doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.001

小 Bloch 空间和 Besov 空间上的加权复合算子的超循环性

周 宁[1]，陈 翠[2]

（1. 天津大学数学系，天津 300350；2. 天津财经大学数学系，天津 300222）

摘 要：本文研究了小 Bloch 空间和 Besov 空间上的加权复合算子的超循环性，证明当解析自映射 φ 是自同构时加权复合算子 λC_φ 在小 Bloch 空间和 Besov 空间上都不是超循环的. 此外，本文还研究了当解析自映射 φ 是非自同构、权 $\lambda \in \mathbf{C}$ 和 $u \in H(D)$ 时加权复合算子在小 Bloch 空间和 Besov 空间上的超循环性.

关键词：加权复合算子；超循环性；小 Bloch 空间；Besov 空间

中图分类号：O174 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)06-1131-05

Hypercyclicity of weighted composition operators on the little Bloch space and Besov space

ZHOU Ning

(1. Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350, China;
2. Department of Mathematics, Tianjin Unversity of Finance and Economics, Tianjin 300222, China)

Abstract: Let $S(D)$ be the collection of the holomorphic self-maps of open unit disk D of the complex plane $\mathbf{C}$. We characterize the hypercyclicity of weighted composition operators on the little Bloch space B_0 and Besov space B_p. We obtain that there are no hypercyclic composition operators $\lambda C_\varphi(\lambda \in \mathbf{C}, \varphi \in S(D))$ if φ is an automorphism. When φ is a non-automorphism, we discuss the hypercyclicity of weighted composition operators under certain conditions.

Keywords: Weighted composition operators; Hypercyclicity; Little Bloch space; Besov space
(2010 MSC 47B33, 47B38, 47B32, 47B40)

1 引 言

复合算子是解析函数理论与算子理论共同的研究对象，相关研究可以追溯到上世纪 60 年代[1-3].

设 D 是复平面上的开单位圆盘. 令 $H(D)$ 表示 D 上解析函数全体，$S(D)$ 表示 D 上解析自映射全体. 对于 $u \in H(D)$，$\varphi \in S(D)$，定义加权复合算子 uC_φ：$(uC_\varphi f)(z) = u(z) f(\varphi(z))$，其中 $f \in H(D)$，$z \in D$.

以 X 表示可分的无限维 Banach 空间，$L(X)$ 表示 X 上连续线性算子 $T \in L(X)$. 若存在 $x \in X$ 使得轨道 $orb(T, x)$：$= \{x, Tx, T^2x, \cdots\}$ 在 X 中稠密，则称 T 是超循环的. 其中，x 称为 T 的超循环向量，$HC(T)$ 表示 T 的超循环向量全体构成的集合. 对算子循环性的研究是线性动力系统的重要

收稿日期：2017-05-04
基金项目：国家自然科学基金(11371276)
作者简介：周宁(1992－)，女，河北辛集人，硕士研究生，主要研究领域为多复变函数和算子理论. E-mail：1165412981@qq.com
通讯作者：陈翠. E-mail：chencui_cc@126.com

内容[4-8].

Bloch 空间 B、小 Bloch 空间 B_0 和 Besov 空间 $B_p(0<p<\infty)$定义如下：

$$B:=\{f\in H(D):$$
$$\|f\|_B=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty\},$$
$$B_0:=\{f\in B:\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|f'(z)|=0\},$$
$$B_p:=\{f\in H(D):\|f\|_{B_p}^p=$$
$$\int_D(1-|z|^2)^{p-2}|f'(z)|^p\mathrm{d}A(z)<\infty\},$$

其中 $\mathrm{d}A(z)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 表示 D 上规范化的面积测度($z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}$).

在范数 $\|f\|_{\mathrm{Bloch}}$：$\|f\|_{\mathrm{Bloch}}=|f(0)|+\|f\|_B$ 意义下，B 和 B_0 空间是 Banach 空间. 显然，B_0 是 B 的闭子空间. 因为多项式在 B_0 中稠密，所以 B_0 是可分的.

