

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.007

3 维 Stokes 问题的一种非协调-协调有限元法

张 敏, 罗 鲲, 张世全

(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘 要: 本文提出了 3 维 Stokes 问题的一种非协调-协调有限元方法. 在平行六面体网格下, 本文使用速度-压力模型, 速度的前两个分量使用非协调旋转 Q_1 元离散, 第三个分量使用协调线性元离散, 压力用分片常数. 本文证明该有限元是稳定的, 满足离散 inf-sup 条件且速度 u 的 H^1 半范和压力 p 的 L^2 范具有最优一阶收敛. 数值试验验证了理论结果.

关键词: Stokes 问题; 非协调旋转 Q_1 元; inf-sup 条件

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)01-0037-05

Nonconforming-conforming finite element method for 3D Stokes problem

ZHANG Min, LUO Kun, ZHANG Shi-Quan

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Nonconforming finite element method for 3D Stokes problem is considered. Velocity-pressure model with parallelepipeds mesh is adopted. In this finite element, the nonconforming rotated Q_1 elements are used for the approximation of first two components of the velocity, the conforming linear element is used for the approximation of the third component, and the piecewise constant is used for the approximation of pressure. Optimal error estimates are derived, which are both first order for H^1 -semi-norm of velocity u and L^2 norm of pressure p . Numerical experiments are provided to verify the theoretical results.

Keywords: Stokes problems; Nonconforming rotated Q_1 element; Inf-sup condition

(2010 MSC 65M60)

1 引 言

有限元法是求解偏微分方程问题的最重要的一种数值方法, 在计算流体力学、计算固体力学等领域有广泛应用^[1-3]. 其中, 基于 Hellinger-Reissner 原理的有限元方法——混合有限元方法——具有很多优点.

本文将针对 Stokes 问题, 讨论一种低阶混合

有限元方法. 设 $\Omega \in \mathbf{R}^3$ 是凸的, 具有 Lipschitz 边界区域, 其边界记为 $\partial\Omega$. 考虑如下 Stokes 方程:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f, & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

方程右端函数 $f \in [L^2(\Omega)]^3$, $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 表示速度, p 表示压力. $\mu > 0$ 是粘性系数. 本文取 $\mu = 1$. Stokes 问题是流体力学中一类重要问题. 作

收稿日期: 2017-05-06

基金项目: 国家自然科学基金(11401407)

作者简介: 张敏(1991-)女, 陕西榆林人, 硕士, 主要研究方向为微分方程数值解法. E-mail: 781068693@qq.com

通信作者: 张世全. E-mail: shiquanzhang@scu.edu.cn

为标准的混合问题,速度压力要同时计算,且收敛性要求速度和压力的有限元空间满足 inf-sup 条件.关于 Stokes 问题的有限元方法可参见文献[4-9].

特别地,对于低阶 Stokes 元,在四边形网格下,经典的 Q_1-P_0 元(即速度使用协调 Q_1 元离散,压力用分片常数离散的元)的稳定性依赖于网格的选取,且可能出现不稳定的棋盘模式^[4,10];此外,一些低阶非协调元也常被用于解 Stokes 问题.^[11-14] 3 维平行六面体网格下的非协调旋转 Q_1 元由 Rannacher 和 Turek^[14] 给出,具有比协调元更好的稳定性.当经典的 Q_1-P_0 元推广至三维平行六面体网格下时,其稳定性仍然依赖于网格.

本文将对速度 u 的三个分量分别使用非协调旋转 Q_1 元、非协调旋转 Q_1 元及协调线性元来离散,对压力用分片常数逼近.我们证明,在平行六面体网格下,该有限元组合满足离散的 inf-sup 条件,且具有最优的收敛阶.

