doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.003

一类含有二次项的高阶有理差分方程的全局行为

陈韦韦
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文给出方程 $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-k}}{\alpha x_n+\beta x_{n-(k+1)}}$ 的奇点集及解的表达式，并讨论了该方程解的全局行为，其中 $k\in\mathbf{N}$，$n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，α，β 都是实数，初始值 $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\in\mathbf{R}^{k+2}$.

关键词：差分方程；奇点集；全局行为
中图分类号：O175.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)02-0231-06

Global behavior of a rational difference equation

CHEN Wei-Wei
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we determine the forbidden set, introduce an explicit formula for the solutions and discuss the global behavior of a rational difference equation $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-k}}{\alpha x_n+\beta x_{n-(k+1)}}$, where inter $k\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, α,β are real numbers, the initial conditions $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\in\mathbf{R}^{k+2}$.

Keywords: Difference equation; Forbidden set; Global behavior
(2010 MSC 39A10, 39A11)

1　引　言

随着科学技术的发展，差分方程理论越来越受到重视. 它被广泛应用于计算机科学，航天技术，金融，医学，生物学等领域. 迄今为止，线性差分方程理论已基本完善，而非线性差分方程主要针对的是有理差分方程. 其中，分子与分母均为线性的有理差分方程已被众多学者进行了较为系统的研究[1-4]，目前主要集中在分子或分母中含有二次项或更高次项的有理差分方程的研究，并已获得一些有价值的成果[5-7].

本文研究一个含二次项的 $k+2$ 阶差分方程

$$x_{n+1}=\frac{x_n x_{n-k}}{\alpha x_n+\beta x_{n-(k+1)}} \tag{1}$$

其中 $k\in\mathbf{N}$，$n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，α,β 都是实数，且初始值 $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\in\mathbf{R}^{k+2}$.

当 $k=1$，方程已经由 Sedaght，Abo-Zeid，陈克慧等进行了系统的研究[8-11].

当 $k=2$，方程当 $\alpha>0,\beta>0$ 时，已经被 Abo-Zeid研究[12].

对于一般的 k，若 $\alpha=\beta=0$，则方程是没有定义的；若 $\alpha=0,\beta\neq 0$，则 $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-k}}{\beta x_{n-(k+1)}}$，当 $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin\bigcup_{i=0}^{k+1}\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid x_{-i}=0\}$ 时，该方程的解为

$$x_{n(k+1)+j}=\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{n+1}x_{j-(k+1)}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{(n+1)[n(k+1)+2j]}{2}},$$

其中 $j=1,2,\cdots,k+1$.

若 $\alpha\neq 0,\beta=0$，则 $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-k}}{\alpha x_n}$，当$(x_{-k},x_{-(k-1)}$，

收稿日期：2017-08-31
基金项目：国家自然科学基金(11101295)
作者简介：陈韦韦(1991－)，男，硕士，主要研究方向为微分动力系统. E-mail: 2609277476@qq.com

$\cdots,x_0)\notin\bigcup_{i=0}^{k}\{(x_{-k},x_{-(k-1)},\cdots,x_0)\mid x_{-i}=0\}$时,方程可化为 $x_{n+1}=\frac{1}{\alpha}x_{n-k}$,此时该方程的解为 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}(\frac{1}{\alpha})^{n+1}$,其中 $j=1,2,\cdots,k+1$. 因此,下面我们讨论方程(1)当 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ 时方程解的全局行为.

2 方程(1)的奇点集和解的表达式

为了讨论方程(1)的奇点集,首先给出了一个引理.

引理 2.1 对任意 $n_0\geqslant k+2$,设序列 $\{x_n\}_{-(k+1)}^{n_0}$ 满足方程(1),且对任意的 $0\leqslant i\leqslant n_0-1$ 有 $\alpha x_i+\beta x_{i-(k+1)}\neq 0$,则对任意的 $-k\leqslant j\leqslant n_0$ 有 $x_j\neq 0$.

证明 假设存在 $-k\leqslant j\leqslant n_0$ 使得 $x_j=0$. 令 $j_0:=\min\{j\mid x_j=0,-k\leqslant j\leqslant n_0\}$.

a) 若 $-k\leqslant j_0\leqslant 0$,由于 $x_{j_0}=0$,根据方程(1),$x_{j_0+k+1}=\frac{x_{j_0+k}x_{j_0}}{\alpha x_{j_0+k}+\beta x_{j_0-1}}=0$,从而 $\alpha x_{j_0+k+1}+\beta x_{j_0}=0$,即 x_{j_0+k+2} 无定义.

b) 若 $1\leqslant j_0\leqslant n_0$,由于 $x_{j_0}=0$,由方程(1)知 $x_{j_0-1}=0$ 或 $x_{j_0-1-k}=0$,这都与 j_0 的定义矛盾.