在范数 $\|f\|_p$：$\|f\|_p^p=|f(0)|^p+\|f\|_{B_p}^p$ 意义下，$B_p(0<p<\infty)$是 Banach 空间. 因为多项式在 $B_p(0<p<\infty)$中稠密，所以 $B_p(0<p<\infty)$是可分的，这里 B_2 是 Dirichlet 空间，B_∞ 是 Bloch 空间 B.

对 B_0 和 $B_p(1\leqslant p<\infty)$的超循环性[9,10]. 文献[7]描述了复合算子在小 Bloch 空间 B_0 和 Besov 空间 $B_p(1\leqslant p<\infty)$上的超循环性，得出复合算子在 B_0 和 $B_p(1\leqslant p<\infty)$空间上都不是超循环的结论. 受其启发，本文主要研究加权复合算子在 B_0 和 $B_p(1\leqslant p<\infty)$空间上的超循环性.

2 预备知识

形如 $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},ad-bc\neq 0$ 的映射称为分式线性变换. 令 $LFT(D)$ 表示 D 上分式线性变换全体. 把单位圆盘一一映射到自身的分式线性变换称为解析自同构. 令 $\mathrm{Aut}(D)$表示 D 上解析自同构全体.

由文献[9]可知，半范数 $\|\cdot\|_B$ 是自同构不变的，也就是说，对于 $f\in B$, $\varphi\in\mathrm{Aut}(D)$, $\|f\circ\varphi\|_B=\|f\|_B$. 由文献[10]知，当 $p\in[1,\infty]$ 时，Besov 空间 B_p 是自同构不变的，其中 B_1 是最小的自同构不变的 Banach 空间. 当 $p\in(1,\infty]$ 时，对 $f\in B_p,\varphi\in\mathrm{Aut}(D)$, $\|f\circ\varphi\|_{B_p}=\|f\|_{B_p}$.

按照不动点性质，可将 $\varphi\in LFT(D)$ 进行如下分类：(1) 若 φ 有唯一不动点在 ∂D 上，则称 φ 是 $LFT(D)$ 中抛物映射.

(2) 若 φ 在 $\bar{D}$ 上有一个吸引不动点，在 D 外有一个排斥不动点，则称 φ 是 $LFT(D)$ 中双曲映射. 两个不动点都在 ∂D 上充要条件是 φ 是 D 上的自同构映射. (3) 若 φ 在 D 内有一个不动点，在 $\bar{D}$ 外有一个不动点，则称 φ 是 $LFT(D)$ 中椭圆映射(或斜驶的).

本文用到单位圆盘上解析自映射 φ 的迭代性质，为此我们需要如下 Denjoy-Wolff 定理.

定理 2.1[1] (Denjoy-Wolff) 若解析自映射 $\varphi:D\to D$ 在 D 内没有不动点，则存在 $\alpha\in\partial D$ 使得 φ^n 在 D 的紧子集上一致收敛于 α，其中 α 称为 φ 的 DW 点.

引理 2.2[11] 对于 $\varphi\in S(D)$，我们有 $\dfrac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|(\varphi)'(z)|\leqslant 1$，其中 $z\in D$.

定理 2.3[9] 若全纯函数 $f\in B$，则存在一个常数 $C>0$，使得

$$|f(z)-f(w)|\leqslant C\beta(z,w),z,w\in D,$$

其中

$$\beta(z,w)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}$$

为伯格曼度量.

定理 2.4[9] 如果全纯函数 $f\in B$，则对 $z,w\in D$ 有

$$\|f\|_B=\sup\left\{\frac{|f(z)-f(w)|}{\beta(z,w)}:z\neq w\right\}.$$

定理 2.5[10] 如果全纯函数 $f\in B_p(1\leqslant p<\infty)$，则存在一个常数 $C_p>0$，使得对 $z,w\in D$ 有

$$|f(z)-f(w)|\leqslant C_p\|f\|_{B_p}\beta(z,w)^{1-\frac{1}{p}}\tag{1}$$

由定理 2.4 可得，如果全纯函数 $f\in B$，则对 $z,w\in D$ 有

$$|f(z)-f(w)|\leqslant\|f\|_B\beta(z,w)\tag{2}$$

由(1)和(2)式可知，$B_p(1\leqslant p<\infty)$和 B_0 中范数收敛可以得到逐点收敛.

