doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.05.003

一类空时分数阶混合(1+1)维 KdV 方程的精确解

李林芳，舒　级，文慧霞
（四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610068）

摘　要：本文考虑一类具有修正 Riemann-Liouville 分数阶导数的空时分数阶混合(1+1)维 KdV 方程. 利用分数阶复变换，本文将非线性分数阶偏微分方程转化为非线性常微分方程，然后应用首次积分法和 Maple 软件得到了该方程的精确解.

关键词：修正 Riemann-Liouville 分数阶导数；首次积分法；分数阶复变换；空时分数阶混合 KdV 方程

中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)05-0912-05

Exact solutions for a class of space-time fractional mixed (1+1)-dimensional KdV equations

LI Lin-Fang, *SHU Ji*, *WEN Hui-Xia*
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: Exact solutions of a class of space-time fractional mixed (1+1)-dimensional KdV equations with modified Riemann-Liouville fractional derivative are considered. Firstly, the nonlinear fractional partial differential equations are transformed into the nonlinear ordinary differential equations by means of the fractional complex transformations. Then, by applying the first integral method and Maple software, the exact solutions are obtained.

Keywords: Riemann-Liouville fractional derivative; First integral method; Fractional complex transformation; Space-time fractional mixed KdV equation
(2010 MSC 35R11, 83C15)

1　引　言

近年来，分数阶偏微分方程(FPDE)开始出现在物理、生物、工程、信号处理、系统识别、控制理论、金融和分子动力学等领域并迅即成为偏微分方程领域关注的焦点问题.

在分数阶微分方程的研究中，构造分数阶微分方程的精确解是一个重要方向. 目前，针对这一问题已有许多有效的求解方法，如分数阶指数函数法[1,2]、分数阶首次积分法[3-5]、分数阶 Riccati 映射法[6,7]、分数阶(G'/G)-展开法[8-11]等.

分数阶导数有多种定义，本文将采用下面的修正 Riemann-Liouville 分数阶导数[12]：对于连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其 α 阶导数定义为

收稿日期：2017-11-05
基金项目：国家自然科学基金(11371267，11571245)；四川省科技厅应用基础计划项目基金(2016JY204)
作者简介：李林芳(1993－)，女，四川广安人，硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程. E-mail：515503842@qq.com
通讯作者：舒级. E-mail：shuji2008@hotmail.com

$$D_t^{\alpha} f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-\xi)^{-\alpha-1}[f(\xi)-f(0)]\mathrm{d}\xi,\\ \quad \alpha<0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t (t-\xi)^{-\alpha}[f(\xi)-f(0)]\mathrm{d}\xi,\\ \quad 0\leqslant\alpha<1,\\ [f^{(n)}(t)]^{\alpha-n}, n\leqslant\alpha<n+1, n\geqslant 1\end{cases} \tag{1}$$

其中 Γ 是 Gamma 函数. 修正的 Riemann-Liouville 分数阶导数具有如下性质：

$$D_t^{\alpha} t^{\gamma}=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \gamma>0 \tag{2}$$

$$D_t^{\alpha}[f(t)g(t)]=f(t)D_t^{\alpha}g(t)+g(t)D_t^{\alpha}f(t) \tag{3}$$

$$D_t^{\alpha}[f(g(t))]=f_g'(g(t))D_t^{\alpha}g(t)= D_g^{\alpha}f(g(x))[g_x'(x)]^{\alpha} \tag{4}$$

本文研究如下空时分数阶(1+1)维混合 KdV 方程

$$D_t^{\alpha}u+\alpha_0 D_x^{\alpha}u+\alpha_1 u D_x^{\alpha}u+ \alpha_2 u^2 D_x^{\alpha}u+\beta D_x^{3\alpha}u=0 \tag{5}$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta$ 是非零常数，x 代表空间，t 代表时间. 该方程在整数阶情形下是变形的 Burgers-Korteweg-de Varies 方程[13]. 该方程是一个重要的数学物理方程，在流体力学、等离子体物理学、气体动力学等领域有广泛应用. 值得注意的是，文献[14]用 G'/G-展开法求得了该方程在整数阶情形下的系列精确解.