以上情况均出现矛盾,所以假设不成立,命题得证.

定理 2.2 方程(1)的奇点集 F 是 $\mathbf{R}^{k+2}$ 上包含原点的一个序列,如下所示:

$$F=\bigcup_{j=0}^{k}Q_j\cup\bigcup_{n=0}^{+\infty}S_n,$$

其中

$$Q_j=\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid x_{-j}=0\},$$
$$S_n=\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid x_{-(k+1)}=\delta_n x_0\},$$
$$\delta_n=-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{\beta})^i.$$

证明 由奇点集的定义,方程(1)的奇点集 $F=\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid$ 对任意的 $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0\}$. 显然

$$F=\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid\alpha x_0+\beta x_{-(k+1)}=0\}\cup\bigcup_{m=1}^{+\infty}\{(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\mid\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0$$

且 $\alpha x_j+\beta x_{j-(k+1)}\neq 0,0\leqslant j\leqslant m-1\}$.

(a) 若 $\alpha x_0+\beta x_{-(k+1)}=0$,由于 α,β 均不为 0,从而 $x_{-(k+1)}=-\frac{\alpha}{\beta}x_0$,故 $S_0\subset F$.

(b) 若 $1\leqslant m\leqslant k+1$,$\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0$ 且 $\alpha x_j+\beta x_{j-(k+1)}\neq 0$,其中 $0\leqslant j\leqslant m-1$,则

(i) 若 $x_m=0$,由 $\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0$ 可知 $x_{m-(k+1)}=0$,从而 $Q_{k+1-m}\subset F$;

(ii) 若 $x_m\neq 0$,则对任意的 $-k\leqslant i\leqslant m-1$ 有 $x_i\neq 0$. 事实上,若存在 $-k\leqslant i_0\leqslant m-1$ 使 $x_{i_0}=0$,由方程(1)可依次得 $x_{i_0+1},\cdots,x_m$ 均为 0,这便出现矛盾.

因此可令 $y_t=\frac{x_{t-(k+1)}}{x_t}$,$t=0,1,\cdots,m$. 从而方程(1)当 $0\leqslant n\leqslant m-1$ 时等价于线性方程

$$y_{n+1}=\beta y_n+\alpha,0\leqslant n\leqslant m-1 \tag{2}$$

由方程(2)得

$$y_0=\frac{1}{\beta^m}y_m-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=0}^{m-1}(\frac{1}{\beta})^i \tag{3}$$

而 $\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0$ 意味着 $y_m=-\frac{\alpha}{\beta}$. 将

$$y_0=\frac{x_{-(k+1)}}{x_0},y_m=-\frac{\alpha}{\beta}$$

代入(3)式得

$$\frac{x_{-(k+1)}}{x_0}=-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=0}^{m}(\frac{1}{\beta})^i \tag{4}$$

即 $S_m\subset F$.

(c) 若 $m\geqslant k+2$,$\alpha x_m+\beta x_{m-(k+1)}=0$ 且 $\alpha x_j+\beta x_{j-(k+1)}\neq 0$,其中 $0\leqslant j\leqslant m-1$,由引理 2.1 可知对任意 $-k\leqslant i\leqslant m$ 有 $x_i\neq 0$. 因此可令 $y_t=\frac{x_{t-(k+1)}}{x_t}$,$t=0,1,\cdots,m$. 从而方程(1)当 $0\leqslant n\leqslant m-1$ 时等价于线性方程(2),同理(4)式成立,即 $S_m\subset F$. 证毕.

定理 2.3 设 $\{x_n\}$ 是方程(1)满足初始值 $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin F$ 的解,则

$$x_{n(k+1)+j}=\begin{cases}x_{j-(k+1)}\prod_{i=0}^{n}\frac{x_0}{x_{-(k+1)}+[i(k+1)+j]\alpha x_0},\beta=1,\\ x_{j-(k+1)}\prod_{i=0}^{n}\frac{\beta-1}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha},\beta\neq 1\end{cases} \tag{5}$$

其中 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $j=1,2,\cdots,k+1$, 且 $\rho=\frac{(\beta-1)x_{-(k+1)}+\alpha x_0}{x_0}$.

