doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.005

一类 Hadamard 分数阶微分方程边值问题解的存在唯一性

张海燕，李耀红
(宿州学院数学与统计学院，宿州 234000)

摘　要：利用 Leray-Schauder 选择原理及 Banach 压缩映射原理，本文在一定的非线性增长和压缩条件下研究了一类具有 Hadamard 积分边值条件的 Hadamard 分数阶微分方程边值问题，获得了问题解的存在唯一性的充分条件，并给出了两个例子.

关键词：Hadamard 分数阶导数；分数阶微分方程；边值条件；存在唯一性
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)04-0683-05

Existence and uniqueness of solution for boundary value problems of a class of Hadamard fractional differential equations

ZHANG Hai-Yan, LI Yao-Hong
(School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

Abstract: By using the Leray-Schauder's alternative principle and Banach's contraction principle and combined with some nonlinear growth and contraction conditions, a class of Hadamard fractional differential equations with Hadamard integral boundary conditions are investigated. Existence and uniqueness of solution for the relevant boundary value problems are established. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Hadamard fractional derivative; Fractional differential equation; Boundary value problem; Existence and uniqueness
(2010 MSC 26A33)

1　引　言

近年来，分数阶微分理论在黏弹性材料力学、工程问题建模、系统控制、分形几何和分形动力学等应用领域建模中得到广泛应用. 由于分数阶模型描述的过程信息比整数阶微分方程更精确，分数阶微积分理论近来受到了广泛关注[1-3]. 虽然出现了许多分数阶微分方程边值问题解的存在性的结果[4-10]，但是绝大部分研究工作都是基于 Riemann-Liouville 或 Caputo 分数阶微分方程边值问题，对 Hadamard 分数阶微分方程边值问题的研究则相对较少. 其原因也许是 Hadamard 分数阶定义及计算较复杂，且与其他类型的分数阶微分之间的关联还未完全明确，因而很多现有的非线性分析计算方法不能通过简单平移进行使用. 总之，对 Hadamard 分数阶微分方程进行深入研究很有必要.

最近，文献[11]在无穷区间研究了一类 Hadamard 分数阶微分方程的正解，文献[12]对一类耦

收稿日期：2017-09-01
基金项目：安徽省高等学校自然科学基金重点项目基金(KJ2017A442，KJ2017A702，KJ2018A0452)；安徽省高校优秀青年人才支持计划重点项目基金(gxyqZD2016339)；宿州学院优秀学术骨干项目基金(2016XJGG13)
作者简介：张海燕(1980－)，女，安徽宿州人，副教授，主要研究方向为非线性泛函分析及应用. E-mail：liz.zhanghy@163.com.

合的 Hadamard 分数阶微分方程组解的存在性进行了研究.受上述文献及其参考文献启发,本文考虑如下 Hadamard 分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{1^+}^{\alpha} u(t) = f(t, D_{1^+}^{\beta} u(t), u(t)), \\ \quad 1 < t < e, 1 < \alpha \leqslant 2, 0 < \beta \leqslant 1, \\ u(1) = 0, u(e) = I_{1^+}^{\gamma} u(\eta), \\ \quad \gamma > 0, 1 < \eta < e \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性充分条件,这里 $D_{1^+}^{\alpha}$ 为为 Hadamard 分数阶导数,$I_{1^+}^{\gamma}$ 为 γ 阶 Hadamard 分数阶积分,$f:[1,e]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个连续函数.和文献[11,12]比较,方程(1)中的非线性项中含有 Hadamard 分数阶导数,同时具有更一般的非线性增长条件,因而在应用上更方便.

2 预备知识

定义 2.1[1] 函数 $g:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 α 阶 Hadamard 分数阶积分定义为

$$I_{1^+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

定义 2.2[1] 函数 $g:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 α 阶 Hadamard 分数阶导数定义为

$$D_{1^+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^n\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha-1} g(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

其中 $n=[\alpha]+1$.