引理 2.6 $B_1\subset B_p\subset B_q\subset B_0\subset B$，其中 $1<p<q<\infty$.

证明 根据定义，显然 $B_1\subset B_p\subset B_q\subset B,B_0\subset B$. 我们只需要证 $B_p\subset B_0(1<p<\infty)$即可.

由定义，对于任意 $f\in B_p$ 可知 $f'\in A_{p-2}^p$，其中 A_{p-2}^p为加权 Bergman 空间. 由文献[9]可知，对所有的 $f\in A_\alpha^p$，有

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}f(z)=0,$$
$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)^{\frac{1+1+p-2}{p}}f'(z)=$$
$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)f'(z)=0.$$

由 B_0 的定义可得 $f\in B_0$，即 $B_p\subset B_0$. 综上可得结论.

引理 2.6 给出了空间 B_p, B_0 和 B 的包含关系. 文献[6]研究了复合算子在加权 Dirichlet 空间的循环性. 我们知道，B_2 空间就是 Dirichlet 空间. 因此，可由引理 2.6 中的包含关系和比较原则[2]得到 B_p 和 B_0 空间的超循环性.

定理 2.7[6]　(1) 若 φ 是双曲非自同构的，则算子 $\lambda C_\varphi(\lambda\in C)$ 在 Dirichlet 空间上是超循环的充要条件是 $|\lambda|>1$；

(2) 若 φ 是抛物非自同构的，则算子 $\lambda C_\varphi(\lambda\in C)$ 在 Dirichlet 空间上不是超循环的.

由定理 2.7(1)可知，若 φ 是双曲非自同构的，则当 $|\lambda|>1$ 时，算子 $\lambda C_\varphi(\lambda\in C)$ 在 B_2 空间上是超循环的. 又因为 $B_2\subset B_p\subset B_0(2<p<\infty)$ 且多项式在其中均稠密，当 φ 是双曲非自同构时，若 $|\lambda|>1$ 则算子 $\lambda C_\varphi(\lambda\in C)$ 在 B_0 和 $B_p(2\leqslant p<\infty)$ 空间上均是超循环的.

定理 2.8　如果加权复合算子 uC_φ 在 B_0（或 $B_p(1\leqslant p<\infty)$）上是超循环的，则解析自映射 φ 是单的，且在 D 中没有不动点. 同时，对任意 $z\in D$，$u(z)\neq 0$.

证明　由于多项式在 B_0、$B_p(1\leqslant p<\infty)$ 和 $H(D)$ 中均稠密，且在 B_0、$B_p(1\leqslant p<\infty)$ 中收敛，可知多项项在 $H(D)$ 中收敛，根据比较原则，若 uC_φ 在 B_0（或 $B_p(1\leqslant p<\infty)$）上是超循环的，则它在 $H(D)$ 上也是超循环的. 则由文献[8]，我们得到这个结论.

由定理 2.8 可知，若解析自映射 φ 是椭圆映射（或斜驶的），则加权复合算子 uC_φ 在 B_0 和 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 上肯定不是超循环的.

接下来我们将对 $\varphi\in LFT(D)$ 的其他情形进行分析.

3　小 Bloch 空间 B_0 上加权复合算子的超循环性

定理 3.1　若 $\varphi\in\mathrm{Aut}(D)$，加权复合算子 $\lambda C_\varphi:B_0\to B_0(\lambda\in\mathbf{C})$ 连续，则 λC_φ 在 B_0 空间上不是超循环的.