2　预备知识

定理 2.1(除法定理[17])　假设 $P(\omega,z)$ 是复数域 $C(\omega,z)$ 上的多项式，并且 $P(\omega,z)$ 在 $C(\omega,z)$ 上是不可约的. 如果 $Q(\omega,z)$ 包含 $P(\omega,z)$ 的全部零点，那么在复数域 $C(\omega,z)$ 上存在一个多项式 $G(\omega,z)$ 使得

$$Q(\omega,z)=P(\omega,z)G(\omega,z) \tag{6}$$

接下来我们得用首次积分法[13]给出求解分数阶偏微分方程的步骤. 考虑如下非线性分数阶偏微分方程：

$$P(u,D_t^{\alpha}u,D_x^{\alpha}u,u_x,u_y,D_t^{\alpha}u,u_{xy},\cdots)=0,\quad 0<\alpha<1 \tag{7}$$

其中 $u=u(x,y,t)$ 是未知函数，P 是 u 和 u 的关于 x,y,t 各阶偏导数的多项式.

步骤 1　通过作分数阶复变换

$$u(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m,t)=u(\xi),\quad \xi=\frac{x_1^{\alpha}+k_1x_x^{\alpha}+\cdots k_{m-1}x_m^{\alpha}+ct^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{8}$$

将(7)式转化为只含变量 ξ 的整数阶常微分方程

$$Q(u,u',u''\cdots)=0 \tag{9}$$

其中 k_i,c 是常数(将在后面确定)，$c\neq 0$，$u'=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$，$u''=\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}$，$\cdots$.

步骤 2　引入两个独立变量 $X(\xi)=u(\xi)$，$Y(\xi)=u'(\xi)$. 则(9)式等价于一阶常微分方程组

$$\begin{cases}X'(\xi)=Y(\xi),\\ Y'(\xi)=f(X(\xi),Y(\xi))\end{cases} \tag{10}$$

步骤 3　设(10)式的首次积分形式为

$$q(X(\xi),Y(\xi))=\sum_{i=0}^{m}a_i(X(\xi))Y^i(\xi)=0 \tag{11}$$

这里 $a_i(X)(i=0,1,\cdots,m)$ 是实数域上的待定多项式. 根据除法定理，存在实数域上的多项式 $g(X)$，$h(X)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}P(X(\xi),Y(\xi))}{\mathrm{d}\xi}=[g(X)+h(X)Y]q(X,Y) \tag{12}$$

由(12)式可确定多项式 $g(X)$，$h(X)$，进而求出 $q(X,Y)$.

步骤 4　将 $X(\xi)=u(\xi)$，$Y(\xi)=u'(\xi)$ 代入(11)式，解之即可得(9)式的精确解.

3　空时分数阶(1+1)维混合 KdV 方程的精确解

首先，对方程(5)作复变换

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=\frac{x^{\alpha}-\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

可得

$$(\alpha_0-\lambda)u'+\alpha_1uu'+\alpha_2u^2u'+\beta u'''=0 \tag{13}$$

对(13)式关于 ξ 积分并取积分常数为零得

$$(\alpha_0-c)u+\alpha_1\frac{u^2}{2}+\alpha_2\frac{u^3}{3}+\beta u''=0 \tag{14}$$

由(9)式，(14)式可改写为二维自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}=Y,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{(c-\alpha_0)X-\dfrac{\alpha_1}{2}X^2-\dfrac{\alpha_2}{3}X^3}{\beta}\end{cases} \tag{15}$$

作变换 $\mathrm{d}\xi=\beta\mathrm{d}\tau$，则(15)式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau}=\beta Y,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\tau}=(c-\alpha_0)X-\dfrac{\alpha_1}{2}X^2-\dfrac{\alpha_2}{3}X^3\end{cases} \tag{16}$$