2 预备知识

记 T_h 为区域 Ω 的正则拟一致平行六面体网格剖分,网格参数 $h > 0$ 表示剖分 T_h 中单元的最大直径.以 \mathcal{F} 表示 T_h 中所有面的集合, $\mathcal{F}(\Omega)$ 表示内部面集合, $\partial\Omega, \partial K$ 分别为 Ω 和 K 的面.任意给定一个面 F ,记其直径为 h_F .令 $n_F := (n_1, n_2, n_3)$ 为相应面的单位外法向.对单元 $K_- \in T_h$ 和单元 $K_+ \in T_h$,记 $F = K_- \cap K_+$. u 跨面 F 的跳量记作 $[u]_F := (u|_{K_+})|_F - (u|_{K_-})|_F$.令 $\hat{K} = [-1, 1]^3$ 为立方体参考单元, \hat{Z}_i 是它的顶点, $1 \leq i \leq 8$. 则存在唯一的可逆映射 G_K 将 \hat{K} 映为 $K: G_K(\xi, \eta, \gamma) \in [Q_1(\xi, \eta, \gamma)]^3$,且 $G_K(\hat{Z}_i) = Z_i$,其中 ξ, η, γ 是局部等参坐标.本文将用 P_k 表示次数小于等于 k 的多项式集合, Q_k 表示对于每个变量次数不超过 k 次的多项式集合, C 表示与网格尺度 h 无关的常数,在不同的地方可以有不同的取值.

在 3 维情形下,在平行六面体单元 K 上定义 $Q_1(K)$ 空间.

$$Q_1(K) = \{\hat{v} \circ G^{-1} | \hat{v}|_{\hat{K}} \in \text{span}\{1, \xi, \eta, \gamma, \xi\eta, \xi\gamma, \eta\gamma, \xi\eta\gamma\}\},$$

协调线性元空间

$$H_8 = \{v \in H_0^1(\Omega) | v|_K \in Q_1(K), \forall K \in T_h\}$$

以及分片常数压力空间

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) | q|_K \in P_0(K) \forall K \in T_h\}.$$

3 维情形非协调旋转 Q_1 元 (RQ_1) ^[4] 的定义为

$$RQ_1(K) = \{\hat{v} \circ G^{-1} | \hat{v}|_K \in \text{span}\{1, \xi, \eta, \gamma, \xi^2 - \eta^2, \xi^2 - \gamma^2\}\},$$

其中 G 为从 \hat{K} 到 K 的三线性映射.

在面 $F \in \partial K$ 上,分别定义如下的均值与跳量

$$A_{F,K}(v) = \frac{1}{|F|} \int_F v \forall v \in H^1(K),$$

$$J_F(v) = \frac{1}{|F|} \int_F [v]_F \forall v \in H^1(\Omega),$$

全局 RQ_1 空间

$$V_h^{RQ_1} = \{v \in L^2(\Omega) | v|_K \in RQ_1(K), K \in T_h, ; J_F(v) = 0, F \in \mathcal{F}(\Omega)\},$$

以及带边界条件的 RQ_1 空间

$$V_{0,h}^{RQ_1} = \{v \in V_h^{RQ_1} | A_{F,K}(v) = 0, \forall F \in \mathcal{F}(\partial\Omega)\}.$$

另外,定义“分片”意义下的双线性形式和相应范数为

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx,$$

$$b_h(q, v_h) = - \sum_{K \in T_h} \int_K q_h \text{div} v_h dx,$$

$$\|v\|_{l,h}^2 = \sum_{K \in T_h} \|v\|_{l,K}^2, |v|_{l,h}^2 =$$

$$\sum_{K \in T_h} |v|_{l,K}^2, l = 1, 2.$$

3 有限元离散

考虑特征值问题(1)的弱形式:求 $(u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^3 \times L_0^2(\Omega)$,使得

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(p, v) &= (f, v) \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^3, \\ b(q, u) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ b(q, v) &= - \int_{\Omega} q \text{div} v dx. \end{aligned}$$

空间 $L_0^2(\Omega)$ 的定义为

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) | \int_{\Omega} q dx = 0\}.$$

空间 $H_0^1(\Omega)$ 定义为

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

问题的适定性由以下的 inf-sup 条件保证^[4]:

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in [H_0^1(\Omega)]^3} \frac{b(q, v)}{\|q\|_0 \| \nabla v \|_0} \geq \beta_0 > 0 \tag{3}$$

这里 β_0 为大于 0 的常数.

