doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.006

完全三阶边值问题解的存在性

李菊鹏，李永祥
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文讨论了如下完全三阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t)), t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 为连续函数. 当 $f(t,x,y,z)$ 满足关于 x,y,z 超线性增长的不等式条件及 $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 型增长条件时，本文应用 Leray-Schauder 不动点定理获得了该问题解的存在性.

关键词：完全三阶边值问题；超线性增长；Nagumo 型增长条件；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O175.15　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)04-0688-05

Existence of solutions of a fully third-order boundary value problem

LI Ju-Peng, *LI Yong-Xiang*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the existence of solutions of the following fully third order boundary value problem

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t)), t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

is considered, where $f:[0,1]\times\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ is continuous. Applying the Leray-Schauder fixed point theorem, the existence of solutions is obtained under the conditions that $f(t,x,y,z)$ satisfies an inequility condition that allows $f(t,x,y,z)$ superlinear growth and $f(t,x,y,z)$ satisfies the Nagumo-type growth condition on z.

Keywords: Fully three order boundary value problem; Superlinear growth; Nagumo-type growth condition; Leray-Schauder fixed point theorem
(2010 MSC 34B18)

1　引　言

三阶微分方程边值问题在力学、物理学、生态学、经济学等学科领域中应用广泛，受到很多学者的关注[1-14]. 近年来，对各类三阶微分方程边值问题的研究十分活跃，出现了多种非线性分析工具和方法，如 Krasnoselskii 不动点定理[1,2]，上下解方法[3,4]，Leray-Schauder 度理论[5,6]等. 对非线性项 f 不含导数项的简单三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u(t)), t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

文献[7]运用上下解方法和增算子不动点定理，在

收稿日期：2017-11-15
基金项目：国家自然科学基金(11261053，11661071)
作者简介：李菊鹏(1994－)，女，甘肃武威人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究. E-mail：18393919907@163.com
通讯作者：李永祥. E-mail：liyx@nwnu.edu.cn

f 满足条件

$$f(t,u_1)-f(t,u_2)\geqslant -M(u_1-u_2),\quad t\in[0,1],u_1\geqslant u_2,0<M\leqslant 2,$$

时，获得了问题(2)的解及其正解的存在性结果. 对非线性项 f 含有一阶导数项的三阶边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t)),\\ \quad t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

文献[8,9]通过建立新的极大值原理，运用上下解方法获得了问题 (3) 解的存在性结果. 对非线性项 f 含有 u', u'' 的三阶边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\\ \quad t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0\end{cases}\tag{3}$$

文献[10]在非线性项 f 满足线性增长的条件下通过构造适当的 Banach 空间并运用 Leray-Schauder 不动点定理获得了问题(4)解的存在性结果.

在以上文献中，对非线性项 f 超线性增长的情形并未讨论. 本文讨论完全三阶边值问题(BVP)

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\\ \quad t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

解的存在性，其中 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为连续函数. 在一个允许 $f(t,x,y,z)$ 关于 x,y,z 超线性增长的不等式条件及 $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 型增长条件下，本文应用 Leray-Schauder 不动点定理获得了问题(4)解的存在性结果. 主要结果如下

定理 1.1 　设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为连续函数. 若 f 满足下列条件

(F1) 存在常数 $a,b,c\geqslant 0$ 及 $C_0>0$ 满足 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<1$, 使得

$$f(t,x,y,z)y\leqslant ax^2+by^2+cz^2+C_0\tag{5}$$

(F2) $\forall M>0$, $\exists g_M\in C^+(\mathbf{R})$，满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{g_M(r)}=+\infty\tag{6}$$

使得

$$|f(t,x,y,z)|\leqslant g_M(|z|),\quad (t,x,y,z)\in[0,1]\times[-M,M]^2\times\mathbf{R}\tag{7}$$

则问题(4)有解.

在定理 1.1 中，条件(F1)允许 $f(t,x,y,z)$ 关于 x,y,z 超线性增长. 该条件可以保证同伦簇方程的解集在 $H^2(I)$ 中的有界性，即 $\|u\|_{2,2}$ 有界. 由 $\|u\|_{2,2}$ 有界可以推出 $\|u\|_{C^1}$ 有界. 而 Nagumo 型增长条件(F2)限制 $f(t,x,y,z)$ 关于 z 的增长不超过 2 次增长. Nagumo 型增长条件在方程的解有 C^1 - 估计的前提下可得到 C^2 - 估计.

