

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.003

带 Robin 边界条件的分数阶对流-扩散方程的数值解法

曾宝思, 尹修草, 谢常平, 房少梅

(华南农业大学数学与信息学院, 广州 510642)

摘要: 本文对带 Robin 边界条件的分数阶对流-扩散方程进行了数值研究. 本文利用移位 Grünwald 公式对 Riemann-Liouville 空间分数阶导数进行离散, 在此基础上建立一种隐式有限差分格式, 并讨论了它差分解的存在唯一性, 然后分析了该格式的相容性、稳定性和收敛性, 最后通过数值算例验证格式是可靠和有效的.

关键词: 分数阶对流-扩散方程; Robin 边界; 隐式有限差分格式; 稳定性; 收敛性

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)01-0013-05

Numerical methods of the fractional advection-dispersion equation with Robin boundary condition

ZENG Bao-Si, YIN Xiu-Cao, XIE Chang-Ping, FANG Shao-Mei

(College of Mathematics and Information, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: In this paper, we consider numerical methods to solve the fractional advection-dispersion equation with Robin boundary condition. We propose an implicit finite difference scheme based on the shifted Grünwald formula to discretize Riemann-Liouville fractional derivative. Existence and uniqueness of numerical solutions are derived. It is proved that the implicit finite difference scheme is unconditionally stable and convergent. Finally, numerical simulations show that the method is efficient.

Keywords: Fractional advection-dispersion equation; Robin boundary; Implicit finite difference method; Unconditionally stability; Convergence

(2010 MSC 65L12)

1 引言

分数阶偏微分方程被广泛地应用于物理、化学、生物、经济、机械工程、电子工程^[1-5]等不同科学领域, 如具有混沌动力行为的动力系统、复杂物质、色噪声或者具有记忆的随机游走、多孔介质的动力学、电化学过程等等. 这源于分数阶导数能够非常有效地描述不同物质所具有的记忆性、整体性和遗传性. 关于分数阶偏微分方程数值解的研究已有很多, 尤其是对分数阶对流-扩散方程的讨论. 比

如, 文献[6]提出一个新的隐式有限差分方法, 讨论了带 Dirichelet 边界条件的分数阶对流-扩散方程的数值解问题. 在一般对流-扩散方程的基础上, 文献[7]对带 Neumann 边界条件的变系数空间分数阶对流-扩散方程进行了数值研究. 文献[8]利用隐式有限差分方法研究了带 Neumann 边界条件的分数阶对流-扩散方程. 文献[9]对带 Dirichelet 边界条件的分数阶对流-扩散方程进行了数值研究, 建立 Crank-Nicholson 差分格式, 讨论了该格式的稳定性和收敛性. 在文献[9]的基础

收稿日期: 2017-10-16

基金项目: 国家自然科学基金(11271141)

作者简介: 曾宝思(1993-), 女, 广东河源人, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程的研究. Email: 836146175@qq.com

通讯作者: 房少梅. Email: dz90@scau.edu.cn

上,本文将 Dirichelet 边界条件推广至 Robin 边界条件及其分数阶对流-扩散方程的数值解法,它可以用来描述介质中流体的反常渗透现象.

考虑如下的一维分数阶对流-扩散方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -v(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + d(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + f(x,t), L < x < R, 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = V(x), L \leq x \leq R, \\ u(L,t) = 0, u(R,t) + \beta\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Big|_{x=R} = S(t), 0 < t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

其中扩散系数 $d(x) \geq 0, v(x) \geq 0$ 是 $[L, R]$ 上的连续函数, $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 分数阶导数

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_L^R \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数.

在分数阶偏微分方程数值计算中,有限差分方法计算量小、存储量少,在处理线性问题方面是发展的比较完善的一种数值方法. 例如, Shen 等^[10]提出用显示有限差分方法解决空间分数阶扩散问题. Liu, Zhuang 等^[11-12]利用隐式有限差分方法求解时间-空间分数阶扩散方程. Meerschaert, Tadjeran 等^[13]采用交替方向的隐式有限差分方法求解二维空间的分数阶扩散方程.