选取速度有限元空间为 $V_h^a = V_{0,h}^{RQ_1} \times V_{0,h}^{RQ_1} \times H_8$, 压力有限元空间 Q_h , 即对 $(u_h; p_h) \in (V_h^a; Q_h)$, $u_h = [u_{h1}, u_{h2}, u_{h3}]^T$, $u_{hi} \in V_{0,h}^{RQ_1}$, $i = 1, 2, u_{h3} \in H_8$, $p \in Q_h$. 问题(1)的离散问题为: 求 $(u_h, p_h) \in V_h^a \times Q_h$, 使得

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) + b_h(p_h, v_h) &= (f, v_h), \forall v_h \in V_h^a, \\ b_h(q_h, v_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx, \\ b_h(q, v_h) &= - \sum_{K \in T_h} \int_K q \operatorname{div} v_h \, dx. \end{aligned}$$

为保证解的存在唯一性, 有限元空间需满足离散的 inf-sup 条件(或 LBB 条件).

定理 3.1 存在与 h 无关的常数 C , 使得

$$\sup_{v \in V_h^a} \frac{(\operatorname{div}_h v, q)}{\|v\|_{1,h}} \geq C \|q\|_0, \quad \forall q \in Q_h.$$

证明 使用宏元技巧^[14,15]来证明. 令 M 为一个包含八个平行六面体的宏元, 如图 1 所示. 定义宏元空间如下:

$$\begin{aligned} V_{0,M}^a &= \{v \in [H_0^1(M)]^3 \cap V_h^a\}, \\ P_M &= \{p \in L_0^2(M) \cap Q_h\}. \end{aligned}$$

令 $q|_{K_i} = q_i$. K 是六面体单元, F_i 表示两个单元相交的面, 唯一一个内部点记作 O . 我们将证明, 对任意 $v \in V_{0,M}$, 若 $b(q, v) = 0$, 则 q_i 在 M 上为常数.

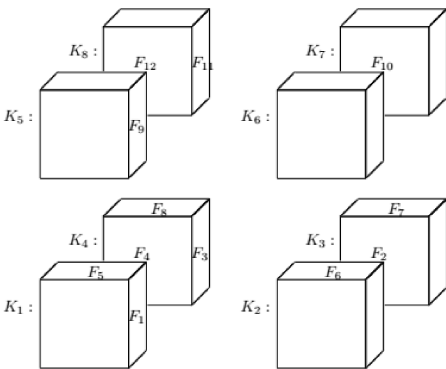


图 1 分裂一个 $2 \times 2 \times 2$ 的宏元 M 为 8 个立方体 K_i , 有 12 个内部面 F_i

Fig. 1 Splitting a $2 \times 2 \times 2$ macro-element M into 8 cubes K_i , with 12 internal faces F_i

对 v_1 , 可令 v_1 为唯一非零自由度, 即 $v = [v_1,$

$0, 0]^T$, 且 $\int_{F_i} v_1 = 1$, 其中 i 可以为 $2, 4, 10, 12$ (这些面的法向与 x 轴方向共线, 当 v 的第二、第三个分量为 0 时, v 与 x 轴共线), 同时, v_2, v_3 的所有自由度均为 0. 以 $i = 2$ 为例, 有

$$\begin{aligned} 0 &= (\operatorname{div} v, q)_M = \int_{F_2} q_2 v \cdot n \, ds + \int_{F_2} q_3 v \cdot n \, ds = \\ &= \int_{F_2} q_2 v_1 |_{K_2} n_{23} \, ds + \int_{F_2} q_3 v_1 |_{K_3} n_{32} \, ds = \\ &= (q_2 - q_3) n_{23} = 0. \end{aligned}$$

所以 $q_2 = q_3$. 同理, 分别令 i 取 $4, 10, 12$ 可得 $q_4 = q_1, q_6 = q_7, q_5 = q_8$. 对 v_2 做同样的假设与分析(分别在面 F_1, F_3, F_9, F_{11} 上讨论), 可以得到 $q_2 = q_1, q_3 = q_4, q_5 = q_6, q_7 = q_8$. 为方便起见, 我们记 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = a, q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = b$.

