doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.008

一类三阶周期边值共振问题解的存在性

魏丽萍
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文研究了三阶周期边值共振问题

$$\begin{cases} v'''(t)=f(t,v(t)),t\in[0,T], \\ v^{(i)}(0)-v^{(i)}(T)=0,\ i=0,1,2 \end{cases}$$

解的存在性，其中函数 $f:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续且有界. 当非线性项 f 满足适当条件时，本文发展了上下解方法并得到其解的存在性. 主要结果的证明基于 Lyapunov-Schmidt 过程和解集连通理论.

关键词：Lyapunov-Schmidt 过程；连通集；无序上下解；共振；存在性
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)02-0260-05

Existence of solutions for a class of third-order periodic boundary value problems at resonance

WEI Li-Ping
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the existence of solutions for a third-order periodic boundary value problem at resonance

$$\begin{cases} v'''(t)=f(t,v(t)),t\in[0,T], \\ v^{(i)}(0)-v^{(i)}(T)=0,\ i=0,1,2, \end{cases}$$

where $f:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is continuous and bounded. we develope the method of upper and lower solutions and obtain the existence of solution under suitable assumptions on f. The proof is based upon the Lyapunov-Schmidt procedure and the connectivity theory.

Keywords: Lyapunov-Schmidt procedure; Connected set; Disordered lower and upper solutions; Resonance; Existence
(2010 MSC 34B18)

1　引　言

周期边值问题解的存在性是常微分方程定性理论的重要研究内容. 近年来，二阶常微分方程周期边值问题解的存在性得到了众多学者深入的研究，并取得了丰富的结果[1-3]. 此外，由于三阶周期边值问题自身结构的复杂性，得到的结果相对较少[4-15]. 特别地，Cabada[4,5]用上下解方法获得了三阶周期边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)=f(t,u(t)),0<t<1, \\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(1)=\lambda_i,i=0,1,2 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 f 为 Caratheodory 函数，$\lambda_i\in\mathbf{R}$.

收稿日期：2017-05-26
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：魏丽萍(1995－)，女，甘肃兰州人，主要研究方向常微分方程边值问题. E-mail：18693273767@163.com

2006 年,文献[6]考虑了一个三阶周期边值问题,在非线性项满足一定的条件下,通过构造一个特殊的锥并利用锥上的 Krasnoselskii 不动点定理得出该问题解的存在性. 文献[7]则在合适的条件下利用迭合度理论得到了一个三阶周期边值问题解的存在性结果.

对于问题(1),假设 $u(0)\neq 0$,则问题(1)所对应的线性齐次边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)=0,t\in[0,1],\\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(1)=\lambda_i,i=0,1,2\end{cases}$$

有非平凡解

$$u(t)=u(0)+(\lambda_0-\frac{\lambda_1}{2})t+(\frac{\lambda_1}{2})t^2,$$

从而是共振问题[8-10]. 共振最初来源于物理学,指一物理系统受到周期性的外力作用和其本身振动的固有频率一致时,很小的周期振动便可产生很大的振幅. 沿用这种说法,我们将对应的齐次问题有振幅比零大的解,即非平凡解的边值问题称为共振问题. 共振问题在数学、物理等领域应用广泛,得到了众多学者深入的研究. 由于算子

$$T:D(T)\to C[0,1],Tu:=u''',$$
$$u\in D(T):=\{u\in C^3[0,1]\mid u^{(i)}(0)-u^{(i)}(1)=\lambda_i,\ i=0,1,2\}$$

不可逆,写不出问题(1)相应的等价积分形式,这无疑加大了问题的难度.

2003 年,文献[11]在满足 $\alpha\eta=1$ 的条件下研究了非线性常微分方程二阶三点边值共振问题

$$\begin{cases}u''(t)=f(t,u(t)),t\in[0,1],\\ u(0)=0,u(1)=\alpha u(\eta)\end{cases}$$

并利用紧向量场的解集连通理论和上下解方法讨论了该问题解的存在性. 受以上文献启发,本文尝试运用 Lyapunov-Schmidt 过程和解集连通理论为三阶周期边值问题

$$\begin{cases}v'''(t)=f(t,v(t)),t\in[0,T],\\ v^{(i)}(0)-v^{(i)}(T)=0,i=0,1,2\end{cases}\tag{2}$$

发展上下解方法,并在上下解为常序和无序两种情形下,分别得到解的存在性结果.