文献[9]讨论了问题(1)在 $\beta = 0$ 时的情形,本文主要考虑问题(1)在 $\beta > 0$ 时,即 Robin 边界条件的情形. 本文采用移位 Grünwald 公式对分数阶导数进行离散,构造了隐式有限差分格式,分析了格式的相容性、稳定性和收敛性. 最后用数值算例说明该格式的有效性.

2 差分格式的建立及其相容性

将区域 $[L, R] \times [0, T]$ 进行网格剖分,令 $h = \frac{R-L}{N}$ 为空间步长, $\Delta t = \frac{T}{M}$ 为时间步长,则有 $x_i = ih, t_m = m\Delta t (i=0, 1, 2, \dots, N; m=0, 1, 2, \dots, M)$. 令 $v_i = v(x_i), d_i = d(x_i), f_i^m = f(x_i, t_m), S^m = S(t_m)$. 用 U_i^m 表示 $u(x, t)$ 在点 (x_i, t_m) 的精确解, u_i^m 表示 $u(x, t)$ 在点 (x_i, t_m) 的数值解.

移位 Grünwald 公式定义为:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} u(x-(k-1)h, t) \quad (3)$$

其中 N 为正整数, $h = \frac{x-L}{N}$.

Grünwald 权系数定义为:

$$g_k^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (4)$$

它的值只依赖于 k 和 α .

引理 2.1^[14] 令 α 为正实数, 整数 $n \geq 1$, 系数

$g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ 有如下性质:

- (1) 当 $k \geq 1$ 时, $g_0^{(\alpha)} = 1, g_k^{(\alpha)} = (1 - \frac{\alpha+1}{k})g_{k-1}^{(\alpha)}$;
- (2) 当 $1 < \alpha < 2$ 时, $g_2^{(\alpha)} > g_3^{(\alpha)} > \dots > 0, \sum_{k=0}^n g_k^{(\alpha)} < 0$;

- (3) 当 $1 < \alpha < 2$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} = 0$.

采用移位 Grünwald 公式对 Riemann-Liouville 分数阶导数进行离散,得到

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} \Big|_{\langle x_i, t_m \rangle} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} U_{i-k+1}^m + O(h), \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq m \leq M \quad (5)$$

利用向后 Euler 差分方法离散一阶时间导数和一阶空间导数,分别得到:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{\langle x_i, t_m \rangle} = \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{\langle x_i, t_m \rangle} = \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} + O(h) \quad (7)$$

对问题(1)建立差分格式如下:

$$\frac{u_i^m - u_i^{m-1}}{\Delta t} = -v_i \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h} + d_i \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} u_{i-k+1}^m + f_i^m, 1 \leq i \leq N-1 \quad (8)$$

$$u_0^m = 0, u_N^m + \beta \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h} = S^m, i = N \quad (9)$$

$$u_i^0 = V_i \quad (10)$$

记 R_i^m 为局部截断误差, $1 \leq i \leq N$, 由(5)~(7)式可知,当 $1 \leq i \leq N-1$ 时,局部截断误差为

$$R_i^m = \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{\Delta t} + v_i \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} - d_i \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} U_{i-k+1}^m - f_i^m = O(\Delta t + h) \quad (11)$$

当 $i = N$ 时, 局部截断误差为

$$R_N^m = U_N^m + \beta \frac{U_N^m - U_{N-1}^m}{h} - S^m = O(h) \quad (12)$$

因此, 我们建立的隐式差分格式是相容的.

3 差分解的存在唯一性以及差分格式的稳定性及收敛性分析

为了计算简便, 记

$$E_i = v_i \frac{\Delta t}{h}, B_i = d_i \frac{\Delta t}{h^\alpha}.$$

(8), (9) 式通过整理得到

$$\begin{aligned} & -g_0^{(\alpha)} B_i u_{i+1}^m + (1 + E_i - g_1^{(\alpha)} B_i) u_i^m - \\ & (E_i + g_2^{(\alpha)} B_i) u_{i-1}^m - B_i \sum_{k=3}^{i+1} g_k^{(\alpha)} u_{i-k+1}^m = \\ & u_i^{m-1} + \Delta t f_i^m, \\ & (h + \beta) u_N^m = \beta u_{N-1}^m + h S^m \end{aligned} \quad (13)$$

