\begin{cases} dy^i=-\lambda_iy^idt+b(t)y^idW(t),\ t\in(s,T], \\ y^i(s)=y_s^i \end{cases} \tag{28}$$

利用 Itô 公式，直接计算并注意到 $\lambda_i>r$，$\forall i\in\mathbf{N}\backslash\Lambda_r$ 以及 $r_0=|a|^2_{L_F^\infty(0,T;\mathbf{R}^{3\times3})}$，有

$$\begin{aligned} &E\left(e^{(2r-r_0)(t-s)}\int_G|y(t)|^2_{\mathbf{R}^3}dx\right)- \\ &E\left(\int_G|y(s)|^2_{\mathbf{R}^3}dx\right)= \\ &E\int_s^t\int_G(2r-r_0)e^{(2r-r_0)(\tau-s)}|y(\tau)|^2_{\mathbf{R}^3}dxd\tau- \\ &E\int_s^t\int_G2e^{(2r-r_0)(\tau-s)}\sum_{i\in\mathbf{N}\backslash\Lambda_r}\lambda_i|y^i|^2dxd\tau+ \\ &E\int_s^t\int_Ge^{(2r-r_0)(\tau-s)}|a(\tau)y(\tau)|^2_{\mathbf{R}^3}dxd\tau\leqslant0 \end{aligned} \tag{29}$$

3 主要结果

定理 3.1 系统(4)在 $[0,T]$ 上是零能控的.

证明 给定 $t_1,\tilde{t}\in(0,T]$，且 $t_1<\tilde{t}$. 首先在 $(0,t_1)$ 内考虑如下不加控制的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dy-\Delta y dt+\nabla p dt= \\ \quad a(t)ydW(t) & 在(0,t_1)\times G 中, \\ \operatorname{div}y=0 & 在(0,t_1)\times G 中, \\ y=0 & 在(0,t_1)\times\Gamma 上, \\ y(0)=y_0 & 在 G 中 \end{cases} \tag{30}$$

令 $\tilde{y}_0=y(t_1)$. 考虑如下受控的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dy-\Delta y dt+\nabla p dt=\chi_E\chi_{G_0}udt+ \\ \quad a(t)ydW(t) & 在(t_1,\tilde{t})\times G 中, \\ \operatorname{div}y=0 & 在(t_1,\tilde{t})\times G 中, \\ y=0 & 在(t_1,\tilde{t})\times\Gamma 上, \\ y(t_1)=\tilde{y}_0 & 在 G 中 \end{cases} \tag{31}$$

为找到一个控制 $\tilde{u}\in L_F^\infty(t_1,\tilde{t};L^2(\Omega;H))$ 使得 $y(\tilde{t})=0$，P-a. s.，且有估计

$$|\tilde{u}|^2_{L_F^\infty(t_1,\tilde{t};L^2(\Omega;H))}\leqslant CE|\tilde{y}_0|_H^2 \tag{32}$$

以下分三步来证明.

步骤一，一方面，由引理 2.5，存在一列实数 $\{t_i\}_{i=1}^\infty\subset(0,T)$ 及正常数 ρ_1 和 ρ_2 使得引理 2.5 中的(14)式成立. 记 $I_N=[t_{2N-1},t_{2N}]$ 以及 $J_N=[t_{2N},t_{2N+1}]$，$N\in\mathbf{N}$. 于是有 $[t_1,\tilde{t})=\bigcup_{N=1}^\infty(I_N\cup J_N)$ 以及

$$m(E\cap I_N)>0,m(E\cap J_N)>0 \tag{33}$$

另一方面，取一列合适的严格单增的正数序列 $\{r_N\}_{N=1}^\infty$ 满足 $\lambda_1<r_1<r_2<\cdots<r_N\to\infty$，$N\to\infty$ 以及 $r_1>1$.

步骤二，建立证明所需的一个能量估计. 在 $I_1=[t_1,t_2]$ 上，考虑如下的受控随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases} dy_1-\Delta y_1dt+\nabla p_1dt=\chi_E\chi_{G_0}u_1dt+ \\ \quad a(t)y_1dW(t) & 在(t_1,t_2)\times G 中, \\ \operatorname{div}y_1=0 & 在(t_1,t_2)\times G 中, \\ y_1=0 & 在(t_1,t_2)\times\Gamma 上, \\ y_1(t_1)=\tilde{y}_0 & 在 G 中 \end{cases} \tag{34}$$