由首次积分法,假设 X 和 Y 是(16)式的非平凡解,且 $q[X,Y]=\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i$ 是复数域 $C[X,Y]$ 上的一个既约多项式,使得

$$q[X,Y]=\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i=0 \tag{17}$$

其中 $a_i(X)(i=0,1,2\cdots,m)$ 关于 X 的多项式且 $a_m(X)\neq 0$. (17)式称为(16)式的首次积分. 由除法定理,存在复数域 $C[X,Y]$ 上的多项式 $g(X)+h(X)Y$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial q}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \tau}+\frac{\partial q}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \tau}=$$

$$[g(X)+h(X)Y]\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i \tag{18}$$

情形 1. 当 $m=1$ 时,通过比较(18)式两边 $Y^i(i=0,1)$ 的系数可得

$$a_0'(X)\beta=a_1(X)g(X)+a_0(X)h(X) \tag{19}$$

$$a_1'(X)\beta=a_1(X)h(X) \tag{20}$$

$$a_1(X)\left((c-\alpha_0)X-\frac{\alpha_1}{2}X^2-\frac{\alpha_2}{3}X^3\right)=$$

$$a_0(X)g(X) \tag{21}$$

因 $a_i(X)(i=0,1)$ 是关于 X 的多项式,由(20)式可知 $a_1(X)$ 必为一个常数且 $h(X)=0$. 为简便计,取 $a_1(X)=1$. 比较 $g(X)$ 和 $a_0(X)$ 的次数,由(19)式可得 $\deg(g(X))=1,\deg(a_0(X))=2$. 假设 $g(X)=A_1X+B_0$, 且 $A_1\neq 0$. 于是有

$$a_0(X)=-\frac{\alpha_2}{3}A_1X^2-\frac{\alpha_1}{2}B_0X+A_0 \tag{22}$$

将 $a_0(X),a_1(X)$ 及 $g(X)$ 代入(19)式和(21)式并对 X^2 和 X 的对应项系数分别进行比较得到

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}A_1\alpha_2\beta X-\frac{\alpha_1}{2}B_0\beta=A_1X+B_0,\\ -\frac{\alpha_2}{3}A_1^2X^3=-\frac{\alpha_2}{3}X^3,\\ \frac{\alpha_1}{2}A_1B_0+\frac{\alpha_2}{3}A_1B_0=\frac{\alpha_1}{2},\\ A_0A_1-\frac{\alpha_1}{2}B_0^2=c-\alpha_0,\\ A_0B_0=0\end{cases} \tag{23}$$

由此可得两组解

$$A_1=1,A_0=0,B_0=\frac{2}{3},\lambda=\alpha_0-\frac{2}{9}\alpha_1;$$

$$A_1=-1,A_0=0,B_0=-\frac{2}{3},\lambda=\alpha_0-\frac{2}{9}\alpha_1.$$

从而(16)式有下面的首次积分:

$$Y\pm\frac{\alpha_2}{3}X^2\pm\frac{\alpha_1}{3}X=0 \tag{24}$$

由(24)式并结合二维自治系统(15)式有

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}=\pm\frac{\alpha_2}{3}X^2\pm\frac{\alpha_1}{3}X \tag{25}$$

方程(25)是著名的 Riccati 方程[16],即 $V'=\alpha_0+\alpha_1V+\alpha_2V^2$, 其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta$ 是常数, $\alpha_2\neq 0$. Riccati 方程有以下解:

(i) 如果 $\Delta=\alpha_1^2-4\alpha_0\alpha_2>0$,则

$$V(\xi)=\begin{cases}\frac{-1}{2\alpha_2}[\alpha_1+\sqrt{\Delta}\tanh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi-\frac{\varepsilon\ln\xi_0}{2})],\xi_0>0,\\ \frac{-1}{2\alpha_2}[\alpha_1+\sqrt{\Delta}\coth(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi-\frac{\varepsilon\ln\xi_0}{2})],\xi_0<0,\\ \frac{-1}{2\alpha_2}[\alpha_1+\varepsilon\sqrt{\Delta}],\xi_0=0\end{cases} \tag{26}$$

(ii) 如果 $\Delta=\alpha_1^2-4\alpha_0\alpha_2<0$,则

$$V(\xi)=\begin{cases}\frac{-1}{2\alpha_2}[\alpha_1-\sqrt{\Delta}\tan(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi+\xi_0)],\\ \frac{-1}{2\alpha_2}[\alpha_1+\sqrt{\Delta}\cot(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi+\xi_0)]\end{cases} \tag{27}$$