2　预备知识

记 $I=[0,1]$. $C(I)$ 表示定义在 I 上的全体连续函数按范数 $\|u\|_C=\max_{t\in I}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间. $C^n(I)(n\in\mathbf{N})$ 表示定义在 I 上的全体 n 阶连续可微函数按范数 $\|u\|_{C^n}=\max_{t\in I}\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\cdots,\|u^{(n)}\|_C\}$ 构成的 Banach 空间. $L^2(I)$ 表示 I 上的全体 Lebesgue 平方可积的函数按内积 $(u,v)=\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$ 构成的 Hilbert 空间，其内积范数为 L^2 范数

$$\|u\|_2=\left(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $H^n(I)=\{u\,|\,u\in C^{n-1}(I)$，$u^{(n-1)}$ 在 I 上绝对连续，且 $u^{(n)}\in L^2(I)\}$. $H^n(I)$ 按内积 $(u,v)_n=\sum_{k=0}^n[u^{(k)},v^{(k)}]$ 构成的 Hilbert 空间，内积范数为

$$\|u\|_{n,2}=\left(\sum_{k=0}^n\|u^{(k)}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $h\in L^2(I)$. 为讨论 BVP(1)，首先考虑相应的线性边值问题(LBVP)

$$\begin{cases}-u'''(t)=h(t),t\in I,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{8}$$

引理 2.1 　$\forall h\in L^2(I)$，线性边值问题(8)有唯一解 $u=Sh\in H^3(I)$，且解算子 $S:L^2(I)\to H^3(I)$ 为有界线性算子. 当 $h\in C(I)$ 时，解 $u=Sh\in C^3(I)$，并且解算子 $S:C(I)\to C^2(I)$ 为线性全连续算子.

证明 　$\forall h\in L^2(I)$，容易验证

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s:=Sh(t),t\in I\tag{9}$$

是 LBVP(8)的唯一解，其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-s)^2,\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}t^2,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}\tag{10}$$

为相应的 Green 函数. 由(9)，(10)式易知解算子

$S: L^2(I)\to H^3(I)$ 为有界线性算子. 当 $h\in C(I)$ 时, $u\in C^3(I)$ 且解算子 $S: C(I)\to C^3(I)$ 有界. 由嵌入映射 $C^3(I)\to C^2(I)$ 的紧性可知, $S: C(I)\to C^2(I)$ 为线性全连续算子.

引理 2.2 $\forall h\in L^2(I)$, 线性边值问题(4)的解 u 满足

$$\|u\|_2^2\leqslant\frac{1}{2}\|u'\|_2^2,$$

$$\|u'\|_2^2\leqslant\frac{1}{2}\|u''\|_2^2.$$

证明 设 u 为线性边值问题(4)的解. 则有

$$u(t)=\int_0^t u'(s)\mathrm{d}s, u'(t)=\int_0^t u''(s)\mathrm{d}s.$$

因此, 由 Hölder 不等式有

$$\|u\|_2^2=\int_0^1\left|\int_0^t u'(s)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^1 t\int_0^t|u'(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\|u'\|_2^2,$$
$$\|u'\|_2^2=\int_0^1\left|\int_0^t u''(s)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^1 t\int_0^t|u''(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\|u''\|_2^2.$$

证毕.

引理 2.3 设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续且满足条件(F2). 若存在常数 $M>0$ 使得 BVP(4)的解 u 满足估计 $\|u\|_{C^1}\leqslant M$, 则存在仅与 M 有关的常数 $M_1=M_1(M)$ 使得 u 满足 $\|u''\|_C\leqslant M_1$.

证明 对 $M>0$, 由条件(F2)可知存在 $g_M\in C^+(\mathbf{R})$ 满足(6)式, 使得 f 满足(7)式. 由(6)式可知, 存在 $M_1>0$, 使得

$$\int_0^{M_1}\frac{r\mathrm{d}r}{g_M(r)}>2M \tag{11}$$

设 $u\in C^3(I)$ 为 BVP(4)的解, $\|u\|_{C^1}\leqslant M$.