引理 2.3[1] 若 $\alpha>0, u\in C[1,e]\cap L[1,e]$,则有

$$I_{1^+}^{\alpha} D_{1^+}^{\alpha} u(t) = u(t) - c_1(\ln t)^{\alpha-1} - c_2(\ln t)^{\alpha-2} - \cdots - c_n(\ln t)^{\alpha-n},$$

其中 $c_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n, n$ 如定义 2.2 所述.

引理 2.4 如果 $y(t)\in C([1,e],\mathbf{R})$ 且 $1<\alpha\leqslant 2$,则分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{1^+}^{\alpha} u(t) = y(t), 1<t<e, \\ u(1)=0, u(e)=I_{1^+}^{\gamma} u(\eta), \gamma>0, 1<\eta<e \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解

$$u(t) = I_{1^+}^{\alpha} y(t) + K(\ln t)^{\alpha-1}[I_{1^+}^{\gamma+\alpha} y(\eta) - I_{1^+}^{\alpha} y(e)] \tag{3}$$

其中

$$K = (1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\gamma-1}(\ln s)^{\alpha-1}\,\frac{\mathrm{d}s}{s})^{-1}.$$

证明 由引理 2.3 可知,Hadamard 分数阶微分方程(2)的一般解为

$$u(t) = I_{1^+}^{\alpha} y(t) + c_1(\ln t)^{\alpha-1} + c_2(\ln t)^{\alpha-2} \tag{4}$$

利用边值条件 $u(1)=0$,则有 $c_2=0$. 又由条件 $u(e)=I_{1^+}^{\gamma} u(\eta)$ 知

$$I_{1^+}^{\alpha} y(e) + c_1 = I_{1^+}^{\gamma}[I_{1^+}^{\alpha} y(t) + c_1(\ln t)^{\alpha-1}](\eta) = I_{1^+}^{\alpha+\gamma} y(\eta) + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\gamma-1}(\ln s)^{\alpha-1}\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

则 $c_1 = K[I_{1^+}^{\gamma+\alpha} y(\eta) - I_{1^+}^{\alpha} y(e)]$. 将 c_1, c_2 代入(4)式即得(3)式.引理得证.

引理 2.5(Leray-Schauder 选择原理[13]) 设 E 是实 Banach 空间,D 是 E 中有界凸集,$T:D\to D$ 是一个全连续算子,则 T 在 D 中必具有不动点.

引理 2.6(Banach 压缩映射原理[13]) 设 D 是 Banach 空间 E 的闭子集,$F:D\to D$ 是一个严格的压缩映射,即对任意 $x,y\in D$,

$$|Fx - Fy| \leqslant k|x-y|$$

成立,其中 $0<k<1$,则 F 在 E 中有唯一不动点.

3 主要结果

记 $X=\{u \mid u\in C([1,e],\mathbf{R})$ 且 $D_{1^+}^{\beta} u\in C([1,e],\mathbf{R})\}$,则 X 在范数 $\|u\|_X = \|u\| + \|D_{1^+}^{\beta} u\| = \sup_{t\in[1,e]}|u(t)| + \sup_{t\in[1,e]}|D_{1^+}^{\beta} u(t)|$ 下是一个 Banach 空间.结合引理 2.4,定义算子 $T:X\to X$ 如下:

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, D_{1^+}^{\beta} u(s), u(s))\,\frac{\mathrm{d}s}{s} + K(\ln t)^{\alpha-1}[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\cdot \int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\alpha+\gamma-1} f(s, D_{1^+}^{\beta} u(s), u(s))\,\frac{\mathrm{d}s}{s} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}(\ln\frac{e}{s})^{\alpha-1} f(s, D_{1^+}^{\beta} u(s), u(s))\,\frac{\mathrm{d}s}{s}].$$

显然,Hadamard 分数阶微分方程边值问题(1)有解当且仅当算子 T 在 X 中有不动点.为方便,记

$$M = \frac{K+1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)},$$

$$N = (1 + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)})M.$$

定理 3.1 若 $f:[1,e]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个连续函数,且存在实常数 $\mu_i>0(i=0,1,2)$ 使得

$$|f(t,x,y)| < \mu_0 + \mu_1|x|^{\sigma_1} + \mu_2|y|^{\sigma_2}, \quad 1<t<e, 0<\sigma_i<1, i=1,2 \tag{5}$$

成立,则 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(1)在 X 中至少存在一个解.

