2018 年 3 月 四川大学学报(自然科学版) Mar. 2018
第 55 卷 第 2 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 55 No. 2

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.001

混合条件下的哈密尔顿系统周期解的存在性

王明伟，郭 飞，聂千千

(天津大学数学学院，天津 300354)

摘 要：本文利用鞍点定理得到了二阶哈密尔顿系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0, \forall t\in \mathbf{R}, \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, T>0 \end{cases}$$

在带有混合条件时的周期解的存在性，推广了已有结果.

关键词：存在性；周期解；二阶哈密尔顿系统；鞍点定理

中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)02-0221-05

Existence of periodic solutions for second order Hamiltonian systems with mixed condition

WANG Ming-Wei, *GUO Fei*, *NIE Qian-Qian*

(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300354, China)

Abstract: In this paper, existence of periodic solutions of the following nonautonomous second order Hamiltonian system with mixed condition

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0, \forall t\in \mathbf{R}, \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, T>0 \end{cases}$$

is obtained by using the saddle point theorem. Our results extend some known results.

Keywords: Existence; Periodic solutions; Second order Hamiltonian systems; Saddle point theorem

(2010 MSC 74H20, 34C25, 70H05, 49J35)

1 引 言

本文研究哈密尔顿系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0, \forall t\in \mathbf{R}, \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, T>0 \end{cases} \tag{1}$$

在带有混合条件时的周期解的存在性,其中函数 $F\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$,$F(t,u)=-K(t,u)+W(t,u)$,并且对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$ 有 $F(t+T,u)=F(t,u)$.

近年来，利用临界点理论中的极小极大方法，系统(1)的周期解的存在性及多重性问题已被广泛研究[1-12]. 其中,多数文章考虑一下两种情况:一种是 $K(t,u)=0$,例如文献[2,3];另一种是 $K(t,u)=\frac{1}{2}(B(t)u,u)$(其中 $B(t)$ 是一个 T-周期的 $N\times N$ 对称连续矩阵函数)，例如文献[4,5]. 当 $K(t,u)$ 满足“两边夹”条件(即 $q_1|u|^2\le K(t,u)\le q_2|u|^2$,其中常数 $q_1,q_2>0$)且 $W(t,u)$ 满足渐近线性条件时，文献[6]得出了系统(1)的一个存在性结果. 而文献[7]则用条件(K1)和(K2)(见下述定理 1.1)代替“两边夹”条件来弱化文献[6]

收稿日期：2017-08-05

基金项目：国家自然科学基金(11371276,10901118)

作者简介：王明伟(1992－)，女，河北沧州人，硕士研究生，主要研究方向为非线性分析. E-mail:1922167518@qq.com

通讯作者：郭飞. E-mail：guofei79@tju.edu.cn

的条件,得到

定理 1.1[7] 若 K 和 W 满足

(K1) 存在常数 $b>0$ 和 $\gamma\in(1,2]$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$K(t,0)=0,K(t,u)\geq b|u|^{\gamma};$$

(K2) 对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,$(\nabla K(t,u),u)\leq 2K(t,u)$;

(W1) 存在常数 $a,d>0$ 和 $\mu\geq 2$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$W(t,u)\leq a|u|^{\mu}+d;$$

(W2) 存在常数 $c_1,c_2>0$,$\beta\geq 2$ 和 $\beta>\mu-\gamma$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$(\nabla W(t,u),u)-2W(t,u)>c_1\ |u|^{\beta}-c_2;$$

(W3) 对所有的 $t\in[0,T]$,$\limsup\limits_{|u|\to 0}\dfrac{W(t,u)}{|u|^2}<b$ 一致成立,

则系统(1)有一个非平凡的 T-周期解.