证明 因为初始值 $(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin F$,所以初始值经方程(1)可生成序列 $\{x_n\}_{n=-(k+1)}^{+\infty}$,且对任意 $i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 有 $\alpha x_i+\beta x_{i-(k+1)}\neq 0$. 由引理 2.1 可得,对任意 $-k\leqslant j<+\infty$,有 $x_j\neq 0$. 因此可令 $y_n=\frac{x_{n-(k+1)}}{x_n}$,$n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$. 从而方程(1)等价于

线性方程

$$y_{n+1}=\beta y_n+\alpha,n\in\mathbf{N}\cup\{0\} \tag{6}$$

由方程(6)得

$$y_n=\beta^n y_0+\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\beta^i \tag{7}$$

其中 $y_0=\dfrac{x_{-(k+1)}}{x_0}$.

(a) 当 $\beta=1$ 时,

$$y_n=\frac{x_{-(k+1)}}{x_0}+n\alpha \tag{8}$$

当 $\beta\neq 1$ 时,

$$y_n=\frac{1}{\beta-1}[\rho\beta^n-\alpha] \tag{9}$$

其中 $\rho=\dfrac{(\beta-1)x_{-(k+1)}+\alpha x_0}{x_0}$.

(b) 由于对任意的 $-k\leqslant j<+\infty$ 有 $x_j\neq 0$,从而对任意的 $1\leqslant n<+\infty$ 有 $y_n\neq 0$. 进而,当 $n\geqslant 0$ 时有

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{y_{i(k+1)+j}}=\frac{x_{n(k+1)+j}}{x_{j-(k+1)}},$$

即

$$x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{y_{i(k+1)+j}} \tag{10}$$

其中 $j=1,2,\cdots,k+1$. 将(8)式,(9)式分别代入(10)式即得(5)式.

综上,命题得证.

3　方程(1)解的全局行为

在这一节中,我们用方程(1)的解的基本形式来研究该方程解的全局行为.

3.1　$\beta=1$ 的情形

定理 3.1　设 $\beta=1$,$\{x_n\}$是方程(1)满足初始值$(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin F$ 的解,则$\{x_n\}$收敛到 0.

证明　因为初始值$(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin F$,由定理 2.2 知 $x_0\neq 0$. 由定理 2.3 知方程(1)的解具有(5)式的形式. 显然当 $i\to+\infty$ 时,

$$\frac{x_0}{x_{-(k+1)}+[i(k+1)+j]\alpha x_0}\to 0,$$

故$\{x_n\}$收敛到 0. 证毕.

3.2　$\beta\neq 1$ 的情形

定理 3.2　设 $\beta\neq 1$,$\{x_n\}$是方程(1)满足初始值$(x_{-(k+1)},x_{-k},\cdots,x_0)\notin F$ 的解.

(A) 如果$\dfrac{x_{-(k+1)}}{x_0}=\dfrac{\alpha}{1-\beta}$,那么

1. 若$\left|\dfrac{1-\beta}{\alpha}\right|<1$,则$\{x_n\}$收敛到 0.

2. 若$\left|\dfrac{1-\beta}{\alpha}\right|>1$,则$\{x_n\}$是无界的.

3. 若$\dfrac{1-\beta}{\alpha}=1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $k+1$ 周期解.

4. 若$\dfrac{1-\beta}{\alpha}=-1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$ 周期解.

(B) 如果$\dfrac{x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\dfrac{\alpha}{1-\beta}$,那么

1. 若$|\beta|>1$,则$\{x_n\}$收敛到 0.

2. 若 $\beta=-1$,

(1) k 为偶数时,

1) 如果$\left|\dfrac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|<1$,那么$\{x_n\}$收敛到 0;

2) 如果$\left|\dfrac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|>1$,那么$\{x_n\}$是无界的;

3) 如果$\left|\dfrac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|=1$,那么,

(i) 若$\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}=1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $k+1$ 周期解,

(ii) 若$\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}=-1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$周期解,

(iii) 若$\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}$与$\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}$只有一个是 -1,则$\{x_n\}$是一个至多 $4(k+1)$周期解,

(iv) 若 $\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}=\dfrac{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\pm 1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$周期解,