证明 首先构造一个有界凸闭集.令

$$\Omega_l = \{u(t) \mid u(t)\in X, \|u\|_X \leqslant l, t\in[1,e]\},$$

这里的

$$l > \max\{3N\mu_0, (3N\mu_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, (3N\mu_2)^{\frac{1}{1-\sigma_2}}\}.$$

显然 Ω_l 是 Banach 空间 X 中的有界凸闭集.

接着，由 Hadamard 分数阶导数定义及(5)式，对任意 $u \in \Omega_l$ 有

$$\begin{aligned}
&|Tu(t)| \leqslant \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\mu_0 + \mu_1 |D_{1^+}^{\beta}u(s)|^{\sigma_1} + \\
&\mu_2 |u(s)|^{\sigma_2})\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&K(\ln t)^{\alpha-1}[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\alpha+\gamma-1} \cdot \\
&(\mu_0 + \mu_1 |D_{1^+}^{\beta}u(s)|^{\sigma_1} + \mu_2 |u(s)|^{\sigma_2})\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}(\ln\frac{e}{s})^{\alpha-1}(\mu_0 + \mu_1 |D_{1^+}^{\beta}u(s)|^{\sigma_1} + \\
&\mu_2 |u(s)|^{\sigma_2})\frac{\mathrm{d}s}{s}] \leqslant \\
&[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&\frac{K(\ln t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\alpha+\gamma-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&\frac{K(\ln t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}(\ln\frac{e}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s}](\mu_0 + \\
&\mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2}) \leqslant \\
&(\frac{K+1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)})(\mu_0 + \\
&\mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2}) = M(\mu_0 + \mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2})
\end{aligned} \tag{6}$$

同时，由定义 2.2 有

$$\begin{aligned}
&|D_{1^+}^{\beta}Tu(t)| \leqslant \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{-\beta}|Tu(s)|\frac{\mathrm{d}s}{s} \leqslant \\
&\frac{M}{\Gamma(1-\beta)}(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{-\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s}(\mu_0 + \\
&\mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2}) = \\
&\frac{M}{\Gamma(1-\beta)}(\mu_0 + \mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2})
\end{aligned} \tag{7}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\|Tu\|_X = \\
&\sup_{t\in[1,e]}|Tu(t)| + \sup_{t\in[1,e]}|D_{1^+}^{\beta}Tu(t)| = \\
&N\mu_0 + N\mu_1 l^{\sigma_1} + N\mu_2 l^{\sigma_2} \leqslant \frac{l}{3} + \frac{l}{3} + \frac{l}{3} \leqslant l.
\end{aligned}$$

故算子 $T: \Omega_l \to \Omega_l$.

最后，我们分三步证明 T 是 Ω_l 上的一个全连续算子.

第一步，由于算子 $T: \Omega_l \to \Omega_l$ 且 f 是一个连续函数，因此算子 T 在 Ω_l 上连续.

第二步，$\forall u \in \Omega_l$，

$$\begin{aligned}
&|f(t, D_{1^+}^{\beta}u(t), u(t))| \leqslant L = \\
&(\mu_0 + \mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2}).
\end{aligned}$$

于是，类似于(6)式和(7)式有

$$\begin{aligned}
&\|Tu\|_X = \sup_{t\in[1,e]}|Tu(t)| + \\
&\sup_{t\in[1,e]}|D_{1^+}^{\beta}Tu(t)| = NL \leqslant l,
\end{aligned}$$

即 $T\Omega_l \subset \Omega_l$. 故算子 T 在 Ω_l 上是一致有界的.