由命题 2.7，存在一个控制 $u_1\in L_F^\infty(t_1,t_2;L^2(\Omega;H))$，满足如下估计：

$$|u_1|^2_{L_F^\infty(t_1,t_2;L^2(\Omega;H))}\leqslant \frac{C_1e^{C_2\sqrt{r_1}+r_0T}}{(m(E\cap[t_1,t_2]))^2}E|\tilde{y}_0|_H^2 \tag{35}$$

并使得在 G 上 $\Pi_{r_1}(y(t_2))=0$，P-a. s.. 由步骤一中的假定，有

$$|u_1|^2_{L_F^\infty(t_1,t_2;L^2(\Omega;H))}\leqslant\frac{C_1e^{C_2\sqrt{r_1}+r_0T}}{\rho_1^2(t_2-t_1)^2}E|\tilde{y}_0|_H^2 \tag{36}$$

下面来估计 $E|y_1(t_2)|_H^2$. 利用 Itô 公式直接计算有

$$\begin{aligned} &e^{-(r_0+1)t_2}E|y_1(t_2)|_H^2- \\ &\quad e^{-(r_0+1)t_1}E|y_1(t_1)|_H^2=-E\int_G\int_{t_1}^{t_2}(r_0+ \\ &\quad 1)e^{-(r_0+1)t}|y_1(t)|^2_{\mathbf{R}^3}dtdx+ \\ &\quad E\int_{t_1}^{t_2}2e^{-(r_0+1)t}\int_G\nabla y\cdot\nabla ydxdt+ \\ &\quad 2E\int_{t_1}^{t_2}e^{-(r_0+1)t}\int_G\langle\chi_E\chi_{G_0}u_1,y_1\rangle_{\mathbf{R}^3}dxdt+ \\ &\quad E\int_{t_1}^{t_2}e^{-(r_0+1)t}\int_G|a(s)y_1^2|dxdt \end{aligned} \tag{37}$$

注意到 $r_0=|a(\cdot)|^2_{L_F^\infty(0,T;\mathbf{R}^{3\times 3})}$，我们有

$$\mathrm{e}^{-(r_0+1)t_2}E|y_1(t_2)|_H^2-\mathrm{e}^{-(r_0+1)t_1}E|y_1(t_1)|_H^2\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-(r_0+1)t_1}-\mathrm{e}^{-(r_0+1)t_2}}{r_0+1}|u_1|^2_{L_F^\infty(t_1,t_2;L^2(\Omega;H))}\tag{38}$$

进一步，由(36)和(38)式有

$$E|y_1(t_2)|_H^2\leqslant \frac{\rho_1^2(t_2-t_1)^2\mathrm{e}^{(r_0+1)T}+\mathrm{e}^{(2r_0+1)T}C_1\mathrm{e}^{C_2\sqrt{r_1}}}{\rho_1^2(t_2-t_1)^2}E|y_1(t_1)|_H^2\tag{39}$$

取 $\widetilde{C}_1=\max\{\rho_1^2T^2,C_1\}$. 我们有

$$E|y_1(t_2)|_H^2\leqslant\frac{2\widetilde{C}_1\mathrm{e}^{(2r_0+1)T}\mathrm{e}^{C_2\sqrt{r}}}{\rho_1^2(t_2-t_1)^2}E|y_1(t_1)|_H^2\leqslant \frac{C_3\mathrm{e}^{C_3\sqrt{r}}}{(t_2-t_1)^2}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{40}$$

其中 $C_3=\max\{2\widetilde{C}_1\rho_1^{-2}\mathrm{e}^{(2r_0+1)T},C_2\}$.

在区间 $J_2=[t_2,t_3]$ 上，考虑如下不加控制的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}z_1-\Delta z_1\mathrm{d}t+\nabla p_2\mathrm{d}t= & \\ \quad a(t)z_1\mathrm{d}W(t) & 在(t_2,t_3)\times G 中,\\ \mathrm{div}z_1=0 & 在(t_2,t_3)\times G 中,\\ z_1=0 & 在(t_2,t_3)\times\Gamma 上,\\ z_1(t_2)=y_1(t_2) & 在 G 中\end{cases}\tag{41}$$

注意到 $\Pi_{r_1}(y_1(t_2))=0$，P-a. s.，由命题 2.3 中的衰减性估计，我们有

$$E|z_1(t_3)|_H^2\leqslant\frac{C_3\mathrm{e}^{C_3\sqrt{r_1}}}{(t_2-t_1)^2}\mathrm{e}^{(-2r_1+r_0)(t_3-t_2)}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{42}$$