进一步可以将式(13)改写成下列矩阵的形式:

$$\begin{cases} U^m = (u_1^m, u_2^m, \dots, u_N^m)^T, \\ U^{m-1} = (u_1^{m-1}, u_2^{m-1}, \dots, 0)^T, \\ F^m = (\Delta t f_1^m, \Delta t f_2^m, \dots, \Delta t f_{N-1}^m, h S^m)^T, \\ AU^m = U^{m-1} + F^m, 1 \leq m \leq M \end{cases} \quad (14)$$

其中 A 是一个 $N \times N$ 系数矩阵:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, i+2 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq N-2, \\ -g_0^{(\alpha)} B_i, j = i+1, 1 \leq i \leq N-1, \\ 1 + E_i - g_1^{(\alpha)} B_i, j = i, 1 \leq i \leq N-1, \\ -E_i - g_2^{(\alpha)} B_i, j = i-1, 1 \leq i \leq N-1, \\ -g_{i-j+1}^{(\alpha)} B_i, j \leq i-2, 1 \leq i \leq N-1, \\ -\beta, j = N-1, i = N, \\ h + \beta, j = i = N \end{cases} \quad (15)$$

定理 3.1 差分格式(8)~(10)的解存在且唯一.

证明 由式(14)有

$$AU^m = U^{m-1} + F^m, 1 \leq m \leq M.$$

假设 λ 为矩阵 A 的特征值, X 为其对应的特征向量, 则有 $AX = \lambda X$. 设

$$|x_i| = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \dots, N\}.$$

由 $\sum_{j=1}^N A_{i,j} x_j = \lambda x_i$ 有

$$\lambda = A_{i,i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{i,j} \frac{x_j}{x_i} \quad (16)$$

将式(15)中 $a_{i,j}$ 的值代入式(16), 有

$$\lambda = 1 + E_i - g_1^{(\alpha)} B_i - g_0^{(\alpha)} B_i \frac{x_{i+1}}{x_i} -$$

$$\begin{aligned} & (E_i + g_2^{(\alpha)} B_i) \frac{x_{i-1}}{x_i} - \\ & \beta \frac{x_{N-1}}{x_i} + (h + \beta) \frac{x_N}{x_i} - B_i \sum_{j=1}^{i-2} g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i} = \\ & 1 + E_i \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i}\right) + (h + \beta) \frac{x_N}{x_i} - \beta \frac{x_{N-1}}{x_i} - \\ & B_i \left(g_1^{(\alpha)} + \sum_{j=1, j \neq i}^{i+1} g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i}\right). \end{aligned}$$

由 $|x_i| = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \dots, N\}$ 有

$$\frac{x_j}{x_i} \leq \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq 1.$$

当 $1 \leq j \leq N-1$ 时, 由引理 2.1 中(2)、(3)式分别有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i} & \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{i-j+1}^{(\alpha)} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \\ & \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{i-j+1}^{(\alpha)}, \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i} \leq -g_1^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

从而

$$g_1^{(\alpha)} + \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i} \leq 0.$$

则有

$$\lambda = 1 + E_i \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i}\right) -$$

$$B_i \left(g_1^{(\alpha)} + \sum_{j=1, j \neq i}^{i+1} g_{i-j+1}^{(\alpha)} \frac{x_j}{x_i}\right) \geq 1,$$

即 $\lambda \geq 1$.

当 $j = N$ 时, 有

$$\lambda = 1 + (h + \beta) \frac{x_N}{x_i} - \beta \frac{x_{N-1}}{x_i} \geq 1 + h > 1,$$

综上所述可得 $\lambda \geq 1$.

由上可知 A 的特征值全大于 1, 所以矩阵 A 为非奇异矩阵, 因此差分格式(8)~(10)的解是存在且唯一的. 证毕.