(iii) 如果 $\Delta=\alpha_1^2-4\alpha_0\alpha_2=0$,则

$$V(\xi)=\frac{-1}{2\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_2\xi+\xi_0} \tag{28}$$

其中 ξ_0 是任意的常数, $\varepsilon=\pm 1$. 根据(25)式的系数关系可知 $\Delta>0$. 所以由(26)式可得方程(5)的解如下:

$$u_{1,2}(\xi)=\pm\frac{3}{2\alpha_2}[\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_1}{3}\tanh(\frac{\alpha_1}{6}\cdot$$

$$(\frac{x^\alpha-(\alpha_0-\frac{2}{9}\alpha_1)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})-\frac{\varepsilon\ln\xi_0}{2})],\xi_0>0 \tag{29}$$

$$u_{3,4}(\xi)=\pm\frac{3}{2\alpha_2}[\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_1}{3}\coth(\frac{\alpha_1}{6}\cdot$$

$$(\frac{x^\alpha-(\alpha_0-\frac{2}{9}\alpha_1)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})-\frac{\varepsilon\ln\xi_0}{2})],\xi_0<0 \tag{30}$$

$$u_{5,6}(\xi)=\pm\frac{3}{2\alpha_2}[\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{3})],\xi_0=0 \tag{31}$$

若对(25)式直接求解并将变量还原,可得方程(5)的行波解为

$$u_7(\xi)=\frac{\frac{4}{3}e^{\frac{\alpha_1}{3}|(x-\alpha_0t+\frac{2}{9}\alpha_1t+c_0)|}}{1-e^{\frac{\alpha_1}{3}|(x-\alpha_0t+\frac{2}{9}\alpha_1t+c_0)|}} \tag{32}$$

$$u_8(\xi)=\frac{\frac{4}{3}e^{-\frac{\alpha_1}{3}|(x-\alpha_0t+\frac{2}{9}\alpha_1t+c_0)|}}{1-e^{-\frac{\alpha_1}{3}|(x-\alpha_0t+\frac{2}{9}\alpha_1t+c_0)|}} \tag{33}$$

这里 c_0 为积分常数.

情形 2. 当 $m=2$ 时,通过比较(14)式两边 Y^i

$(i=0,1,2)$的系数，可得

$$a_0'(X)\beta+2a_2(X)\left((c-\alpha_0)X-\frac{\alpha_1}{2}X^2-\frac{\alpha_2}{3}X^3\right)=a_1(X)g(X)+a_0(X)h(X) \tag{34}$$

$$a_1'(X)\beta=a_1(X)h(X)+a_2(X)g(X) \tag{35}$$

$$a_2'(X)\beta=a_2(X)h(X) \tag{36}$$

$$a_1(X)\left((c-\alpha_0)X-\frac{\alpha_1}{2}X^2-\frac{\alpha_2}{3}X^3\right)=a_0(X)g(X) \tag{37}$$

因 $a_i(X)=(i=0,1)$是关于 X 的多项式，由(36)式可知 $a_2(X)$ 必为一个常数且 $h(X)=0$. 同时，由(35)式可得 $a_1(X)$ 必为一个常数且 $a_2(X)=0$. 为简便起见，我们取 $a_1(X)=1$. 比较 $g(X)$ 和 $a_0(X)$ 的次数，由(34)式可得 $\deg(g(X))=1$, $\deg(a_0(X))=2$. 假设 $g(X)=A_1X+B_0$，且 $A_1\neq 0$，于是有

$$a_0(X)=-\frac{\alpha_2}{3}A_1X^2-\frac{\alpha_1}{2}B_0X+A_0 \tag{38}$$

将 $a_0(X)$，$a_1(X)$ 及 $g(X)$ 代入(34)式和(37)式并对 X^2 和 X 的对应项系数分别进行比较得到与(23)式相同的结果. 所以 $m=2$ 时与 $m=1$ 的情况相同.