在本文中,受文献[7]的启发,我们得到如下定理:

定理 1.2 若 K 和 W 满足

(K1′) 存在常数 $d>0$ 和函数 $f_1\in L^1([0,T],\mathbf{R})$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$K(t,u)\geq -d\ |u|^2+f_1(t);$$

(K2′) 存在常数 $L_1>0$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $|u|\geq L_1$,有

$$(\nabla K(t,u),u)\leq 2K(t,u);$$

(W1′) 存在常数 $0<a<\dfrac{6}{T^2}-d$ 和函数 $f_2\in L^1([0,T],\mathbf{R})$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$W(t,u)\leq a\ |u|^2+f_2(t);$$

(W2′) 存在常数 $\beta>1$ 和 $L_2>0$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $|u|>L_2$,有

$$(\nabla W(t,u),u)-2W(t,u)>|u|^{\beta};$$

(F) 对任意的常数 $c>0$ 和 $t\in[0,T]$ 都有 $\max\limits_{|u|=c}K(t,u)<\min\limits_{|u|=c}W(t,u)$ 成立,

则系统(1)有一个非平凡的 T-周期解.

注 1 定理 1.2 弱化了条件(K1)和(K2),改变了条件(W1),去掉了条件(W3),增加了条件(F),并且条件(W2′)中的常数 β 比条件(W2)中的常数 β 范围更大. 第 4 节中的例子表明满足定理 1.2 条件不满足定理 1.1 条件的函数确实存在.

2 预备知识

记 $H_T^1=\{u:[0,T]\to\mathbf{R}^N\,|\,u$ 绝对连续,$u(0)=u(T)$,$\dot{u}\in L^2([0,T],\mathbf{R}^N)\}$,其上的范数为

$$\|u\|=\left[\int_0^T(|\dot{u}(t)|^2+|u(t)|^2)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由 Sobolev 嵌入定理,存在常数 $C_\infty>0$ 使得

$$\|u\|_\infty\leq C_\infty\|u\| \tag{2}$$

由文献[8]可知,若 $K,W\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$,则泛函

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T K(t,u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T W(t,u(t))\mathrm{d}t \tag{3}$$

在 H_T^1 上是连续可微的. 对 H_T^1 上所有的 u 和 v,有

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=\int_0^T(\dot{u}(t),\dot{v}(t))\mathrm{d}t+\int_0^T(\nabla K(t,u(t))-\nabla W(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t \tag{4}$$

若 $u\in H_T^1$ 是 $\varphi'(u)=0$ 的一个弱解,则 $u(t)$ 满足系统(1).

引理 2.1 若 $W(t,u)$ 满足(W2′),且 $K(t,u)$ 满足(K2′),则存在一个足够大的常数 $M>0$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 和满足 $|u|\geq M$ 的 $u\in\mathbf{R}^N$,有

$$W(t,u)\geq\frac{|u|^2}{M^2}\min_{|u|=M}W(t,u) \tag{5}$$

$$K(t,u)\leq\frac{|u|^2}{M^2}\max_{|u|=M}K(t,u) \tag{6}$$

证明 对于所有的 $t\in[0,T]$ 和每一个固定的 $u\in\mathbf{R}^N\backslash\{0\}$,令 $f(s)=W(t,su)$,$g(s)=f'(s)s-2f(s)$. 由(W2′),存在一个常数 $M>0$ 使得对任意的 $t\in[0,T]$ 和 $s\geq\dfrac{M}{|u|}$,有 $g(s)\geq 0$. 解常微分方程 $f'(s)s-2f(s)-g(s)=0$ 得

$$f(s)=\exp\left(\int_{\frac{M}{|u|}}^{s}\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right)\left[\int_{\frac{M}{|u|}}^{s}\frac{g(t)}{t}\cdot\exp\left(-\int_{\frac{M}{|u|}}^{t}\frac{2}{r}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t+f\left(\frac{M}{|u|}\right)\right]=\frac{s^2\ |u|^2}{M^2}f\left(\frac{M}{|u|}\right)+s^2\int_{\frac{M}{|u|}}^{s}\frac{g(t)}{t^3}\mathrm{d}t\geq\frac{s^2\ |u|^2}{M^2}f\left(\frac{M}{|u|}\right).$$

从而对任意的 $t\in[0,T]$ 和 $s\geq\dfrac{M}{|u|}$ 有

$$W(t,su)\geq\frac{s^2\ |u|^2}{M^2}W\left(t,\frac{Mu}{|u|}\right)\geq\frac{s^2\ |u|^2}{M^2}\min_{|u|=M}W(t,u),$$

即(5)式成立.