证明　设 $f\in B_0$ 是 λC_φ 的超循环向量. $\forall g\in B_0$，存在一列数列 $\{n_k\}$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f-g\|_{\mathrm{Bloch}}\to 0$. 从而

$$\begin{aligned}&\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}=\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+\\&\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|(\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k})'(z)|=\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+|\lambda^{n_k}|\ \|f\circ\varphi^{n_k}\|_B=\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+|\lambda^{n_k}|\ \|f\|_B.\end{aligned}$$

若 $g=mz$，显然 $g\in B_0$. 因为 B_0 中范数收敛可以得到逐点收敛，所以当 $k\to\infty$ 时，$\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)\to 0$. 当 $|\lambda|<1$ 时，

$$\begin{aligned}&\|g\|_{\mathrm{Bloch}}=\lim_{k\to\infty}\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}=\\&\lim_{k\to\infty}|\lambda^{n_k}|\ \|f\|_B\to 0.\end{aligned}$$

当 $|\lambda|=1$ 时，

$$\|g\|_{\mathrm{Bloch}}=\lim_{k\to\infty}\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}=\|f\|_B.$$

然而

$$\begin{aligned}&\|g\|_{\mathrm{Bloch}}=\|mz\|_{\mathrm{Bloch}}=\\&\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|m|=|m|.\end{aligned}$$

显然上述两种情况都不符合. 当 $|\lambda|>1$ 时，对任意 $g\in B_0$，

$$\begin{aligned}&\|f\|_B=\frac{\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}-|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|}{|\lambda^{n_k}|}\to\\&\frac{\|g\|_{\mathrm{Bloch}}-|g(0)|}{|\lambda^{n_k}|}=\frac{\|g\|_B}{|\lambda^{n_k}|}.\end{aligned}$$

由于 $\|g\|_B<\infty$，所以当 $k\to\infty$ 时，$\|f\|_B\to 0$，也就是说 f 是常函数. 而常函数显然不是 λC_φ 的超循环向量. 这与假设矛盾.

综上，加权复合算子 λC_φ 在 B_0 空间上不是超循环的.

定理 3.2　若 $\varphi\notin\mathrm{Aut}(D)$ 在 D 上没有内部不动点，加权复合算子 $\lambda C_\varphi:B_0\to B_0(\lambda\in C)$ 连续，则 $|\lambda|\leqslant 1$ 时 λC_φ 在 B_0 空间上不是超循环的.

证明　设 $f\in B_0$ 是 λC_φ 的超循环向量. 则对于 $g=Mz\in B_0$，存在数列 $\{n_k\}$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f-g\|_{\mathrm{Bloch}}\to 0$，$\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)\to 0$. 根据引理 2.2，有

$$\begin{aligned}&\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}=|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+\\&\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|(\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k})'(z)|=\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+|\lambda^{n_k}|\sup_{z\in D}\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi^{n_k}(z)|^2}\cdot\\&|(\varphi^{n_k})'(z)|(1-|\varphi^{n_k}(z)|^2)|f'(\varphi^{n_k}(z))|\leqslant\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+\\&|\lambda^{n_k}|\sup_{z\in D}(1-|\varphi^{n_k}(z)|^2)|f'(\varphi^{n_k}(z))|=\\&|\lambda^{n_k}f\circ\varphi^{n_k}(0)|+|\lambda^{n_k}|\ \|f\|_B\\&\to|\lambda^{n_k}|\ \|f\|_B.\end{aligned}$$

当 $|\lambda|<1$ 时，

$$\begin{aligned}&\|g\|_{\mathrm{Bloch}}=\lim_{k\to\infty}\|\lambda^{n_k}C_\varphi^{n_k}f\|_{\mathrm{Bloch}}\leqslant\\&\lim_{k\to\infty}|\lambda^{n_k}|\ \|f\|_B\to 0.\end{aligned}$$

当 $|\lambda|=1$ 时,

$$\|g\|_{\text{Bloch}}=\lim_{k\to\infty}\|\lambda^{n_k}C_{\varphi^{n_k}}f\|_{Bloch}\leqslant \|f\|_B<\infty.$$

令 $M=\|f\|_B+1$. 则

$$\|g\|_{\text{Bloch}}=\|Mz\|_{\text{Bloch}}=\|f\|_B+1.$$

这显然与上述两种情况矛盾. 因此当 $|\lambda|\leqslant 1$ 时,λC_φ 在 B_0 空间上不是超循环的.