为了更直观地理解这些解，我们借助 Maple 软件得到解 $u_1(\xi)$，$u_2(\xi)$，$u_3(\xi)$，$u_4(\xi)$，$u_7(\xi)$，$u_8(\xi)$ 的图形. 图 1，图 2 为 $u_1(\xi)$，$u_2(\xi)$ 的双曲函数解，系数 $\lambda=\frac{1}{9}$，$\alpha_1=4$，$\alpha_2=3$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\varepsilon=1$，$\xi_0=2$. 图 3，图 4 为 $u_3(\xi)$，$u_4(\xi)$ 的孤波解，系数 $\lambda=\frac{1}{9}$，$\alpha_1=4$，$\alpha_2=3$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\varepsilon=1$，$\xi_0=-2$. 图 5，图 6 为 $u_7(\xi)$，$u_8(\xi)$ 的行波解，系数 $\alpha_0=1$，$\alpha_1=4$，$c_0=0$.

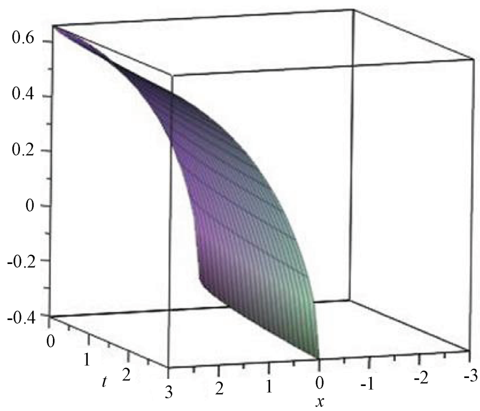

图 1　双曲函数解 $u_1(\xi)$

Fig. 1　The hyperbolic function solutions $u_1(\xi)$

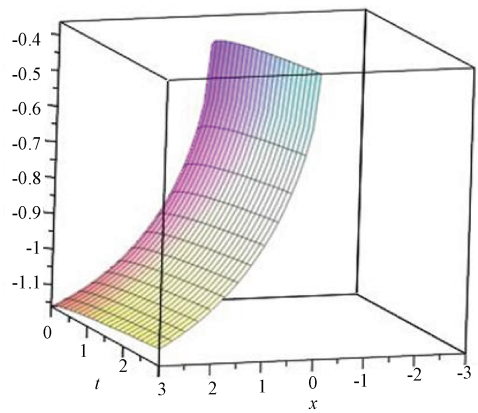

图 2　双曲函数解 $u_2(\xi)$

Fig. 2 The hyperbolic function solutions $u_2(\xi)$

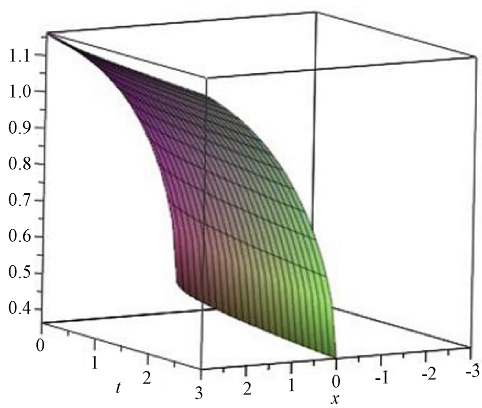

图 3　孤波解 $u_3(\xi)$

Fig. 3　The solitary solutions $u_3(\xi)$

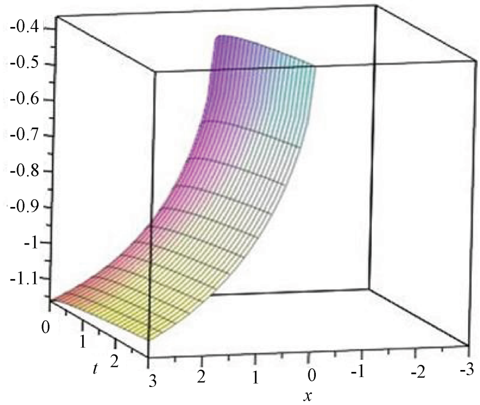

图 4　孤波解 $u_4(\xi)$

Fig. 4　The solitary solutions $u_4(\xi)$

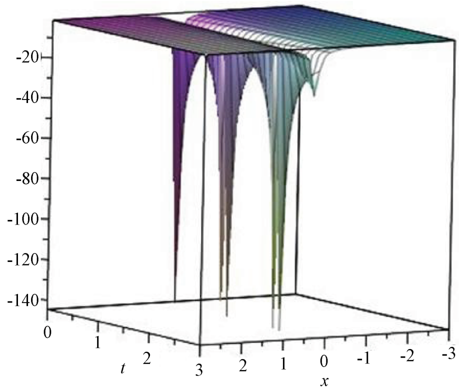

图 5 行波解 $u_7(\xi)$

Fig. 5 The travelling wave solutions $u_7(\xi)$

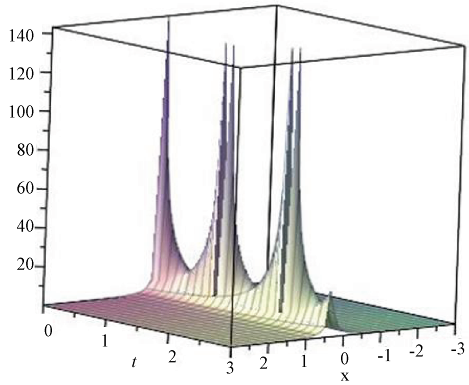

图 6 行波解 $u_8(\xi)$

Fig. 6 The travelling wave solutions $u_8(\xi)$

4 结 论

本文用作复变换将非线性分数阶偏微分方程转化为整数阶常微分方程,再借助 Riccati 方程的结论并应用首次积分法得到了空时分数阶(1+1)维混合 KdV 方程的双曲函数解、孤波解、有理函数解及行波解.

参考文献:

[1] Güner Ö, Bekir A, Bilgil H. A note on exp-function method combined with complex transform method applied to fractional differential equations [J]. Adv Nonlinear Anal, 2015, 4: 201.

[2] Yan L M, Xu F S. Generalized exp-function method for nonlinear space-time fractional differential equations [J]. Therm Sci, 2014, 18: 1573.

[3] Aminikhah H, Sheikhani A R, Rezazadeh M, *et al*. Application of first integral method [J]. Nonlinear Eng, 2015, 4: 15.

[4] Lu B. The first integral method for some time fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2012, 395: 684.