(6)式的证明和(5)式类似,此处省略. 证毕.

引理 2.2(鞍点定理[9]) 若 H 是实 Banach 空

间，$H=V\oplus X$，其中 $V\neq\{0\}$ 是有限维的. $\varphi\in C^1(H,\mathbf{R})$ 满足(PS)条件和如下条件：

(i) 存在常数 α 和 V 中 0 的一个有界邻域 D，使得 $\varphi|_{\partial D}\leq\alpha$；

(ii) 存在常数 $\beta>\alpha$，使得 $\varphi|_X\geq\beta$.

那么泛函 φ 有一个临界值 $c\geq\beta$，c 定义如下：

$$c=\inf_{h\in\tau}\max_{u\in\bar{D}}\varphi(h(u)),$$

其中

$$\tau=\{h\in C(\bar{D},H)\mid h=\mathrm{id}\ \mathrm{on}\ \partial D\}.$$

(C)条件(参见文献[13])是指：对于 H_T^1 中的任意一个序列$\{u_m\}$，若$\{\varphi(u_m)\}$是有界的，且当 $m\to+\infty$ 时 $\|\varphi'(u_m)\|(1+\|u_m\|)\to 0$，则$\{u_m\}$有一个收敛子列. 由文献[10]可知，当(C)条件代替(PS)条件时，形变引理依然成立. 由此可得引理 2.2 在(C)条件下也是成立的.

此外，文献[14]和[15]利用鞍点定理和对称山路引理等临界点理论知识证明了不同系统的解的一些问题.

3　定理的证明

引理 3.1　若 K 满足(K1′)，(K2′)，W 满足(W1′)，(W2′)，那么泛函 φ 满足(C)条件.

证明：证明的想法来自于文献[7]. 令$\{u_m\}$是 H_T^1 中的一个(C)-序列，即$\{\varphi(u_m)\}$有界，且当 $m\to+\infty$ 时，$\|\varphi'(u_m)\|(1+\|u_m\|)\to 0$，则存在一个常数 $M_0>0$ 使得对足够大的 $m\in N^+$，有

$$|\varphi(u_m)|\leq M_0,$$

$$(1+\|u_m\|)\|\varphi'(u_m)\|\leq M_0.$$

首先，我们证明$\{u_m\}$是有界的. 对于每个固定的 $m\in\mathbf{N}^+$ 和 $\lambda>\max\{L_1,L_2\}$ 由(K2′)，得

$$\begin{aligned}&\int_0^T[2K(t,u_m(t))-(\nabla K(t,u_m(t)),u_m(t))]\mathrm{d}t=\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|>\lambda\}}[2K(t,u_m(t))-(\nabla K(t,u_m(t)),u_m(t))]\mathrm{d}t+\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|\leq\lambda\}}[2K(t,u_m(t))-(\nabla K(t,u_m(t)),u_m(t))]\mathrm{d}t\geq\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|\leq\lambda\}}[2K(t,u_m(t))-(\nabla K(t,u_m(t)),u_m(t))]\mathrm{d}t\geq-M_1\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$M_1=T\max_{t\in[0,T]}\max_{|u|\leq\lambda}\{2|K(t,u)|+|\nabla K(t,u)\|u|,2|W(t,u)|+|\nabla W(t,u)\|u|\}+1>0.$$