本文主要工具如下:

定理 1.1[16]　设 C 为 Banach 空间 E 的非空有界闭凸集. 设 $T:[a,b]\times C\to C$ 是全连续映射,则集合 $S=\{(\lambda,x)\mid T(\lambda,x)=x,\lambda\in[a,b]\}$ 包含一条连接 $\{a\}\times C$ 与 $\{b\}\times C$ 的连通分支 Σ.

本文假定:

(H1) 函数 $f:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续;

(H2) 存在 $d\in\mathbf{R}$,使得 $\sup\{|f(t,v)|:(t,v)\in[0,T]\times\mathbf{R}\}:=d<+\infty$.

注 1　文献[1]只是在上解与下解有序的情形下得到解的存在性结果. 本文发展的上下解方法不仅在上、下解有序,而且在上、下解无序的情形下也得到了解的存在性结果,因而是对文献[1]结论的推广.

2　预备知识

令 $u(t)=v'(t)$,则问题(2)等价于

$$\begin{cases}u''(t)=f(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),t\in[0,T],\\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(T)=0,i=0,1\end{cases}\tag{3}$$

记 X 为 Banach 空间 $C[0,T]$,其范数为

$$\|x\|_\infty=\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|.$$

记 Banach 空间 $Y=C^2[0,T]$,其范数为

$$\|y\|_Y=\max\{\|y\|_\infty,\|y'\|_\infty,\|y''\|_\infty\}.$$

定义线性算子 $L:D(L)\subset Y\to X,Lu=u'',u\in D(L)$,其中

$$D(L)=\{u\in C^2[0,T]\mid u^{(i)}(0)-u^{(i)}(T)=0,\ i=0,1\},$$

则

$$\ker(L)=\{\bar{u}=u(0)\mid\bar{u}\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathrm{lm}(L)=\left\{y\in X\mid\int_0^T y(s)\mathrm{d}s=0\right\}.$$

对 $y\in X$,定义

$$Qy=\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}y(s)\mathrm{d}s.$$

令 $y_1(t)=y(t)-Qy$. 则容易验证 $y_1\in\mathrm{lm}(L)$. 因此 $X=\mathrm{lm}(L)+\mathbf{R}$,又 $\mathrm{lm}(L)\cap\mathbf{R}=\{0\}$,从而 $X=\mathrm{lm}(L)\oplus\mathbf{R}$. 定义 $P:Y\to\ker(L)$ 为 $Pu=u(0)$. 则 $Y=\ker(P)\oplus\ker(L)$. 记

$$Y_1:=\ker(P)=\{\tilde{u}\in Y\mid\tilde{u}(0)=0\}.$$

对任一 $u\in Y$,我们有惟一分解 $u(t)=\bar{u}+\tilde{u}(t)$,这里 $\bar{u}\in\mathbf{R},\tilde{u}\in Y_1$. 令 $L_P:=L|_{D(L)\cap Y_1}$. 此时,L_p 是从 $D(L)\cap Y_1$ 到 $\mathrm{lm}(L)$ 的一一映射,并且它有一个紧逆 $K_P:=L_P^{-1},K_{PQ}=K_P(I-Q)$. 记 f 的 Nemytskii 映射为 $N_f:X\to X$,

$$N_f(u)(t)=f(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),t\in[0,T].$$

则由条件(H1)、(H2)可知,N_f 连续且一致有界. 进而由 K_P 的紧性及 N_f 的连续且一致有界的事实知 $K_P(I-Q)N_f:X\to X$ 为紧算子且是全连续的. 至此,问题(3)等价于系统

$$\begin{cases}\tilde{u}(t)=K_P(I-Q)N_f(\bar{u}+\tilde{u}(t)),\\ QN_f(\bar{u}+\tilde{u}(t))=0.\end{cases}$$

下面给出周期边值问题(2)的上下解的定义.

定义 2.1 称 $x\in C^3[0,T]$ 是问题(2)的下解,如果

$$x'''(t)\geqslant f(t,x(t)),t\in[0,T] \tag{4}$$

$$x^{(i)}(0)=x^{(i)}(T),x''(0)\geqslant x''(T),i=0,1 \tag{5}$$

称 $y\in C^3[0,T]$ 是问题(2)的上解,如果

$$y'''(t)\leqslant f(t,y(t)),t\in[0,T] \tag{6}$$

$$y^{(i)}(0)=y^{(i)}(T),y''(0)\leqslant y''(T),i=0,1 \tag{7}$$

若不等式(4)和(6)是严格的,则称 y,x 为严格上解和严格下解.