[5] Eslami M, Vajargah F B, Mirzazadeh M, *et al*. Application of first integral method to fractional partial differential equations [J]. Indian J Phys, 2014, 62: 167.

[6] Feng Q H. A new fractional projective riccati equation method for solving fractional partial differential equations [J]. Commun Theor Phys, 2014, 62: 167.

[7] Zhang Y F, Feng Q H. Fractional riccati equation rational expansion method for fractional differential equations [J]. Appl Math Inform Sci, 2013, 7: 1575.

[8] 李钊,孙峪怀,张雪,等. 非线性分数阶 Klein-Gordon 方程的新显式解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 221.

[9] Younis M, Zafar A. Exact solution to nonlinear differential equations of fractional order via (G'/G)-expansion method [J]. Appl Math Ser, 2014, 5: 1.

[10] 洪韵,孙峪怀,江林,等. (3+1)维时空分数阶 mK-dV-ZK 方程的新精确解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 679.

[11] Zheng B. (G'/G)-expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics [J]. Commun Theor Phys, 2012, 58: 623.

[12] Jumarie G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Talor series of nondifferentiable functions further results [J]. Comput Math Appl, 2006, 51: 1367.

[13] Feng, Z. Solitary wave solutions of the compound Burgers-Korteweg-de Vries equation [J]. Physica A, 2005, 352: 419.

[14] 舒级,张佳,廖欧. (G'/G)扩展法和混合 KdV 方程的精确解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2017, 40: 55.

[15] Bourbaki N. Commutative algebra [M]. Paris: Addison-Wesley Publishing, 1972.

[16] Ma W X, Fuchssteiner B. Explicit and exact solutions to Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation [J]. Int J Nonlin Mech, 1996, 31: 329.

引用本文格式:

中 文: 李林芳, 舒级, 文慧霞. 一类空时分数阶混合(1+1)维 KdV 方程的精确解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 912.

英 文: Li L F, Shu J, Wen H X. Exact solutions for a class of space-time fractional mixed (1+1)-dimensional KdV equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 912.