步骤三. 首先，在区间 $I_N=[t_{2N-1},t_{2N}]$上，我们考虑如下受控的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_N-\Delta y_N\mathrm{d}t+\nabla p_{2N-1}\mathrm{d}t=\chi_E\chi_{G_0}u_N\mathrm{d}t+ & \\ \quad a(t)y_N\mathrm{d}W(t) & 在(t_{2N-1},t_{2N})\times G 中,\\ \mathrm{div}y_N=0 & 在(t_{2N-1},t_{2N})\times G 中,\\ y_N=0 & 在(t_{2N-1},t_{2N})\times\Gamma 上,\\ y_N(t_{2N-1})=z_{N-1}(t_{2N-1}) & 在 G 中\end{cases}\tag{43}$$

类似于步骤二的讨论，我们可以找到一个控制 $u_N\in L_F^\infty(t_{2N-1},t_{2N};L^2(\Omega;H))$满足如下估计：

$$|u_N|^2_{L_F^\infty(t_{2N-1},t_{2N};L^2(\Omega;H))}\leqslant\frac{C_1\mathrm{e}^{C_2\sqrt{r_N}+r_0T}}{\rho_1^2(t_{2N}-t_{2N-1})^2}E|z_{N-1}(t_{2N-1})|_H^2\tag{44}$$

并使得在 G 上 $\Pi_{r_N}(y_N(t_{2N}))=0$，P-a. s.，进一步有如下能量估计：

$$E|y_N(t_{2N})|_H^2\leqslant\frac{C_3\mathrm{e}^{C_3\sqrt{r_N}}}{(t_{2N}-t_{2N-1})^2}E|z_{N-1}(t_{2N-1})|_H^2\tag{45}$$

其次，在区间 $J_N=[t_{2N},t_{2N+1}]$上，我们考虑如下不加控制的随机 Stokes 系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}z_N-\Delta z_N\mathrm{d}t+\nabla p_{2N}\mathrm{d}t= & \\ \quad a(t)z_N\mathrm{d}W(t) & 在(t_{2N},t_{2N+1})\times G 中,\\ \mathrm{div}z_N=0 & 在(t_{2N},t_{2N+1})\times G 中,\\ z_N=0 & 在(t_{2N},t_{2N+1})\times\Gamma 上,\\ z_N(t_{2N})=y_N(t_{2N}) & 在 G 中\end{cases}\tag{46}$$

由于 $\Pi_{r_N}(y_N(t_{2N}))=0$，P-a. s.，由命题 2.8 中的衰减性估计，我们有

$$\begin{aligned}E|z_N(t_{2N+1})|_H^2&\leqslant\frac{C_3\mathrm{e}^{C_3\sqrt{r_N}}}{(t_{2N}-t_{2N-1})^2}\mathrm{e}^{(-2r_N+r_0)(t_{2N+1}-t_{2N})}E|y_N(t_{2N-1})|_H^2\leqslant\\ &\frac{C_4\mathrm{e}^{C_4\sqrt{r_N}}}{(t_{2N}-t_{2N-1})^2}\mathrm{e}^{-2r_N(t_{2N+1}-t_{2N})}E|z_{N-1}(t_{2N-1})|_H^2\end{aligned}\tag{47}$$

其中 $C_4=C_3\mathrm{e}^{r_0T}$. 做迭代有如下估计：

$$E\mid z_N(t_{2N+1})\mid_H^2\leqslant\frac{C_4^N\mathrm{e}^{C_4N\sqrt{r_N}-2r_N(t_{2N+1}-t_{2N})}}{\prod_{k=1}^{N}(t_{2k}-t_{2k-1})^2}E\mid\widetilde{y}_0\mid_H^2\tag{48}$$

由(14)式可以将(48)式整理成

$$E|z_N(t_{2N+1})|_H^2\leqslant\frac{C_4^N\rho_2^{2N(N-1)}\mathrm{e}^{C_4N\sqrt{r_N}-2(t_2-t_1)\rho_2^{1-2N}r_N}}{(t_2-t_1)^{2N}}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{49}$$

和上面一样的讨论，由(44)和(49)式有

$$|u_N|^2_{L_F^\infty(t_{2N-1},t_{2N};L^2(\Omega;H))}\leqslant\frac{C_1\mathrm{e}^{r_0T}C_4^{N-1}\rho_2^{2N(N-1)}\mathrm{e}^{C_4N\sqrt{r_N}}}{\rho_1^2(t_2-t_1)^{2N}\mathrm{e}^{2(t_2-t_1)\rho_2^{3-2N}r_{N-1}}}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{50}$$

由(45)和(49)式有

$$E|y_N(t_{2N})|_H^2\leqslant\frac{C_3\mathrm{e}^{r_0T}C_4^{N-1}\rho_2^{2N(N-1)}\mathrm{e}^{C_4N\sqrt{r_N}}}{\rho_1^2(t_2-t_1)^{2N}\mathrm{e}^{2(t_2-t_1)\rho_2^{3-2N}r_{N-1}}}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{51}$$