下面讨论 $v_3, v_3 \in Q_1(M)$. 可令 v_3 的唯一非零自由度为 $v_3(O) = 1$, 同时 v_1, v_2 自由度均为 0. 则有

$$\begin{aligned} 0 &= (\operatorname{div} v, q)_M = \int_{F_5} v_{K_1} a \, n \, ds + \int_{F_5} v_{K_5} b \, n \, ds + \\ &= \int_{F_6} v_{K_2} a \, n \, ds + \int_{F_6} v_{K_6} b \, n \, ds + \\ &= \int_{F_7} v_{K_3} a \, n \, ds + \int_{F_7} v_{K_7} b \, n \, ds + \\ &= \int_{F_8} v_{K_4} a \, n \, ds + \int_{F_8} v_{K_8} b \, n \, ds = \\ &= \frac{1}{3} |F_5| (a - b) + \frac{1}{3} |F_6| (a - b) + \\ &= \frac{1}{3} |F_7| (a - b) + \frac{1}{3} |F_8| (a - b) = \\ &= \frac{1}{3} (|F_5| + |F_6| + |F_7| + |F_8|) (a - b), \end{aligned}$$

其中 $v_{K_i} = v|_{K_i}$, 从而可得 $a = b$, 此时 $(\operatorname{div} V_{0,M})^\perp$ 在 P_M 中维数为 1. 由文献[15], 定理成立.

4 误差估计

定理 4.1 假设剖分正则拟一致, 连续问题(2)的解满足 $u \in [H^2(\Omega)]^3, p \in H^1(\Omega)$. 则离散 Stokes 问题(4)的解 $(u_h, p_h) \in V_h^a \times Q_h$ 存在唯一, 且有如下误差估计

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,h} + \|p - p_h\|_0 &\leq \\ Ch \{ \|u\|_2 + \|p\|_1 \} & \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0 + \|p - p_h\|_{-1} &\leq \\ Ch^2 \{ \|u\|_2 + \|p\|_1 \} & \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\|\cdot\|_{-1}$ 表示 $L^2_0 \cap H^1$ 对偶空间的范数.

证明 由定理 3.1 可得有限元解的存在唯一性.

根据文献[14]中当维数 $n=2,3$ 时对旋转 Q_1 元的分析,结合变分问题(2),(4)可得

$$a_h(u-u_h, v_h) + b_h(p-p_h, v_h) + b_h(q_h, u-u_h) = \Gamma_u(v_h) - \Gamma_p(v_h)$$

对任意 $(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h$ 成立,其中

$$\Gamma_u(v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot n v_h \, ds,$$

$$\Gamma_p(v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} p v_h \cdot n \, ds,$$

且

$$|\Gamma_u(v_h)| \leq Ch^2 \|u\|_2 |v_h|_{1,h}, |\Gamma_p(v_h)| \leq Ch \|p\|_1 |v_h|_{1,h}.$$

结合插值理论的相关结论可得

$$|u-u_h|_{1,h}^2 \leq Ch \|u\|_2 \|p-p_h\|_0 + Ch^2 [\|u\|_2 + \|p\|_1]^2 \tag{7}$$

以及

$$\|p-p_h\|_0 \leq Ch \|p\|_1 + \max_{v_h} \left(\frac{b_h(p-p_h, v_h)}{|v_h|_{1,h}} \right) \leq Ch(\|p\|_1 + \|u\|_2) + C|u-u_h|_{1,h}. \tag{8}$$

结合式(7)和(8),可得式(5).

式(6)可由标准对偶论证得到^[14]. 证毕

5 数值算例

考虑 Stokes 方程(1). 取 $\Omega=[0,1]^3, \mu=1$. 真解 $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 为

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= x^2(x-1)^2 y(y-1) \sin(2\pi z), \\ u_2(x, y, z) &= -y^2(y-1)^2 x(x-1) \sin(2\pi z), \\ u_3(x, y, z) &= 2\pi xy(x-1)(y-1)(x-y)(\cos(2\pi z) - 1), \end{aligned}$$

$$p(x, y, z) = (x-1/2)(y-1/2)(z-1/2),$$

其中 f 由真解定义.