下面讨论差分格式的稳定性及收敛性. 假设 \tilde{u}_i^m 为 $u(x, t)$ 在 (x_i, t_m) 点的近似值, \tilde{u}_i^0 为 $(x_i, 0)$ 点的初始值, 并有如下定义:

$$\epsilon_i^m = u_i^m - \tilde{u}_i^m, \epsilon^m = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)^T,$$

$$\|\epsilon^m\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\epsilon_i^m|,$$

$$e_i^m = U_i^m - u_i^m (1 \leq i \leq N, 0 \leq m \leq M),$$

$$e^m = (e_1^m, e_2^m, \dots, e_N^m), \|e^m\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_i^m|.$$

当 $1 \leq i \leq N-1$ 时, 误差 $\epsilon_i^m = u_i^m - \tilde{u}_i^m$ 满足

$$\begin{aligned} & -g_0^{(\alpha)} B_i \epsilon_{i+1}^m + (1 + E_i - g_1^{(\alpha)} B_i) \epsilon_i^m - \\ & (E_i + g_2^{(\alpha)} B_i) \epsilon_{i-1}^m - B_i \sum_{k=3}^{i+1} g_k^{(\alpha)} \epsilon_{i-k+1}^m = \epsilon_i^{m-1} \end{aligned} \quad (17)$$

当 $i = N$ 时, 误差 $\epsilon_N^m = u_N^m - \tilde{u}_N^m$ 满足

$$(h + \beta)\epsilon_N^m - \beta\epsilon_{N-1}^m = 0 \tag{18}$$

其中 $\epsilon_0^m = 0 (m = 1, 2, \dots, M)$.

当 $1 \leq i \leq N - 1$ 时, 误差 $e_i^m = U_i^m - u_i^m$ 满足

$$-g_0^{(a)} B_i e_{i+1}^m + (1 + E_i - g_1^{(a)} B_i) e_i^m - (E_i + g_2^{(a)} B_i) e_{i-1}^m - B_i \sum_{k=3}^{i+1} g_k^{(a)} e_{i-k+1}^m = e_i^{m-1} + \Delta R_i^m \tag{19}$$

当 $i = N$ 时, 误差 $e_N^m = U_N^m - u_N^m$ 满足

$$(h + \beta)e_N^m - \beta e_{N-1}^m = hR_N^m \tag{20}$$

定理 3.2 差分格式(8)~(10)无条件稳定.

证明 由式(17)得

$$(h + \beta)\epsilon_N^m = \beta\epsilon_{N-1}^m \tag{21}$$

则

$$|\epsilon_N^m| = \frac{\beta}{h + \beta} |\epsilon_{N-1}^m| < |\epsilon_{N-1}^m| < \max_{1 \leq i \leq N-1} |\epsilon_i^m| \tag{22}$$

故当 $i = N$ 时, 该差分格式无条件稳定.

当 $1 \leq i \leq N - 1$ 时, 我们有

$$\sum_{j=1}^N a_{i,j} = \begin{cases} 1 - B_i (\sum_{j=0}^i g_j^{(a)}), & 1 < i \leq N - 1, \\ 1 + E_1 - B_1 (g_0^{(a)} + g_1^{(a)}), & i = 1 \end{cases} \tag{23}$$

当 $1 < \alpha \leq 2$ 时, 由引理 2.1 知

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{i,j} > 1, \\ a_{i,j} \leq 0, i \neq j \end{cases} \tag{24}$$

设 $\|\epsilon^m\|_\infty = |\epsilon_{i_0}^m|, 1 \leq i_0 \leq N - 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|\epsilon^m\|_\infty &= |\epsilon_{i_0}^m| < \sum_{j=1}^N a_{i_0,j} |\epsilon_{i_0}^m| \leq \\ &|a_{i_0,i_0} \epsilon_{i_0}^m| - \sum_{j=1, j \neq i_0}^N |a_{i_0,j}^m| |\epsilon_j^m| \leq \\ &|a_{i_0,i_0} \epsilon_{i_0}^m| - \left| \sum_{j=1, j \neq i_0}^N a_{i_0,j}^m \epsilon_j^m \right| \leq \\ &\left| \sum_{j=1}^N a_{i_0,j}^m \epsilon_j^m \right| = |\epsilon_{i_0}^{m-1}| \leq \|\epsilon^{m-1}\|_\infty \end{aligned} \tag{25}$$

以此类推, 得

$$\|\epsilon^m\|_\infty < \|\epsilon^0\|_\infty, 1 \leq m \leq M.$$

因此, 差分格式(8)~(10)是无条件稳定的.