假设 $\beta=y'$ 和 $\alpha=x'$ 分别为问题(3)的严格上解和严格下解,并且 $\beta(t)>\alpha(t)$ 于$[0,T]$.记集合

$$D=\left\{(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s)\mid\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t),0\leqslant t\leqslant T\right\}.$$

定义辅助函数 $f^*:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$f^*(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s)=\begin{cases}f(t,c+\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s),u(t)>\beta(t),t\in(0,T),\\ f(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t),\\ \quad t\in(0,T),\\ f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s),u(t)<\alpha(t),t\in(0,T)\end{cases} \tag{8}$$

考虑如下问题:

$$\begin{cases}u''(t)=f^*(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),t\in(0,T),\\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(T)=0,i=0,1\end{cases} \tag{9}$$

定义非线性算子 $N_f^*:X\to X$,

$$(N_f^*u)(t)=f^*(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),t\in[0,T].$$

则 $K_P(I-Q)N_f^*:X\to X$ 是全连续的.

引理 2.2 如果 u 是问题(9)的解,则

$$\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t),t\in(0,T),$$

即 u 是问题(3)的解.

证明 我们首先证明

$$u(t)\geqslant\alpha(t),t\in(0,T).$$

令 $z(t):=\alpha(t)-u(t)$. 反设对某 $t_0\in(0,T)$,$z(t_0)=\alpha(t_0)-u(t_0)>0$. 由连续性和保号性,我们可以找到一个极大开子区间 $(r,s)\subset(0,T)$,使得 $t_0\in(r,s)$ 且

$$u(t)<\alpha(t),t\in(r,s),$$

$$u(t)\geqslant\alpha(t),t\in(0,T)\setminus(r,s).$$

从而再根据介值性可得

$$u(r)=\alpha(r),u(s)=\alpha(s).$$

对任一 $t\in(r,s)$,我们有

$$f^*(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s)=f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s),$$

即

$$u''(t)=f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s),t\in(r,s).$$

另一方面,由于 α 是问题(3)的一个下解,因此

$$\alpha''(t)\geqslant f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s),t\in(r,s).$$

则

$$z(r)=\alpha(r)-u(r)=0,$$

$$z(s)=\alpha(s)-u(s)=0,$$

$$z''(t)=\alpha''(t)-u''(t)\geqslant 0,t\in(r,s).$$

由极大值原理可知

$$z(t)\leqslant 0,t\in(r,s).$$

这与假设矛盾.同理可得

$$u(t)\leqslant\beta(t),t\in(0,T).$$

3 主要结果及证明

定理 3.1 假设条件(H1)成立.若 x 和 y 是问题(2)的一个严格下解和一个严格上解,且在 $[0,T]$ 上满足 $x'(t)\leqslant y'(t)$,则问题(2)存在解 $v\in C^3[0,T]$,满足 $x'(t)\leqslant v'(t)\leqslant y'(t)$.

证明 由引理 2.1,只需证明

$$\begin{cases}u''(t)=f^*(t,c+\int_0^t u(s)\mathrm{d}s),t\in(0,T),\\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(T)=0,i=0,1\end{cases}$$

有解.易证 $N_f^*:X\to X$ 是全连续的,而该问题等价于系统

$$\tilde{u}(t)=K_P(I-Q)N_f^*(\bar{u}+\tilde{u}(t)) \tag{10}$$

$$QN_f^*(\bar{u}+\tilde{u}(t))=0 \tag{11}$$

记 $T=K_P(I-Q)N_f^*$. 因非线性项 f^* 有界,则由 K_P的紧性及 N_f^* 的连续且一致有界的事实知 $T:Y_1\to Y_1$ 为紧算子.特别地,$T:\bar{B}_\rho\to\bar{B}_\rho$,其中 $\bar{B}_\rho=\{\tilde{u}\in Y_1\mid\|\tilde{u}\|\leqslant\rho\}$,

$$\rho=\|K_P\|(\|I\|-\|Q\|)\|N_f^*\|+1.$$

结合算子 T 的全连续性,根据 Schauder 不动点定理可知:对任意 $\bar{u}\in\mathbf{R}$,集合

$$W(\bar{u}):=\{\tilde{u}\in Y_1\mid(\bar{u},\tilde{u})\text{ 满足(10)}\}\neq\varnothing.$$

再由定理 2.1 可知:对任意 $a,b\in\mathbf{R},a<b$,集合

$$S:=\{(\bar{u},\tilde{u})\in\mathrm{R}\times Y_1\mid(\bar{u},\tilde{u})\text{ 满足(10)}\}$$