第三步，$\forall u \in \Omega_l$，

$$\begin{aligned}
&|f(t, D_{1^+}^{\beta}u(t), u(t))| \leqslant L = \\
&(\mu_0 + \mu_1 l^{\sigma_1} + \mu_2 l^{\sigma_2}).
\end{aligned}$$

故由第二步知 $T: \Omega_l \to \Omega_l$. 接着，令 $t_1, t_2 \in [1, e](t_1 < t_2)$. 于是

$$\begin{aligned}
&|(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| \leqslant \\
&\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} - \int_1^{t_1}(\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| + \\
&KL|(\ln t_2)^{\alpha-1} - (\ln t_1)^{\alpha-1}| \times \\
&\frac{L}{\Gamma(\alpha+\gamma)}[\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\alpha+\gamma-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}(\ln\frac{e}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s}] \leqslant \\
&\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_1}[(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - (\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}]\frac{\mathrm{d}s}{s} + \right. \\
&\left.\int_{t_1}^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| + \\
&KL|(\ln t_2)^{\alpha-1} - (\ln t_1)^{\alpha-1}|[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}].
\end{aligned}$$

另一方面，类似地有

$$\begin{aligned}
&|D_{1^+}^{\beta}Tu(t_2) - D_{1^+}^{\beta}Tu(t_1)| \leqslant \\
&\frac{L}{\Gamma(1-\beta)}\left|(t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2})\int_1^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{-\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s} - \right. \\
&\left.(t_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1})\int_1^{t_1}(\ln\frac{t_1}{s})^{-\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \leqslant \\
&\frac{L}{\Gamma(1-\beta)}[(t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2})\int_1^{t_1}\left|(\ln\frac{t_2}{s})^{-\beta} - \right. \\
&\left.(\ln\frac{t_1}{s})^{-\beta}\right|\frac{\mathrm{d}s}{s} + (t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2})\int_{t_1}^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{-\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\
&\left|t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2} - t_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|\int_1^{t_1}(\ln\frac{t_1}{s})^{-\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s}].
\end{aligned}$$

因此，当 $t_2 \to t_1$ 时，有

$$|(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| \to 0,$$

$$|D_{1^+}^{\beta}Tu(t_2) - D_{1^+}^{\beta}Tu(t_1)| \to 0,$$

即

$$\|(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)\|_X \to 0,$$

从而 T 在 Ω_l 上是等度连续的.

结合以上三步的结果，由 Arzela-Ascoli's 定理

知算子 T 在 Ω_l 上是全连续的.

综上所述,由引理 2.5 可知,算子 T 在 Ω_l 中至少存在一个不动点,即 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(1)在 X 中至少存在一个解. 证毕.

注 1 当 $\sigma_i=1$ 或 $\sigma_i>1(i=1,2)$时,用类似方法在一定条件下也可得到定理 3.1 的结论.

定理 3.2 若 $f:[1,e]\times\mathbf{R}^2\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个连续函数且满足下面 Lipschitz 条件:

$$|f(t,x_2,y_2)-f(t,x_1,y_1)|<\lambda(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|),1<t<e,\lambda>0,x_i,y_i\in\mathbf{R},i=1,2 \tag{8}$$

且 $N\lambda<1$, 则 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(1)在 X 中存在唯一解.