定理 3.3 差分格式(8)~(10)的解 u_i^m 以 $\|\epsilon^m\|_\infty$ 收敛到初边值问题(1)的解 U_i^m , 且存在一个正的常数 C , 使得

$$\|\epsilon^m\|_\infty \leq C(\Delta t + h), 1 \leq m \leq M \tag{26}$$

证明 设 $\|\epsilon^m\|_\infty = |\epsilon_N^m| \geq \max_{1 \leq i \leq N-1} |\epsilon_i^m|, i = N$.

由式(19)得

$$\begin{aligned} h |\epsilon_N^m| &= (h + \beta) |\epsilon_N^m| - \beta |\epsilon_{N-1}^m| \leq \\ (h + \beta) |\epsilon_N^m| - \beta |\epsilon_{N-1}^m| &\leq \\ |(h + \beta)\epsilon_N^m| - |\beta\epsilon_{N-1}^m| &\leq \\ |(h + \beta)\epsilon_N^m - \beta\epsilon_{N-1}^m| &= hR_N^m \end{aligned} \tag{27}$$

则有

$$|\epsilon_N^m| \leq R_N^m = C_1 h \tag{28}$$

当 $1 \leq i_0 \leq N - 1$ 时, 设 $\|\epsilon^m\|_\infty = |\epsilon_{i_0}^m| > |\epsilon_N^m|$, 由式(23)得

$$\begin{aligned} \|\epsilon^m\|_\infty &= |\epsilon_{i_0}^m| < \sum_{j=1}^N a_{i_0,j} |\epsilon_{i_0}^m| \leq \\ |a_{i_0,i_0} \epsilon_{i_0}^m| - \sum_{j=1, j \neq i_0}^N |a_{i_0,j}| |\epsilon_j^m| &\leq \\ |a_{i_0,i_0} \epsilon_{i_0}^m| - \left| \sum_{j=1, j \neq i_0}^N a_{i_0,j} \epsilon_j^m \right| &\leq \\ \left| \sum_{j=1}^N a_{i_0,j} \epsilon_j^m \right| = |\epsilon_{i_0}^m + \Delta R_{i_0}^m| &\leq \\ \max_{1 \leq i \leq N-1} |\epsilon_i^{m-1}| + \Delta t C_1 (\Delta t + h) &\leq \\ \max_{1 \leq i \leq N-1} |\epsilon_i^{m-2}| + 2 \Delta t C_1 (\Delta t + h) \end{aligned} \tag{29}$$

由式(29)得

$$\begin{aligned} \|\epsilon^m\|_\infty &\leq |\epsilon_{i_0}^0| + m \Delta t C_2 (\Delta t + h) = \\ m \Delta t C_2 (\Delta t + h). \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \|\epsilon^m\|_\infty &\leq C_1 h + m \Delta t C_2 (\Delta t + h) \leq \\ C(\Delta t + h) \end{aligned} \tag{30}$$

4 数值试验

考虑如下的分数阶对流-扩散方程 ($\alpha = 1.8$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= -v(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \\ d(x) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial x^{1.8}} &+ f(x,t), \end{aligned}$$

取扩散系数 $v(x) = (1+x)x, d(x) = \frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(4)} x^{2.8}, f(x,t) = 2e^{-t} x^3 (1+x)$, 初边值条件为:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^3, 0 < x < 1, \\ u(0,t) &= e^{-t}, \\ u(1,t) + \beta \left(\frac{\alpha u(x,t)}{\alpha x} \right) \Big|_{x=1} &= \\ (1+3\beta)e^{-t}, &0 < t \leq 1. \end{aligned}$$

此方程的精确解为

$$u(x,t) = e^{-t} x^3.$$

图 1 为 $\Delta t = h = 1/40$ 的网格上, $T = 1$ 时刻,

差分格式(8)~(10)所得到的数值解以及精确解的图像. 这表明在本例中,数值解能很好的拟合精确解. 从表 1 的数值算例也可以看出,本文对问题(1)建立的隐式差分格式是有效的.