由(2)式和(7)式知，对充分大的 $m\in\mathbf{N}^+$ 有

$$\begin{aligned}&2M_0+\|u_m\|\geq 2\varphi(u_m)-\langle\varphi'(u_m),u_m\rangle=\\&\int_0^T[(\nabla W(t,u_m(t)),u_m(t))-2W(t,u_m(t))]\mathrm{d}t+\int_0^T[2K(t,u_m(t))-(\nabla K(t,u_m(t)),u_m(t))]\mathrm{d}t\geq\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|>\lambda\}}[(\nabla W(t,u_m(t)),u_m(t))-2W(t,u_m(t))]\mathrm{d}t+\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|\leq\lambda\}}[(\nabla W(t,u_m(t)),u_m(t))-2W(t,u_m(t))]\mathrm{d}t-M_1\geq\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|>\lambda\}}[(\nabla W(t,u_m(t)),u_m(t))-2W(t,u_m(t))]\mathrm{d}t-2M_1\end{aligned}\tag{8}$$

由(8)式和(W2′)知，存在常数 $p>0$ 使得

$$\begin{aligned}&p(1+\|u_m\|)\geq\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|>\lambda\}}[(\nabla W(t,u_m(t)),u_m(t))-2W(t,u_m(t))]\mathrm{d}t\geq\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|>\lambda\}}|u(t)|^\beta\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{9}$$

由(3)式和(W1′)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T[|\dot{u}_m(t)|^2+2K(t,u_m(t))]\mathrm{d}t=\\&\varphi(u_m)+\int_0^T W(t,u_m(t))\mathrm{d}t\leq\\&M_0+a\int_0^T|u_m(t)|^2\mathrm{d}t+\|f_2\|_{L^1}\end{aligned}\tag{10}$$

另一方面，由(3)式，(K1′)和(2)式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T[|\dot{u}_m(t)|^2+2K(t,u_m(t))]\mathrm{d}t\geq\\&\frac{1}{2}\int_0^T[|\dot{u}_m(t)|^2-2d|u_m(t)|^2+2f_1(t)]\mathrm{d}t\geq\frac{1}{2}\|u_m\|^2-\\&(d+\frac{1}{2})\int_0^T|u_m(t)|^2\mathrm{d}t+\|f_1\|_{L^1}\end{aligned}\tag{11}$$

由(10)式，(11)式，(2)式和(9)式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_m\|^2\leq(d+a+\frac{1}{2})\int_0^T|u_m(t)|^2\mathrm{d}t+\\&M_0-\|f_1\|_{L_1}+\|f_2\|_{L_1}\leq\\&(d+a+\frac{1}{2})(\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u(t)|>\lambda\}}|u_m(t)|^2\mathrm{d}t+\\&\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u_m(t)|\leq\lambda\}}|u_m(t)|^2\mathrm{d}t)+M_0-\\&\|f_1\|_{L_1}+\|f_2\|_{L_1}\leq\\&(d+a+\frac{1}{2})(\|u\|_\infty^{2-\beta}\int_{\{t\in[0,T]\,|\,|u(t)|>\lambda\}}|u_m(t)|^\beta\mathrm{d}t+\end{aligned}$$

$$\lambda^2 T)+M_0-\|f_1\|_{L_1}+\|f_2\|_{L_1}\le$$
$$(d+a+\frac{1}{2})(C_\infty^{2-\beta}\|u_m\|^{2-\beta}p(1+\|u_m\|)+$$
$$\lambda^2 T)+M_0-\|f_1\|_{L_1}+\|f_2\|_{L_1}=$$
$$p_1\|u_m\|^{2-\beta}+p_1\|u_m\|^{3-\beta}+p_2,$$

其中

$$p_1=(d+a+\frac{1}{2})C_\infty^{2-\beta}p>0,$$
$$p_2=(d+a+\frac{1}{2})\lambda^2 T+M_0-\|f_1\|_{L_1}+\|f_2\|_{L_1}.$$

由 $\beta>1$ 可得，$\{u_m\}$在 H_T^1 中是有界的．由文献[8]中的性质4.3可得$\{u_m\}$在 H_T^1 中有收敛子列．从而泛函 φ 满足(C)条件.