(v) 若 $\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}=-\dfrac{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\pm 1$,则$\{x_n\}$是一个至多 $4(k+1)$ 周期解;

(2) k 为奇数时,

1) 如果$\left|\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right|<1$ 且$\left|\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|<1$,那么$\{x_n\}$收敛到 0;

2) 如果$\left|\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right|$与$\left|\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|$有一个大于 1,那么$\{x_n\}$是无界的;

3) 如果 $\dfrac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\dfrac{x_0}{x_{-(k+1)}}=1$,那么$\{x_n\}$是一个至多 $k+1$ 周期解;

4) 如果$\frac{x_0}{\alpha x_0 - x_{-(k+1)}}$与$\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}$有一个是 -1，那么$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$ 周期解.

3. 若 $|\beta|<1$，则

(1) 如果 $|\frac{1-\beta}{\alpha}|<1$，那么$\{x_n\}$收敛到 0.

(2) 如果 $|\frac{1-\beta}{\alpha}|>1$，那么$\{x_n\}$是无界的.

(3) 如果 $|\frac{1-\beta}{\alpha}|=1$，那么$\{x_n\}$收敛到周期解. 当 $\frac{1-\beta}{\alpha}=1$ 时，$\{x_n\}$收敛到至多$k+1$ 周期解；当 $\frac{1-\beta}{\alpha}=-1$ 时，$\{x_n\}$收敛到至多 $2(k+1)$ 周期解.

证明　因为初始值$(x_{-(k+1)}, x_{-k}, \cdots, x_0)\notin F$，由定理 2.2 知 $x_0\neq 0$. 由定理 2.3 知方程(1)的解具有(5)式的形式.

(A) 若$\frac{x_{-(k+1)}}{x_0}=\frac{\alpha}{1-\beta}$,则 $\rho=0$，从而

$$x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{n+1}.$$

因此，

1. 若 $|\frac{1-\beta}{\alpha}|<1$，则$\{x_n\}$收敛到 0.

2. 若 $|\frac{1-\beta}{\alpha}|>1$，则$\{x_n\}$是无界的.

3. 若 $\frac{1-\beta}{\alpha}=1$，则 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}$，此时$\{x_n\}$是一个至多 $k+1$ 周期解.

4. 若 $\frac{1-\beta}{\alpha}=-1$，则 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}(-1)^{n+1}$，此时$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$ 周期解.

(B) 若$\frac{x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\frac{\alpha}{1-\beta}$,则 $\rho\neq 0$.

1. 若 $|\beta|>1$，则当 $i\to+\infty$ 时，$\frac{\beta-1}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\to 0$，从而$\{x_n\}$收敛到 0.

2. 若 $\beta=-1$，因为初始值$(x_{-(k+1)}, x_{-k}, \cdots, x_0)\notin F$，所以 $x_{-(k+1)}\neq 0$，从而

$$x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}\prod_{i=0}^{n}\frac{-2x_0}{(-2x_{-(k+1)}+\alpha x_0)(-1)^{i(k+1)+j}-\alpha x_0}.$$

而

$$\frac{-2x_0}{(-2x_{-(k+1)}+\alpha x_0)(-1)-\alpha x_0}=\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}},$$

$$\frac{-2x_0}{(-2x_{-(k+1)}+\alpha x_0)(-1)^2-\alpha x_0}=\frac{x_0}{x_{-(k+1)}},$$

则$\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}$，$\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}$均不为 0.

(1) k 为偶数，当 j 为奇数时，

$$x_{n(k+1)+j}=\begin{cases} x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 是偶数}, \\ x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{ 是奇数} \end{cases} \tag{11}$$

当 j 为偶数时，

$$x_{n(k+1)+j}=\begin{cases} x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n}{2}+1}, & n\text{ 是偶数}, \\ x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{ 是奇数} \end{cases} \tag{12}$$

因此，

(1) 若$\left|\frac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|<1$，

即$\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|<1$，则$\{x_n\}$收敛到 0.

(2) 若$\left|\frac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|>1$，

即　$\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|>1$，则$\{x_n\}$是无界的.

(3) 若$\left|\frac{x_0^2}{\alpha x_0x_{-(k+1)}-x_{-(k+1)}^2}\right|=1$，

即$\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|=1$.