证明 令 $r>\dfrac{Nr'}{1-N\lambda}$, 其中

$$r'=\sup_{t\in[1,e]}|f(t,0,0)|<\infty.$$

取

$$\Omega_r=\{u(t)\,|\,u(t)\in X,\ \|u\|_X\leqslant r,t\in[1,e]\}.$$

则 $T\Omega_r\subset\Omega_r$. 事实上,由 $u\in\Omega_r$ 可知

$$\begin{aligned}&|f(t,D_{1^+}^{\beta}u(t),u(t))|\leqslant\\&\quad|f(t,D_{1^+}^{\beta}u(t),u(t))-f(t,0,0)|+\\&\quad|f(t,0,0)|\leqslant\\&\quad\lambda(|D_{1^+}^{\beta}u(t)|+|u(t)|)|+r'\leqslant\\&\quad\lambda\|u(t)\|_X+r'\leqslant\lambda r+r'.\end{aligned}$$

于是由(6)式和(7)式有

$$\|Tu\|\leqslant M(\lambda r+r'),$$

$$\|D_{1^+}^{\beta}Tu\|\leqslant\frac{M}{\Gamma(1-\beta)}(\lambda r+r').$$

因而

$$\|Tu\|_X\leqslant M(\lambda r+r')+\frac{M}{\Gamma(1-\beta)}(\lambda r+r')=N(\lambda r+r')\leqslant r,$$

即 $T\Omega_r\subset\Omega_r$.

接着我们证明算子 T 是压缩映射. 对 $u_i\in\Omega_r$, $i=1,2,t\in[1,e]$,有

$$\begin{aligned}&|Tu_2(t)-Tu_1(t)|\leqslant\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\,|f(s,D_{1^+}^{\beta}u_2(s),u_2(s))-\\&f(s,D_{1^+}^{\beta}u_1(s),u_1(s))|\,\frac{ds}{s}+\\&K(\ln t)^{\alpha-1}[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\alpha+\gamma-1}\cdot\\&|f(s,D_{1^+}^{\beta}u_2(s),u_2(s))-\\&f(s,D_{1^+}^{\beta}u_1(s),u_1(s))|\,\frac{ds}{s}+\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}(\ln\frac{e}{s})^{\alpha-1}\,|f(s,D_{1^+}^{\beta}u_2(s),u_2(s))-\\&f(s,D_{1^+}^{\beta}u_1(s),u_1(s))|\,\frac{ds}{s}]\leqslant\\&M\lambda(|D_{1^+}^{\beta}u_2(s)-D_{1^+}^{\beta}u_1(s)|+|u_2(s)-\\&u_1(s)|)\leqslant M\lambda\|u_2-u_1\|_X,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&|D_{1^+}^{\beta}Tu_2(t)-D_{1^+}^{\beta}Tu_1(t)|\leqslant\\&\quad\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}(t\frac{d}{dt})\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{-\beta}\,|Tu_2(s)-\\&\quad Tu_1(s)|\,\frac{ds}{s}\leqslant\frac{M\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\|u_2-u_1\|_X.\end{aligned}$$

因此,

$$\|Tu_2-Tu_1\|_X\leqslant N\lambda\|u_2-u_1\|_X.$$

注意到 $N\lambda<1$, 则 T 是一个压缩映射. 因而由引理 2.6 知算子 T 在 Ω_r 中有唯一不动点,即 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(1)在 X 中存在唯一解. 证毕.

例 3.3 考虑 Hadamard 分数阶微分方程积分边值问题

$$\begin{cases}D_{1^+}^{1.5}u(t)=\dfrac{(2+\sin t)}{(7+t)^2}+e^{-2t}(D_{1^+}^{0.5}u(t))^{0.2}+\\\quad\dfrac{1}{2+t}(u(t))^{0.3},t\in(1,e),\\u(1)=0,u(e)=I_{1^+}^{0.4}u(2)\end{cases}\tag{9}$$

这里 $\alpha=1.5,\beta=0.5,\gamma=0.4,\eta=2,x=D_{1^+}^{0.5}u(t),y=u(t)$. 于是

$$\begin{aligned}&|f(t,x,y)|\leqslant\frac{3}{(7+t)^2}+e^{-2t}\,|x|^{0.2}+\\&\quad\frac{1}{2+t}|y|^{0.3}\leqslant\frac{3}{64}+\frac{1}{e^2}|x|^{0.2}+\frac{1}{3}|y|^{0.3}.\end{aligned}$$

取 $\mu_0=\dfrac{3}{64},\mu_1=\dfrac{1}{e^2},\mu_2=\dfrac{1}{3},\sigma_1=0.2,\sigma_2=0.3$.