下证 $\|u''\|_C\leqslant M_1$. 不妨设 $u''(t)\not\equiv 0$. 则按方程中的边界条件, 存在 $t_1\in[0,1)$ (由 $u''(1)=0$), 使得

$$\|u''\|_C=\max_{t\in I}|u''(t)|=|u''(t_1)|>0.$$

我们分 $u''(t_1)>0$ 与 $u''(t_1)<0$ 两种情形证明. 首先证明 $u''(t_1)>0$ 的情形. 令

$$t_2=\inf\{t'\in(t_1,1]\,|\,u''(t')=0\}.$$

则由下确界的定义与 $u''(t)$ 的连续性有 $t_1<t_2\leqslant 1$, 且

$$u''(t_2)=0; u''(t)>0,\ t\in[t_1,t_2).$$

由方程(1)式及 Nagumo 条件((7)式)有

$$-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t))\leqslant$$
$$|f(t,u(t),u'(t),u''(t))|\leqslant$$
$$g_M(u''(t)), t\in[t_1,t_2].$$

因而

$$\frac{(-u'''(t))u''(t)}{g_M(u''(t))}\leqslant u''(t), t\in[t_1,t_2] \tag{12}$$

(12)式两边同时在 $[t_1,t_2]$ 上积分, 左端作变换 $r=u''(t)$ 有

$$\int_0^{u''(t_1)}\frac{r\mathrm{d}r}{g_M(r)}\leqslant\int_{t_1}^{t_2}u''(t)\mathrm{d}t=$$
$$u'(t_2)-u'(t_1)\leqslant 2\|u'\|_C\leqslant 2M.$$

由(11)式有 $\|u''\|_C=u''(t_1)\leqslant M_1$.

下证 $u''(t_1)<0$ 的情形. 令

$$t_2=\inf\{t'\in(t_1,1]\,|\,u''(t')=0\}.$$

则按下确界的定义与 $u''(t)$ 的连续性有 $t_1<t_2\leqslant 1$, 且

$$u''(t_2)=0; u''(t)<0, t\in[t_1,t_2).$$

由方程(1)式及 Nagumo 条件((7)式)有

$$-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t))\leqslant$$
$$|f(t,u(t),u'(t),u''(t))|\leqslant$$
$$g_M(-u''(t)), t\in[t_1,t_2].$$

因而

$$\frac{u'''(t)u''(t)}{g_M(-u''(t))}\leqslant -u''(t), t\in[t_1,t_2] \tag{13}$$

(13)式两边同时在 $[t_1,t_2]$ 上积分, 左端作变换 $r=-u''(t)$ 有

$$\int_0^{-u''(t_1)}\frac{r\mathrm{d}r}{g_M(r)}\leqslant\int_{t_1}^{t_2}-u''(t)\mathrm{d}t=$$
$$u'(t_1)-u'(t_2)\leqslant 2\|u'\|_C\leqslant 2M.$$

由(11)式有

$$\|u''\|_C=-u''(t_1)\leqslant M_1.$$

结论成立.

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 令

$$F(u)(t):=f(t,u(t),u'(t),u''(t)).$$

则 $F: C^2(I)\to C(I)$ 连续. BVP(4)的解等价于 $A=S\circ F$ 的不动点, 其中 $S: C(I)\to C^2(I)$ 全连续, $A: C^2(I)\to C^2(I)$ 全连续. 为对 A 应用 Leray-Schauder 不动点定理, 考察同伦簇方程

$$u=\lambda Au, 0<\lambda<1 \tag{14}$$

我们要证同伦簇方程(14)的解在 $C^2(I)$ 中有界. 设 $u\in C^2(I)$ 是某 $\lambda\in(0,1)$ 对应的方程(14)的解, 则 $u=S(\lambda F(u))$. 由 S 的定义, $u\in C^3(I)$ 为

$h=\lambda F(u)$ 对应的线性方程(8)的解. 因此 u 满足方程

$$\begin{cases}-u'''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\\ \quad t\in I,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{15}$$

方程(15)式两边同时乘以 $u'(t)$ 并在 I 上积分，由条件(F1)有

$$\begin{aligned}&\int_0^1(-u'''(t)u'(t))\mathrm{d}t=\\&\quad\int_0^1(\lambda f(t,u(t),u'(t),u''(t)))u'(t)\mathrm{d}t\leqslant\\&\quad\lambda\int_0^1(a(u(t))^2+b(u'(t))^2+\\&\quad c(u''(t))^2+C_0)\mathrm{d}t\leqslant\\&\quad a\int_0^1(u(t))^2\mathrm{d}t+b\int_0^1(u'(t))^2\mathrm{d}t+\\&\quad c\int_0^1(u''(t))^2\mathrm{d}t+C_0\leqslant\\&\quad\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)\|u''\|_2^2+C_0.\end{aligned}$$

上式左边应用分部积分有

$$\begin{aligned}&\int_0^1|u''(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\\&\quad\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)\|u''\|_2^2+C_0.\end{aligned}$$