5 结 论

本文研究带 Robin 边界条件的分数阶对流-扩散方程的数值解法. 利用移位 Grünwald 公式替代 Riemann-Liouville 空间分数阶导数,构造一阶隐式差分格式,证明了该格式是无条件稳定和收敛的,并用数值算例说明该格式的有效性. 我们将构造更高精度的数值格式,进一步研究带 Robin 边界条件的分数阶对流-扩散方程的数值解法.

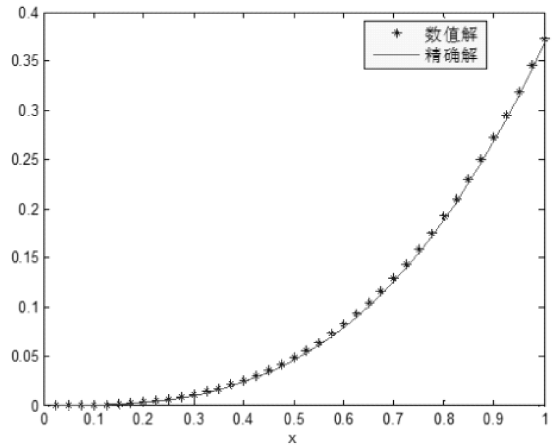


图 1 数值结果
Fig. 1 Numerical results

表 1 当 $T = 1$ 时隐式差分方法的误差值

Tab. 1 Error behaviors for implicit finite difference scheme (14) at $T = 1$

$\Delta t = h$	$\alpha = 1.6$		$\alpha = 1.7$		$\alpha = 1.8$	
	Max Error	Error rate	Max Error	Error rate	Max Error	Error rate
1/10	7.6803×10^{-2}	—	7.5388×10^{-2}	—	7.4086×10^{-2}	—
1/20	3.9785×10^{-2}	0.965	3.8946×10^{-2}	0.968	3.8162×10^{-2}	0.971
1/40	2.0287×10^{-2}	0.981	1.9826×10^{-2}	0.982	1.9389×10^{-2}	0.984
1/80	1.0253×10^{-2}	0.989	1.0008×10^{-2}	0.991	9.7764×10^{-3}	0.992
1/160	5.1562×10^{-3}	0.994	5.0296×10^{-3}	0.995	4.9094×10^{-3}	0.996
1/320	2.5861×10^{-3}	0.997	2.5214×10^{-3}	0.997	2.4601×10^{-3}	0.998

参考文献:

[1] Sokolov I M, Klafter J, Blumen A. Fractional kinetics [J]. Physics Today, 2002, 5: 48.

[2] Magin R L. Fractional calculus in bioengineering [M]. Danbury: Begell House Publishers, 2006.

[3] Raberto M, Scalas E, Mainardi F. Waiting-times and returns in high-frequency financial data: an empirical study [J]. Physica A, 2002, 314: 749.

[4] 洪韵, 孙峪怀, 江林, 张雪. (3+1)维时空分数阶mKdV-ZK方程的新精确解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 679.

[5] 李钊, 孙峪怀, 张雪, 等. 非线性分数阶 Klein-Gordon 方程的新显式解[J]. 四川大学学: 自然科学版, 2017, 54: 221.

[6] 李晓明, 余跃玉, 胡兵. 时间分数阶对流-扩散方程的有限差分法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2013, 50: 225.

[7] 马亮亮, 田富鹏. 变系数空间分数阶对流-扩散方程的隐式差分逼近[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2014, 35: 11.

[8] Meerschaert M M, Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equation [J]. Comput Appl Math, 2004, 172: 65.

[9] 尹修草, 周均, 胡兵. 分数阶对流-弥散方程的有限差分方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2013, 50: 409.

[10] Shen S, Liu F. Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion equation with insulated ends [J]. ANZIAM J, 2005, 46: 871.

[11] Liu F, Zhuang P, Anh V, et al. A fractional-order implicit difference approximation for the space-time fractional diffusion equation [J]. ANZIAM J, 2006, 47: C48.

[12] Liu F, Zhuang P, Anh V, et al. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation [J]. Appl Math Comput, 2007, 191: 12.

[13] Meerschaert M M, Scheffler H P, Tadjeran C. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation [J]. Comput Phys, 2006, 211: 249.

[14] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications [M]. New York: Gordon Breach, 1993.