(i) 若$\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}=1$，

则 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}$. 此时$\{x_n\}$是一个至多 $k+1$ 周期解；

(ii) 若$\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}=-1$，

则 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}(-1)^{n+1}$，此时$\{x_n\}$是一个至多 $2(k+1)$周期解；

(iii) 若$\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}$与$\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}$只有一个是$-1$，由(11)式可知

$$x_{n(k+1)+j}=x_{(n+4)(k+1)+j},\ j\text{ 为奇数},$$

由(12)式可知

$$x_{n(k+1)+j}=x_{(n+4)(k+1)+j},\ j\text{ 为偶数},$$

故$\{x_n\}$是一个至多 $4(k+1)$ 周期解；

(iv) 若$\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}=\frac{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\pm 1$，由(11)

(12)式可知 $x_{n(k+1)+j}=x_{(n+2)(k+1)+j}$，故 $\{x_n\}$ 是一个至多 $2(k+1)$ 周期解；

(v) 若 $\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}=-\frac{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}{x_0}\neq\pm1$，由(11)(12)式可知 $x_{n(k+1)+j}=x_{(n+4)(k+1)+j}$，故 $\{x_n\}$ 是一个至多 $4(k+1)$ 周期解.

(2) k 为奇数，

$$x_{n(k+1)+j}=\begin{cases}x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right)^{n+1}, & j\text{ 是偶数},\\ x_{j-(k+1)}\left(\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right)^{n+1}, & j\text{ 是奇数}\end{cases}\tag{13}$$

因此，

(1) 若 $\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right|<1$ 且 $\left|\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|<1$，则 $\{x_n\}$ 收敛到 0.

(2) 若 $\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right|$ 与 $\left|\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|$ 有一个大于 1，则 $\{x_n\}$ 是无界的.

(3) 若 $\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}=\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}=1$，则 $x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}$，此时 $\{x_n\}$ 是一个至多 $k+1$ 周期解.

(4) 若 $\left|\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}\right|=\left|\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}\right|=1$，且 $\frac{x_0}{\alpha x_0-x_{-(k+1)}}$ 与 $\frac{x_0}{x_{-(k+1)}}$ 至少有一个是 -1，由(13)式知 $x_{n(k+1)+j}=x_{(n+2)(k+1)+j}$，则 $\{x_n\}$ 是一个至多 $2(k+1)$ 周期解.

3. 为叙述简便，令 $\mu_j(i):=\frac{\beta-1}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}$.

若 $|\beta|<1$，则当 $i\to+\infty$ 时，$|\mu_j(i)|\to\left|\frac{1-\beta}{\alpha}\right|$. 从而

(1) 若 $\left|\frac{1-\beta}{\alpha}\right|<1$，则 $\{x_n\}$ 收敛到 0.

(2) 若 $\left|\frac{1-\beta}{\alpha}\right|>1$，则 $\{x_n\}$ 是无界的.

(3) 若 $\left|\frac{1-\beta}{\alpha}\right|=1$，

由于 $\prod_{i=0}^{n}|\mu_j(i)|=\prod_{i=0}^{n}\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|$

$$=e^{\sum_{i=0}^{n}\ln\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|},$$

易知 $\sum_{i=0}^{+\infty}\ln\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|$ 收敛. 事实上，存在充分大的 $i_1\in\mathbf{N}$，使得当 $i>i_1$ 时，

$$\left|\ln\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|\right|\leqslant\ln\frac{|\alpha|}{|\alpha|-|\rho||\beta|^{i(k+1)+j}}.$$

令 $f(x,k,j):=\ln\frac{|\alpha|}{|\alpha|-|\rho||\beta|^{x(k+1)+j}}$. 其中 $x>0,k\in N,j=1,2,\cdots\cdots,k+1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x+1,k,j)/f(x,k,j)=|\beta|^{k+1},$$

从而

$$\lim_{i\to+\infty}f(i+1,k,j)/f(i,k,j)=|\beta|^{k+1}<1.$$

由达朗贝尔判别法知，$\sum_{i=i_1+1}^{+\infty}\ln\frac{|\alpha|}{|\alpha|-|\rho||\beta|^{i(k+1)+j}}$ 收敛，故 $\sum_{i=i_1+1}^{+\infty}\left|\ln\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|\right|$ 收敛. 因此 $\sum_{i=0}^{+\infty}\ln\left|\frac{\alpha}{\rho\beta^{i(k+1)+j}-\alpha}\right|$ 收敛. 从而 $\prod_{i=0}^{+\infty}|\mu_j(i)|$ 收敛. 记

$$P(j):=\prod_{i=0}^{+\infty}|\mu_j(i)|,$$

$$P_n(j):=\prod_{i=0}^{n}|\mu_j(i)|,$$

$$Q_n(j):=\prod_{i=0}^{n}\mu_j(i),$$

其中 $j=1,2,\cdots,k+1$.