所以

$$\|u''\|_2^2\leqslant\frac{C_0}{1-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b-c}.$$

由 $H^2(I)$ 中范数的定义及引理 2.2 有

$$\begin{aligned}&\|u\|_{2,2}=\sqrt{\|u\|_2^2+\|u'\|_2^2+\|u''\|_2^2}\leqslant\\&\quad\sqrt{\frac{7C_0}{4\left(1-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b-c\right)}}.\end{aligned}$$

所以

$$\|u\|_{2,2}\leqslant\sqrt{\frac{7C_0}{4\left(1-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b-c\right)}}:=M_0,$$

即 u 在 $H^2(I)$ 中有界. 由嵌入 $H^2(I)C^1(I)$ 的有界性有

$$\|u\|_{C^1}\leqslant C'\|u\|_{2,2}\leqslant C'M_0:=M\tag{16}$$

其中 C' 为嵌入常数，

$$|\lambda f(t,x,y,z)|\leqslant|f(t,x,y,z)|\leqslant g_M(|z|)$$

满足 Nagumo 型增长条件(F2)且与 λ 无关. 由引理 2.3,存在常数 $M_1=M_1(M)>0$，使得 $\|u''\|_C\leqslant M_1$. 故由引理 2.3 及(16)式有

$$\begin{aligned}&\|u\|_{C^2}=\max\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\|u''\|_C\}\leqslant\\&\quad\max\{M,M_1\}:=M_2,\end{aligned}$$

即同伦簇方程(14)的解集在 $C^2(I)$ 中有界. 由 Leray-Schauder 不动点定理，A 在 $C^2(I)$ 中有不动点,该不动点为 BVP(1)的解. 证毕.

例 3.1　考虑如下完全三阶边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=u(t)-u'(t)+u''(t)-\\ \quad u'(t)(u''(t))^2,t\in I,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{17}$$

相应的非线性项 $f(t,x,y,z)=x-y+z-yz^2$ 满足条件(F1)及(F2). 容易验证

$$\begin{aligned}&f(t,x,y,z)y=xy-y^2+yz-y^2z^2\leqslant\\&\quad\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-y^2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}y^2-y^2z^2\leqslant\\&\quad\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2.\end{aligned}$$

由定理 1.1 可知,方程(17)式的解存在.

例 3.2　考虑如下完全三阶边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=u(t)-(u'(t))^5(u''(t))^2,\\ \quad t\in I,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{18}$$

相应的非线性项 $f(t,x,y,z)=x-y^5z^2$ 满足条件(F1)及(F2). 由定理 1.1 可知,方程 (18) 式的解存在.

参考文献:

[1]　Li S H. Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 413.

[2]　Sun Y P. Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2005, 306: 589.

[3]　Grossinho M D R, Minhos F M. Existence result for some third order separated boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2001, 47: 2407.

[4]　Cabada A. The method of lower and upper solutions for second, third, forth, and higher order boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 1994, 185: 302.

[5]　Du Z J, Ge W G, Lin X J. Existence of solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2004, 294: 104.

[6]　Hopkins B, Kosmatov N. Third-order boundary value problems with sign-changing solutions[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 67: 126.

[7] Yao Q L, Feng Y Q. The existence of solutions for a third-order two-point boundary value problem [J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 227.
[8] 张宏旺,李永祥.一类非线性三阶边值问题的单调迭代方法[J].西南大学学报:自然科学版,2009,31:34.
[9] Feng Y Q, Liu S Y. Solvability of a third-order two-point boundary value problem [J]. Appl Math Lett, 2005, 18: 1034.
[10] 姚庆六.线性增长限制下一类三阶边值问题的可解性[J].纯粹数学与应用数学,2005,21:164.
[11] 李涛涛.非线性三点边值问题正解的存在性[J].四川大学学报:自然科学版,2017,54:683.
[12] 葛渭高,郭玉芝.三阶非线性常微分方程两点边值问题解的存在性[J].系统科学与数学,1996,16:181.
[13] Sun Y P, Zhao M, Li S H. Monotone positive solution of nonlinear third-order two-point boundary value problem [J]. Miskolc Math Notes, 2014, 15: 743.

引用本文格式:
中 文:李菊鹏,李永祥.完全三阶边值问题解的存在性[J].四川大学学报:自然科学版,2018,55:688.
英 文:Li J P, Li Y X. Existence of solutions of a fully third-order boundary value problem [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 688.