网格剖分如图 2 所示. 我们采用对分加密,前三层网格尺度分别为 $h = 1, 1/2$ 与 $1/4$. 令 $\epsilon_{u_0} = \frac{\|u-u_h\|_0}{\|u\|_0}, \epsilon_{u_1} = \frac{|u-u_h|_{1,h}}{|u|_1}, \epsilon_{p_0} = \frac{\|p-p_h\|_0}{\|p\|_0}, n$ 为一个方向的单元剖分数. 计算结果如下表:

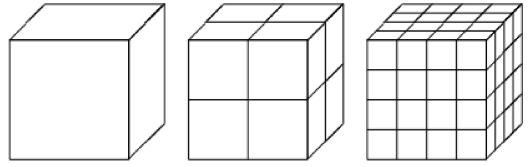


图 2 前三层网格 T_1, T_2, T_3

Fig. 2 The first three levels of grids T_1, T_2, T_3

表 1 (V_h^u, Q_h) 元误差表

Tab. 1 The error of (V_h^u, Q_h) element

n	ϵ_{u_0}	h^n	ϵ_{u_1}	h^n	ϵ_{p_0}	h^n
2	0.2374	—	0.5814	—	0.4110	—
4	0.0722	1.7	0.3231	0.8	0.1945	1.0
8	0.0194	1.9	0.1673	0.9	0.0922	1.0
16	0.0050	2.0	0.0846	1.0	0.0449	1.0
32	0.0012	2.0	0.0424	1.0	0.0222	1.0

由表 1,混合有限元解 $(u_h; p_h)$ 关于速度分量的 L^2 范相对误差随着网格加密收敛阶可达到 2 阶. $|\cdot|_{1,h}$ 相对误差有 1 阶收敛. 对于压力分量 p 的分片常数逼近, L^2 范相对误差具有 1 阶收敛性.

参考文献:

- [1] 何挺, 胡兵, 徐友才, 等. 广义 Rosenau 方程的有限元方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 1.
- [2] 曾凤, 冯民富, 等. Stokes-Darcy 耦合问题的新等阶元投影稳定化方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 937.
- [3] 刘邦繁. 平面弹性问题的弱 Galerkin 有限元方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 13.
- [4] Brezzi F, Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods [M]. Springer-Verlag, 1991.
- [5] Crouzeix M, Raviart P A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, RAIRO [J]. Rev française Automat informat recherche, 1973, 7: 33.
- [6] Boffi D, Brezzi F, Fortin M. Finite elements for the Stokes problem, and applications [M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 2008.
- [7] Girault V, Raviart P A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. theory and algorithms [M]. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1986.
- [8] Gunzburger M D. Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms [J]. Math Comput, 1989, 91: 30.

- [9] Gunzburger M D. Mathematical aspects of finite element methods for incompressible viscous flows [M]. New York: Springer, 1988.
- [10] Brezzi. On the Existence, Uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers [J]. Rev française Automat informat recherche, 1974, 8: 129.
- [11] Han H. Nonconforming elements in the mixed finite element method [J]. J Comput Math, 1984, 2: 223.
- [12] Douglas J, Santos J E, Sheen D, *et al.* Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems [J]. Esaim-Math Model Num, 1999, 33: 747.
- [13] Lin Q, Tobiska L, Zhou A. Superconvergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation [J]. Ima J Numer Anal, 2005, 25: 160.
- [14] Rannacher R, Turek S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element [J]. Numer Meth Part D E, 1992, 8: 97.
- [15] Ming P B, Shi Z C. Nonconforming rotated Q_1 element for Reissner-Mindlin plate [J]. Math Mod Meth Appl Sci, 2001, 11: 1311.
- [16] Shi Z, Wang M. Finite element methods [M]. Beijing: Science Press, 2013.