1) 若 $\frac{1-\beta}{\alpha}=-1$，则 $\lim_{i\to+\infty}\mu_j(i)=-1$. 记 $r_j:=\min\{i\mid\mu_j(i)<0$ 且对任意的 $i'>i$ 有 $\mu_j(i')<0\}$，$w_1(j):=\prod_{i=0}^{r_j}|\mu_j(i)|$，$w_2(j):=\prod_{i=0}^{r_j}\mu_j(i)$. 因此当 $n>r_j$ 时有

$$Q_n(j)=P_n(j)w_1^{-1}(j)w_2(j)(-1)^{n-r_j}.$$

由于

$$x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}Q_n(j),\ \lim_{n\to+\infty}P_n(j)=P(j),$$

从而当 n 取偶数时，

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}P(j)w_1^{-1}(j)w_2(j)(-1)^{r_j},$$

当 n 取奇数时，

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n(k+1)+j}=-x_{j-(k+1)}P(j)w_1^{-1}(j)w_2(j)(-1)^{r_j}.$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛到至多 $2(k+1)$ 周期解.

2) 若 $\frac{1-\beta}{\alpha}=1$，则 $\lim_{i\to+\infty}\mu_j(i)=1$. 记 $s_j:=\min\{i\mid\mu_j(i)>0$ 且对任意的 $i'>i$ 有 $\mu_j(i')>0\}$，$v_1(j):=\prod_{i=0}^{s_j}|\mu_j(i)|$，$v_2(j):=\prod_{i=0}^{s_j}\mu_j(i)$. 因此当 $n>s_j$ 时，

$$Q_n(j)=P_n(j)v_1^{-1}(j)v_2(j).$$

由于

$$x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}Q_n(j).,\ \lim_{n\to+\infty}P_n(j)=P(j),$$

从而有

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n(k+1)+j}=x_{j-(k+1)}P(j)v_1^{-1}(j)v_2(j).$$

故$\{x_n\}$收敛到至多$k+1$周期解.证毕.

注 文献[12]讨论了方程

$$x_{n+1}=\frac{ax_nx_{n-2}}{bx_n+cx_{n-3}} \tag{14}$$

当$a,b,c>0$时的全局行为.若令$\alpha=\frac{b}{a}$,$\beta=\frac{c}{a}$,则方程(14)为方程(1)当$\alpha>0$,$\beta>0$,$k=2$时的特殊情形.因此本文的结果包含了文献[12]中的所有结果.

参考文献:

[1] Kulenovic M R S, Ladas G. Dynamics of second order rational difference equations with open problems conjectures [M]. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2002.

[2] Camouzis E, Ladas G. Dynamics of third order rational difference equations with open problems and conjectures [M]. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2007.

[3] Dehghan M, Mazrooei-Sebdani R. Dynamics of a high-order rational difference equation[J]. Appl Math Comput, 2006, 178: 345.

[4] Dehghan M, Mazrooei-Sebdani R. The characteristics of a high-order rational difference equation [J]. Appl Math Comput, 2006, 182: 528.

[5] Sedaghat H. Open problem and conjectures: on third order rational difference equations with quadratic terms [J]. J Differ Equ Appl, 2008, 14: 889.

[6] Papaschinopoulous G, Stefanidou G. Asymptotic behaviors of the solutions of a class of rational difference equations [J]. Int J Differ Equ, 2010, 5: 233.

[7] Anisimova A, Bula I. Some problems of second-order rational difference equations with quadratic terms [J]. Int J Differ Equ, 2014, 9: 11.

[8] Sedaghat H. Global behaviours of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms [J]. J Differ Equ Appl, 2009, 15: 215.

[9] Abo-Zeid R. Global behavior of a rational difference equation with quadratic terms [J]. Math Moravica, 2014, 18: 81.

[10] Abo-Zeid R. On the solutions of two third order recursive sequence [J]. Am J Math, 2014, 6: 64.

[11] 陈克慧. 一类含有二次项的三阶有理差分方程的全局行为[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 1190.

[12] Abo-Zeid R. Global behavior of a fourth order difference equation [J]. Am J Math, 2014, 18: 211.