显然,定理 3.1 条件满足. 因此由定理 3.1 知 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(9)在 X 中至少存在一个解.

例 3.4 考虑 Hadamard 分数阶微分方程积分边值问题

$$\begin{cases}D_{1^+}^{1.5}u(t)=\dfrac{1}{30t}(\cos t+\sin(D_{1^+}^{0.5}u(t))+\\\quad u(t)),t\in(1,e),\\u(1)=0,u(e)=I_{1^+}^{1.5}u(2)\end{cases}\tag{10}$$

这里 $\alpha=1.5,\beta=0.5,\gamma=1.5,\eta=2,x=D_{1^+}^{0.5}u(t),y=u(t)$. 则

$$K=(1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\eta}(\ln\frac{\eta}{s})^{\gamma-1}(\ln s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s})^{-1}=$$

$$\frac{4}{4-\sqrt{\pi}(\ln 2)^2} \approx 1.27,$$

$$M = \frac{K+1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} = \frac{4K+4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{K}{6} \approx 1.17,$$

$$N = (1+\frac{1}{\Gamma(1-\beta)})M = (1+\frac{1}{\sqrt{\pi}})M \approx 1.54,$$

$$|f(t,x,y)| = \frac{1}{30t}(\cos t + \sin x + y).$$

于是

$$|f(t,x_2,y_2) - f(t,x_1,y_1)| < \frac{1}{30}(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|).$$

取 $\lambda = 1/30$，则 $N\lambda < 1$. 显然，定理 3.2 条件满足. 因此由定理 3.2 知 Hadamard 分数阶微分方程边值问题(10)在 X 中存在唯一解.

参考文献：

[1] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[2] Zhou Y, Wang J R, Zhang L. Basic theory of fractional differential equations [M]. Singapore: World Scientific Press, 2016.

[3] 陈文，孙洪广，李西成，等. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京：科学出版社，2012.

[4] Cui Y J. Uniqueness of solution for boundary value problems for fractional differential equations [J]. Appl Math Lett, 2016, 51: 48.

[5] Zhang X Q. Positive solutions for a class of singular fractional differential equation with infinite-point boundary value conditions [J]. Appl Math Lett, 2015, 39: 22.

[6] Zhang H Y, Li Y H, Lu W. Existence and uniqueness of solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with fractional integral boundary conditions [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2016, 9: 2434.

[7] Wang G T. Explicit iteration and unbounded solutions for fractional integral boundary value problem on an infinite interval [J]. Appl Math Lett, 2015, 47: 1.

[8] Hamani S, Henderson J. Boundary value problems for fractional differential inclusions with nonlocal conditions [J]. Mediterr J Math, 2016, 13: 967.

[9] 张海燕，李耀红. 一类高分数阶微分方程积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：512.

[10] 张立新，杨玉洁，贾敬文. 一类 Caputo 分数阶微分方程积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1169.

[11] Qiao Y, Zhou Z F. Positive solutions for a class of Hadamard fractional differential equations on the Infinite interval [J]. Math Appl, 2017, 30: 589.

[12] Ahmad B, Ntouyas S. A fully Hadamard type integral boundary value problem of a coupled system of fractional differential equations [J]. Fract Calc Appl Anal, 2014, 17: 348.

[13] Deimling, K. Nonlinear functional analysis [M]. Berlin: Springer, 1985.

引用本文格式：

中　文：张海燕，李耀红. 一类 Hadamard 分数阶微分方程边值问题解的存在唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：683.

英　文：Zhang H Y, Li Y H. Existence and uniqueness of solution for boundary value problems of a class of Hadamard fractional differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 683.