包含一条连接 $\{a\}\times W(a)$ 到 $\{b\}\times W(b)$ 的连通

分支 Γ. 令 $W:=\{\tilde{u}\in Y_1\mid(\bar{u},\tilde{u})\in S\}$. 由(10)式推知，存在不依赖于 $\bar{u}$ 的常数 $M>0$，使得 $\max\{\|\tilde{u}\|_\infty,\|\tilde{u'}\|_\infty\}\leqslant M,\tilde{u}\in W$. 因此我们可以选择 $\bar{u}_2\in\mathbf{R}$ 充分大，使得对所有 $\tilde{u}\in W$ 均有

$$\bar{u}_2+\tilde{u}(t)>\beta(t),t\in(0,T).$$

这意味着

$$f^*(t,c+\int_0^t(\bar{u}_2+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\equiv f(t,c+\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s)$$

且集合 $W(\bar{u}_2)$ 变成如下的单点集 $\left\{K_P(I-Q)f(t,c+\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s)\right\}$. 对每一 $\tilde{u}\in W(\bar{u}_2)$，由

$$\beta''(t)\leqslant f(t,c+\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s),t\in(0,T)$$

得

$$QN_f^*(\bar{u}_2+\tilde{u}(t))=\frac{1}{T}\int_0^T f^*(t,c+\int_0^t(\bar{u}_2+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t>\frac{1}{T}\int_0^T\beta''(t)\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

同理，我们可以选择 $\bar{u}_1\in\mathbf{R}$，使得 $\bar{u}_1<\bar{u}_2$ 并且对每一 $\tilde{u}\in W(\bar{u}_1)$ 有

$$\bar{u}_1+\tilde{u}(t)<\alpha(t),t\in(0,T).$$

这说明

$$f^*(t,c+\int_0^t(\bar{u}_1+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\equiv f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s)$$

且 $W(\bar{u}_1)$ 变成下面的单点集 $\left\{K_P(I-Q)f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s)\right\}$. 因此，对每一 $\tilde{u}\in W(\bar{u}_1)$，有

$$QN_f^*(\bar{u}_1+\tilde{u}(t))=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t<0.$$

最后，由 Γ 的连通性，存在 $\bar{u}_0\in[\bar{u}_1,\bar{u}_2]$ 及 $\tilde{u}(\bar{u}_0)\in W(\bar{u}_0)$，使得 $(\bar{u}_0,\tilde{u}(\bar{u}_0))\in\Gamma$ 且(11)成立. 因此 $\bar{u}_0+\tilde{u}(\bar{u}_0)$ 是问题(3)的一个解. 证毕.

定理 3.2 假设条件(H1)、(H2)成立. 若问题(2)有一个严格下解 x 和一个严格上解 y，则问题(2)至少有一个解.

证明 考虑问题

$$\begin{cases}\tilde{u}''(t)=f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)+\\ \quad\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t,\\ \quad t\in(0,T),\\ u^{(i)}(0)-u^{(i)}(T)=0,i=0,1.\end{cases}$$

该问题等价于不动点问题

$$\tilde{u}(t)=K_P(I-Q)N_f(\bar{u}+\tilde{u}(t))+QN_f(\bar{u}+\tilde{u}(t))\qquad(12)$$

记 $G=K_P(I-Q)N_f+QN_f$. 由条件(H2)可知，非线性项 f 有界. 因此由 K_P 的紧性及 N_f 的连续且一致有界的事实知 $G:Y_1\to Y_1$ 为紧算子. 特别地，$G:\bar{B}_\rho\to\bar{B}_\rho$，其中 $\bar{B}_\rho=\{\tilde{u}\in Y_1\mid\|\tilde{u}\|\leqslant\rho\}$. 而

$$\rho=\|K_P\|(\|\ \|-\|Q\|)\|N_f\|+\|Q\|\|N_f\|+1.$$

结合算子 G 的全连续性，由 Schauder 不动点定理可知：对任意 $\bar{u}\in\mathbf{R}$，集合

$$W(\bar{u}):=\{\tilde{u}\in Y_1\mid(\bar{u},\tilde{u})\text{ 满足(12)}\}\neq\varnothing.$$

再由定理 2.1 可知：对任意 $a,b\in\mathbf{R},a<b$，集合

$$S:=\{(\bar{u},\tilde{u})\in R\times Y_1\mid(\bar{u},\tilde{u})\text{ 满足(12)}\}$$

包含一条连接 $\{a\}\times W(a)$ 到 $\{b\}\times W(b)$ 的连通分支 Γ'. 如果存在 $(\bar{u},\tilde{u})\in\Gamma'$，使得