由文献[8]，记 $\tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$，其中 $\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$．则 $E:=H_T^1=\tilde{H}_T^1\oplus\mathbf{R}^N$，其中$\tilde{H}_T^1:=\{u\in H_T^1\,|\,\bar{u}=0\}$．对于 $u\in\tilde{H}_T^1$，由 Sobolev 不等式有

$$\|\tilde{u}\|_\infty^2\le\frac{T}{12}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t \tag{12}$$

由文献[16]可知

$$\|u\|_0=\left[\int_0^T(|\dot{\tilde{u}}|^2+|\bar{u}|^2)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$$

是$\|\cdot\|$的等价模，即 $C_1\|u\|\le\|u\|_0\le C_2\|u\|$，其中 C_1 和 C_2 是大于0的常数.

定理1.2的证明 第一步，记 $X=\tilde{H}_T^1$，我们断言引理2.2中的(ii)成立．由(K1′)，(W1′)和(12)式，有

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T[K(t,u(t))-W(t,u(t))]\mathrm{d}t\ge\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-(d+a)\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T[f_1(t)-f_2(t)]\mathrm{d}t\ge$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{(d+a)T^2}{12})\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-M_2\ge C_1^2(\frac{1}{2}-\frac{(d+a)T^2}{12})\|u\|^2-M_2\to+\infty,$$
$$u\in X,\ \|u\|\to+\infty \tag{13}$$

其中 $M_2=\int_0^T[f_1(t)-f_2(t)]\mathrm{d}t$．由于 $\varphi\in C^1(E,\mathbf{R})$，由(13)式可以得出 φ 是下方有界的．因此存在常数 β 使得 $\varphi|_X\ge\beta$.

第二步，记 $V=\mathbf{R}^N$，我们断言引理2.2中的(i)成立．由引理2.1和条件(F)，对于固定的 $u_0\in\mathbf{R}^N$ 且 $|u_0|=1$，如果 $s\ge M$，则有

$$\varphi(su_0)=\int_0^T[K(t,su_0)-W(t,su_0)]\mathrm{d}t\le\frac{s^2}{M^2}\int_0^T[\max_{|u|=M}K(t,u)-\min_{|u|=M}W(t,u)]\mathrm{d}t\le$$
$$\frac{s^2T}{M^2}\max_{t\in[0,T]}\{\max_{|u|=M}K(t,u)-\min_{|u|=M}W(t,u)\}\to-\infty,\ s\to+\infty,$$

从而存在常数 $r>0$(足够大)和 $\alpha<\beta$，使得

$$\varphi|_{\partial B_{r(0)}\cap V}\le\alpha.$$

证明完毕.

4 应 用

定义 K 和 $W\in C^1([0,1]\times\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$为 $K(t,u)=\frac{\sin^2(\pi t)}{2}(B(t)u,u)$，其中

$$B(t)\equiv\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\frac{2}{5} & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{5}(-1)^{N+1}\end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$W(t,u)=\frac{1+\sin^2(\pi t)}{4}|u|^2[1-\frac{1}{\ln(10^{10}+|u|^2)}].$$

显然，W 和 K 关于 t 是1-周期的．若取 $d=\frac{1}{5}$，$f_1(t)\equiv 0$，$K(t,u)$ 满足(K1′)和(K2′)．对于 $W(t,u)$，取 $a=\frac{1}{2}$，$f_2(t)\equiv 0$．则 $a+d<6$．所以(W1′)成立．另外，取 $\beta=\frac{3}{2}$．则

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{(\nabla W(t,u),u)-2W(t,u)}{|u|^{\frac{3}{2}}}=\lim_{|u|\to+\infty}\frac{(1+\sin^2(\pi t))|u|^{\frac{5}{2}}}{2(10^{10}+|u|^2)\ln^2(10^{10}+|u|^2)}=$$
$$\frac{(1+\sin^2(\pi t))}{2}\lim_{|u|\to+\infty}\frac{\frac{5}{2}|u|^{\frac{3}{2}}}{2\ln^2(10^{10}+|u|^2)|u|+4\ln(10^{10}+|u|^2)\cdot|u|}=$$

$$\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{8}\lim_{|u|\to+\infty}\frac{|u|^{\frac{1}{2}}}{\ln^2(10^{10}+|u|^2)+2\ln(10^{10}+|u|^2)}=$$