当加权复合算子的权为 $u(u\in H(\overline{D}))$ 时,我们以定理 3.3 中的情形为例进行研究.

定理 3.3 设 $\varphi\in LFT(D)$ 是抛物非自同构的,加权复合算子 $uC_\varphi:B_0\to B_0$ 连续,且对 $z\in D$ 有 $\sup_{n\in\mathbf{N},z\in D}\prod_{i=0}^{n}|u(\varphi^i(z))|\leqslant C$. 此外,当 $z\to 1$ 时,$u(z)$ 不趋于 0. 则 uC_φ 在 B_0 空间上不是超循环的.

证明 由于 $\varphi\in LFT(D)$ 是抛物非自同构的,因此在 ∂D 上有唯一不动点. 不失一般性,不妨设其不动点为 1. 由文献[2],我们有

$$\varphi(z)=1+\frac{2(z-1)}{2-a(z-1)},z\in D,$$

$$\varphi^n(z)=1+\frac{2(z-1)}{2-an(z-1)},z\in D,n\in\mathbf{N},$$

其中 $a=\varphi''(1)$,$\mathrm{Re}a>0$. 通过计算易得:

$$\lim_{n\to\infty}n(1-\varphi^n(z))=\frac{2}{a} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\varphi^{n+1}(z)-\varphi^n(z))=\frac{2}{a} \tag{4}$$

由于迹 $(\varphi^n(z))_n$ 非切逼近于固定点 1,固定 $z\in D$ 可知存在常数 $c>0$,使得对任意 n,$1-|\varphi^n(z)|\geqslant c|1-\varphi^n(z)|$. 结合(3)式和(4)式可得

$$\left|\frac{\varphi^{n+1}(z)-\varphi^n(z)}{1-\varphi^{n+1}(z)\overline{\varphi^n(z)}}\right|\leqslant\frac{|\varphi^{n+1}(z)-\varphi^n(z)|}{c|1-\varphi^{n+1}(z)|}\leqslant$$

$$c'\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}}=c'\frac{n+1}{n^2}\to c'\frac{1}{n}\to 0,n\to\infty \tag{5}$$

这里 c,c' 为大于 0 的常数.

在下面的证明中,为了方便,特用 C 泛指大于 0 的常数,与具体数值无关.

根据定理 2.3 和(5)式,设 $f\in B_0$,当 $n\to\infty$ 时有

$$|(uC_\varphi)^{n+1}f(z)-u(\varphi^n(z))(uC_\varphi)^nf(z)|=$$

$$\left|\prod_{j=0}^{n}u(\varphi^j(z))\right||f(\varphi^{n+1}(z))-f(\varphi^n(z))|\leqslant$$

$$C\beta(\varphi^{n+1}(z),\varphi^n(z))=$$

$$C\log\frac{1+\left|\frac{\varphi^{n+1}(z)-\varphi^n(z)}{1-\varphi^{n+1}(z)\overline{\varphi^n(z)}}\right|}{1-\left|\frac{\varphi^{n+1}(z)-\varphi^n(z)}{1-\varphi^{n+1}(z)\overline{\varphi^n(z)}}\right|}\to 0.$$

又因为迹 $(\varphi^n(z))_n$ 趋于固定点 1,$u(\varphi^n(z))\to u(1)$ 且不趋于 0,进而

$$\lim_{n\to\infty}\left[(uC_\varphi)^nf(z)-\frac{(uC_\varphi)^{n+1}f(z)}{u(\varphi^n(z))}\right]=0.$$