选择

$$r_{N-1}=2^{2N^2+2}+\lambda_1+1\tag{52}$$

易知当 $N\to\infty$ 时，$r_N\to\infty$，且有 $r_N>\lambda_1+1$，$N\in\mathbf{N}_+$. 取 N_1 充分大，使得当 $N\geqslant N_1$ 时有

$$|u_N|^2_{L_F^\infty(t_{2N-1},t_{2N};L^2(\Omega;H))}\leqslant\frac{1}{2^N}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{53}$$

同样的讨论有

$$E|y_N(t_{2N})|_H^2\leqslant\frac{1}{2^N}E|\widetilde{y}_0|_H^2\tag{54}$$

于是现在可以构造如下控制 $\widetilde{u}$：

$$\widetilde{u}(t,x)=\begin{cases}u_N(t,x), & (t,x)\in I_N\times G,N\geqslant 1,\\ 0, & (t,x)\in J_N\times G,N\geqslant 1\end{cases}\tag{55}$$

满足

$$|\tilde{u}|^2_{L_F^\infty(t,\tilde{t};L^2(\Omega;H))} \leqslant \sum_{N=1}^{\infty} |u_N|^2_{L_F^\infty(t_{2N-1},t_{2N};L^2(\Omega;H))} \leqslant (\bar{C}+1)E|\tilde{y}_0|^2_H \quad (56)$$

其中

$$\bar{C} = \sum_{N=1}^{N_2+1} \frac{C_1 e^{r_0 T} C_4^{N-1} \rho_2^{2N(N-1)} e^{C_4 N \sqrt{r_N}}}{\rho_1^2 (t_2 - t_1)^{2N} e^{2(t_2-t_1)\rho_2^{3-2N} r_{N-1}}} \quad (57)$$

因此$\tilde{u}\in L_F^\infty(t,\tilde{t};L^2(\Omega;H))$. 记 $\tilde{y}$ 为系统(31)相应于上述构造的控制 $\tilde{u}$ 的解,则有$\tilde{y}(t,x)=y_N(t,x)$,当$(t,x)\in I_N\times G$ 时. 由(54)式和 $y\in L_F^2(\Omega;C([0,T];H))$,以及 $N\to\infty$ 时 $t_{2N}\to\tilde{t}$,我们有 G 上 $\tilde{y}(\tilde{t})=0$,P-a. s. ,证毕.

参考文献:

[1] Donnelly H, Fefferman C. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds[J]. Invent Math, 1988, 93: 161.

[2] Donnelly H, Fefferman C. Nodal sets of eigenfunctions of the Laplacian on surfaces [J]. J Am-Math Soc, 1990, 3: 333.

[3] Lebeau G, Robbiano L. Contôle exact de l'′ equation de la chaleur [J]. Commun Part Diff Eq, 1995, 20: 335. 11

[4] Lebeau G, Zuazua E. Null cotrollability of a system of linear thermoelasticity[J]. Arch Ration Mech An, 1998, 141: 297

[5] Wang G. L^∞-null controllabilty for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem [J]. SIAM J Control Optim, 2008, 47: 1701.

[6] Lü Q. A lower bound on local enery of partial sum of eigenfunctions for Laplace-Beltrami operator[J]. ESAIM Contr Optim Ca, 2013, 49: 255.

[7] Lü Q. Some results on the controllability of forward stochastic parabolic equations with control on the drift [J]. J Funct Anal, 2011, 260: 832.

[8] Liu X. Controllability of some coupled stochastic parabolic systems with fractional order spatial differential operators by one control in the drift [J]. SIAM J Control Optim, 2014, 52: 836.

[9] Coron J M, Gueerero S. Null controllability of the N-dimensional Stokes system with $N-1$ scalar controls [J]. J Diff Equ, 2009, 246: 2908.

[10] Chaves-Silva F, Lebeau G. Spectral inequality and optimal cost of controllability for the Stokes system[J]. ESAIM Contr Optim Ca, 2016, 22: 1137.

[11] Tang S, Zhang X. Null controllability for forward and backward stochastic parabolic equations[J]. SIAM J Control Optim, 2009, 48: 2191.

[12] Lü Q, Yong J, Zhang X. Representation of Itô integrals by Lebesgue/Bochner integrals [J]. J Eur Math Soc, 2012, 14: 1795.

[13] Lions J L. Optimal control of systems governed by partial differential equations [J]. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1971.