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t=0,$$

则 $(\bar{u},\tilde{u})$ 是问题(3)的解. 如果对于所有的 $(\bar{u},\tilde{u})\in\Gamma'$，使得

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t>0.$$

则

$$\tilde{u''}(t)=f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)+\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t>f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s).$$

根据上下解的定义，$(\bar{u},\tilde{u})$ 是问题(3)的一个下解. 特别地，记 $\beta_L=\min\limits_{t\in[0,T]}\beta$. 对 $(\beta_L-M,\tilde{u})\in\Gamma'$，$\beta_L(t)-M+\tilde{u}(t)\leqslant\beta(t)$，$t\in[0,T]$ 自然也是一个下解，并且由定理 3.1 的结论可知问题(3)存在一个解 u，即问题(2)存在解 $v\in C^3[0,T]$，满足 $y_L'(t)-M+\tilde{v}'(t)\leqslant v'(t)\leqslant y'(t)$.

同理，如果对于所有的 $(\bar{u},\tilde{u})\in\Gamma'$，使得

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t,c+\int_0^t(\bar{u}+\tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t<0,$$

则

$$\tilde{u}''(t) = f(t,c + \int_0^t (\bar{u} + \tilde{u}(s))\mathrm{d}s) + \frac{1}{T}\int_0^T f(t,c + \int_0^t (\bar{u} + \tilde{u}(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t < f(t,c + \int_0^t (\bar{u} + \tilde{u}(s))\mathrm{d}s).$$

据上下解的定义，$(\bar{u},\tilde{u})$ 是问题(3)的一个上解. 特别地，记 $\alpha_M = \max\limits_{t\in[0,T]} \alpha$. 对 $(\alpha_M + M, \tilde{u}) \in \Gamma'$，$\alpha_M(t) + M + \tilde{u}(t) \geqslant \alpha(t)$，$t \in [0,T]$ 也是一个上解. 再次运用定理 3.1 的结论可知问题(3)存在一个解 u，即问题(2)存在解 $v \in C^3[0,T]$，满足 $x'(t) \leqslant v'(t) \leqslant x'_M(t) + M + \tilde{v}'(t)$.

4 应　用

例 4.1　考察边值问题

$$\begin{cases} v'''(t) = v(t) - \sin t + \cos^2 t, t \in [0,2\pi], \\ v^{(i)}(0) - v^{(i)}(2\pi) = 0, i = 0,1,2 \end{cases} \tag{13}$$

解的存在性.

容易验证 $y(t) = \sin t + 3$，$x(t) = \sin t - 3$ 分别为问题(13)的严格上解和严格下解，且满足性质 $x'(t) \leqslant y'(t)$ 于 $[0,2\pi]$. 应用定理 3.1 可知该问题有一个解 v 满足 $\cos t \leqslant v'(t) \leqslant \cos t$ 于 $[0,2\pi]$.

参考文献：

[1] Bereanu C, Mawhin J. Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular φ-Laplacian [J]. J Differ Equations, 2007, 243: 536.

[2] Zima M. Existence of positive solutions for a kind of periodic boundary value problem at resonance [J]. Bound Value Probl, 2013, 2013: 1.

[3] Torres J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differ Equatios, 2003, 190: 643.

[4] Cabada A. The method of lower and upper solutions for second, third, fourth, and higher order boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1994, 185: 302.

[5] Cabada A. The method of lower and upper solutions for third-order periodic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1995, 195: 568.

[6] Chu J, Zhou Z. Positive solutions for singular nonlinear third-order periodic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2006, 64: 1528.

[7] Amster P, De Nápoli P, Mariani M C. Periodic solutions for a resonant higher order equation [J]. Port Math, 2005, 62: 13.

[8] Ma R. Multiplicity results for a third order boundary value problem at resonance [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1998, 32: 493.

[9] Ma R, Lu Y. Existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations [J]. Monatsh Math, 2014, 173: 67.

[10] Du Z, Zhao B, Bai Z. Solvability of a third-order multipoint boundary value problem at resonance [J]. Abstr Appl Anal, 2014 , 2014: 1.

[11] Ma R. Multiplicity results for a three-point boundary value problem at resonance [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2003, 53: 777.

[12] Lin X, Du Z, Meng F. A note on a third-order multi-point boundary value problem at resonance [J]. Math Nachr, 2011, 284: 1690.

[13] 白婧. 一类三阶非线性微分方程的奇周期解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：1217.

[14] 达举霞，韩晓玲. 三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：1177.

[15] 高婷，韩晓玲. 三阶无穷多点边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：35.

[16] Costa D G, Goncalves J V A. Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance [J]. J Math Anal Appl, 1981, 84: 328.