最后,假设 $f\in B_0$ 是 uC_φ 的超循环向量. $\forall g\in B_0$,存在数列 $\{n_k\}$,使得当 $k\to\infty$ 时,

$$|(uC_\varphi)^{n_k}f-\|g\||_{\text{Bloch}}\to 0.$$

由于 B_0 中范数收敛可以得到逐点收敛,因此对 $z\in D$,有

$$g(z)=\lim_{k\to\infty}(uC_\varphi)^{n_k}f(z)=$$

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=0}^{n_k-1}u(\varphi^j(z))f(\varphi^{n_k}(z))=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(uC_\varphi)^{n_k+1}f(z)}{u(\varphi^{n_k}(z))}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{j=0}^{n_k}u(\varphi^j(z))f(\varphi^{n_k+1}(z))}{u(\varphi^{n_k}(z))}=$$

$$\frac{g(\varphi(z))u(z)}{u(1)}.$$

从而

$$g\circ\varphi(z)u(z)-u(1)g(z)=0$$

$$\Rightarrow(uC_\varphi-u(1))g=0$$

$$\Rightarrow uC_\varphi=u(1)I\Rightarrow\begin{cases}u=u(1)\\ \varphi(z)=z\end{cases}.$$

这与 φ 是非自同构矛盾,定理得证.

4 Besov 空间 B_p 上加权复合算子的超循环性

在 B_p 空间上,对加权复合算子超循环性的研究和在 B_0 空间上类似. 我们仅考虑加权复合算子的权为 $\lambda(\lambda\in\mathbf{C})$ 时的情形. 由引理 2.6 和以上的分析可得:

定理 4.1 设 $\varphi\in LFT(D)$,加权复合算子 $\lambda C_\varphi:B_p\to B_p(\lambda\in\mathbf{C})$ 连续.

(1) 当 φ 是椭圆映射(或斜驶的)时,算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上不是超循环的.

(2) 当 φ 是双曲自同构时,算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上不是超循环的. 当 φ 是双曲非自同构时,若 $|\lambda|\leqslant 1$,则算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上不是超循环的;若 $|\lambda|>1$ 则算子 λC_φ 在 $B_p(2\leqslant p<\infty)$ 空间上是超循环的.

（3）当 φ 是抛物自同构时，算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上不是超循环的. 当 φ 是抛物非自同构时，若 $|\lambda|\leqslant 1$，则算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上不是超循环的；若 $|\lambda|>1$，则算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p\leqslant 2)$ 空间上不是超循环的.

最后，对于加权复合算子 $\lambda C_\varphi(\lambda\in C)$ 在 B_0 空间和 $B_p(1\leqslant p<\infty)$ 空间上的超循环性我们有以下问题：

（1）若 φ 为 D 上没有内部不动点的抛物非自同构，则当 $|\lambda|>1$ 时，算子 λC_φ 在 B_0 和 $B_p(2<p<\infty)$ 空间上是否是超循环的？

（2）若 φ 为 D 上没有内部不动点的双曲非自同构，则当 $|\lambda|>1$ 时，算子 λC_φ 在 $B_p(1\leqslant p<2)$ 空间上是否是超循环的？

参考文献：

[1] Cowen C C, Maccluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions[M]. Boca Ralon: CRC Press, 1995.

[2] Shapiro J H. Composition operators and classical function theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] 张况. 单位球上加权复合算子可逆的充要条件[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：989.

[4] Rolewicz S. On orbits of elements [J]. Stud Math, 1969, 32: 17.

[5] Bayart F, étienne Matheron. Dynamics of linear operators [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[6] Gallardogutiérrez E A, Montesrodríguez A. The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators[J]. Mem Am Math Soc, 2004, 167: 81.

[7] Liang Y X, Zhou Z H. Hypercyclic composition operators on the little Bloch space and the Besov spaces. arXiv: 1703.09993, 2017.

[8] Yousefi B, Rezaei H. Hypercyclic property of weighted composition operators [J]. Proc Am Math Soc, 2007, 135: 3263.

[9] Zhu K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer, 2005.

[10] Zhu K. Analytic Besov spaces [J]. J Math Anal Appl, 1991, 157: 318.

[11] Maccluer B D, Stroethoff K, Zhao R. Generalized Schwarz-Pick estimates [J]. P Am Math Soc, 2003, 131: 593.