$$\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{8}\lim_{|u|\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}|u|^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{u}{|u|}}{4\ln(10^{10}+|u|^2)\frac{u}{10^{10}+|u|^2}+4\frac{u}{10^{10}+|u|^2}}=$$

$$\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{64}\lim_{|u|\to+\infty}\frac{10^{10}|u|^{-\frac{3}{2}}+|u|^{\frac{1}{2}}}{\ln(10^{10}+|u|^2)+1}=$$

$$\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{64}\lim_{|u|\to+\infty}\frac{-\frac{3}{2}\cdot 10^{10}\cdot|u|^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{u}{|u|}+\frac{1}{2}|u|^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{u}{|u|}}{\frac{1}{10^{10}+|u|^2}\cdot 2|u|\cdot\frac{u}{|u|}}=$$

$$\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{64}\lim_{|u|\to+\infty}-\frac{3}{4}\cdot 10^{10}|u|^{-\frac{7}{2}}(10^{10}+|u|^2)+$$

$$\frac{1}{4}|u|^{-\frac{3}{2}}(10^{10}+|u|^2)=\frac{5(1+\sin^2(\pi t))}{64}\lim_{|u|\to+\infty}-\frac{3}{4}\cdot$$

$$10^{20}|u|^{-\frac{7}{2}}-\frac{3}{4}\cdot 10^{10}|u|^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\cdot 10^{10}|u|^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}|u|^{\frac{1}{2}}=+\infty.$$

所以(W2′)成立. 另外，因为对于任意的常数 $c>0$，有 $\max\limits_{|u|=c}K(t,u)\le\frac{1}{5}c^2<\min\limits_{|u|=c}W(t,u)$，所以条件(F)成立. 所以上述 K 和 W 满足定理 1.2 的所有条件.

然而，$K(t,u)$ 和 $W(t,u)$ 不满足定理 1.1 的条件，因为 $K(t,u)$ 不满足(K1)条件.

参考文献：

[1] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for a class of second-order Hamiltonian systems [J]. J Differ Equations, 2005, 219: 375.

[2] Jiang Q, Tang C L. Periodic and subharmonic solutions of a class subquadratic second order Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl, 2007, 328: 380.

[3] Wang Z Y, Xiao J Z. On periodic solutions of subquadratic second order non-autonomous Hamiltonian systems [J]. Appl Math Lett, 2015, 40: 71.

[4] Zhang Q Y, Liu C G. Infinitely many periodic solutions for second order Hamiltion systems [J]. J Differ Equations, 2011, 251: 816.

[5] Tang C L, Wu X P. Periodic solutions of a class of new superquadratic second order Hamiltonian systems [J]. Appl Math Lett, 2014, 34: 65.

[6] Zhao F K, Chen J, Yang M B. A periodic solution for a second order asymptotically linear Hamiltonian systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 70: 4021.

[7] Tang X H, Jiang J C. Existence and multiplicity of periodic solutions for a class of second-order Hamiltonian systems [J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 3646.

[8] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltomian systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[9] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations [M], Rhode Island: AMS, 1986.

[10] Bartolo P, Benci V, Fortunato D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1983, 7: 241.

[11] Rabinowitz P H. Periodic solutions of Hamiltonian systems [J]. Commun Pur Appl Math, 1978,31: 157.

[12] Chen X F, Guo F. Existence and multipilicity of periodic solutions for nonautonomous second order Hamiltonian systems [J]. Bound Value Probl, 2016, 138: 1.

[13] Cerami G, An existence criterion for critical points on unbounded mainfolds [J]. Istit Lombardo Accad Sci Lett Rend A, 1978, 112: 332.

[14] 丁凌，孟义杰，张丹丹. 一类常维的 p-Laplace 系统的周期解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2012，49：504.

[15] 邓立虎，穆春来. 一类拟线性椭圆型方程的多重解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2003，40：806.

[16] Tang C L. Existence and multiplicity of periodic solutions for nonautonomous second order systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1998, 32: 299.