

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.008

# Ornstein-Uhlenbeck 噪声驱动的 过阻尼广义 Langevin 方程的共振

钟苏川<sup>1</sup>, 彭皓<sup>2</sup>, 张路<sup>3</sup>

(1. 四川大学空天科学与工程学院空天信息处理与应用中心, 成都 610064;  
2. 西南交通大学数学学院, 成都 611756; 3. 四川大学数学学院, 成都 610064)

**摘要:** 本文研究了受外部周期信号激励的线性过阻尼广义 Langevin 方程的随机共振现象. 本文将系统内噪声建模为指数型关联 Ornstein-Uhlenbeck 噪声, 系统外噪声建模为双态噪声, 并利用随机平均法和积分变换算法推导出系统响应的一阶稳态矩和稳态响应振幅的解析表达式. 对解析结果的分析表明, 该线性过阻尼广义 Langevin 方程具有丰富的共振行为, 即系统的稳态响应振幅随噪声的特征参数、周期激励信号的频率及部分系统参数的变化而出现广义随机共振.

**关键词:** 广义 Langevin 方程; 线性过阻尼振子; Ornstein-Uhlenbeck 噪声; 随机共振

**中图分类号:** O29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)04-0698-07

## Resonance of an over-damped generalized Langevin equation driven by Ornstein-Uhlenbeck noise

ZHONG Su-Chuan<sup>1</sup>, PENG Hao<sup>2</sup>, ZHANG Lu<sup>3</sup>

(1. Center of Aerospace Information Processing and Application, College of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China;  
3. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** We explore the resonant behavior occurring in an over-damped linear generalized Langevin equation subject to a periodic force. We model the internal noise as an Ornstein-Uhlenbeck noise. The influence of fluctuations of environmental parameter on the system is modeled by a dichotomous noise. Using the stochastic average method and integral transform, we get the exact expressions of the steady-state first moment and amplitude. By studying the impacts of the noise parameters, driving frequency and system parameters, we find that the non-monotonic behaviors of the steady-state output amplitude indicate a lot of resonant behaviors and stochastic resonance (SR) in the wide sense.

**Keywords:** Generalized Langevin equation; Linear over-damped harmonic oscillator; Ornstein-Uhlenbeck noise; Stochastic resonance

收稿日期: 2017-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(11501386, 11401405, 11626197); 四川省科技厅项目基金(2017JY0219); 中央高校基本科研业务费专项基金(2682016CX120)

作者简介: 钟苏川(1986-), 女, 四川成都人, 博士, 主要研究方向为随机动力系统. E-mail: zsczsc48@hotmail.com

通讯作者: 张路. E-mail: zhanglumail@gmail.com

## 1 引言

上世纪 80 年代, Benzi 等<sup>[1-3]</sup>在研究第四纪冰川问题时提出了随机共振的概念. 他们用双稳态系统对天气系统进行建模, 将短期气候的随机波动用高斯白噪声来描述. 在一定强度的噪声调节下, 气候的周期响应与外加微弱周期驱动会实现同步, 这种现象被称为随机共振 (Stochastic Resonance, SR). 此后, 关于随机共振的理论和实验研究引起了人们极大的关注.

较早的研究普遍认为, 系统要产生随机共振必须满足非线性、周期激励和噪声这三个条件. 随着研究的深入, 即使上述三个条件不完全满足的系统也被观测到随机共振现象. 例如, 随机共振可以出现在由乘性色噪声驱动的线性系统中<sup>[4]</sup>, 甚至是白噪声激励的具有随机阻尼项的欠阻尼线性系统中<sup>[5,6]</sup>.

传统的随机共振是指系统响应的信噪比随噪声强度的非单调变化现象. 广义随机共振 (Generalized Stochastic Resonance, GSR) 的概念则是由 Gitterman 等提出的, 系指系统响应的某些函数 (如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等) 随系统的某些特征参数 (如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等) 非单调变化的现象<sup>[7,8]</sup>.

关于随机共振的研究大多关注外噪声情形. 此时, 噪声来源于外部环境, 与系统自身的动力学特性无关. 然而, 对于很多小尺度系统 (如活体细胞中的生化反应, 纳米尺度晶体表面上的催化反应等) 而言, 系统自身的涨落起着关键作用, 此时内噪声对系统动力学行为的影响必须加以考虑<sup>[9,10]</sup>. 特别地, 内噪声如何影响系统的动力学行为, 系统能否在内噪声的作用下出现随机共振或广义随机共振现象, 及共振现象产生的充分必要条件等问题都有待解决. 对于这些问题的研究也将为后续将随机共振理论用于参数估计和弱信号检测等提供基础.

在以往的研究中, 系统内噪声通常被建模为高斯白噪声, 此时粒子的均方位移为:  $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ , 即正常扩散. 然而, 当粒子在稠密的黏性流体、具有内部自由度的流体以及湍流中运动时, 粒子的均方位移是时间  $t$  的幂律非线性函数, 即  $\langle x^2(t) \rangle = 2D_0 t^\delta$ ,  $\delta \neq 1$ , 即反常扩散<sup>[11,12]</sup>. 反常扩散现象可以通过广义 Langevin 方程刻画.

实际上, 认为噪声在不同时刻不相关只是一种近似, 实际上真正的白噪声是不存在的. 具有非零

相关时间的噪声就是色噪声. 一种最简单的色噪声是奥恩斯坦-乌伦贝克 (Ornstein-Uhlenbeck, OU) 噪声, 它具有指数型关联函数<sup>[9,13,14]</sup>. 目前, 尚没有文献研究指数关联噪声驱动的广义 Langevin 方程的共振行为. 通过将外部环境扰动建模为能够解析求解的对称双态噪声, 计算稳态响应振幅的解析表达式, 我们讨论了 OU 噪声驱动的线性过阻尼广义 Langevin 方程的共振行为. 进一步, 根据获得的稳态响应振幅的解析表达式, 我们观察到系统的内、外噪声都会诱导出广义随机共振现象. 本文还给出了系统的稳态响应振幅关于外噪声的噪声强度能够诱导产生广义随机共振现象的充分必要条件. 由于文中推导得到的系统响应的解析表达式是未作任何近似的精确表达式, 因而结果不必限制在弱噪声和弱激励信号范围内, 适用于任意的噪声强度和周期信号的振幅、频率, 能解释更为广泛的物理现象.

## 2 模型

一个处于强噪声环境的线性过阻尼广义 Langevin 方程为<sup>[15,16]</sup>:

$$\gamma \int_0^t K(t-u) \dot{x}(u) du + [\omega^2 + Z(t)]x(t) = A_0 \sin(\Omega t) + F(t) \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  为单位质量粒子的位移,  $A_0$ 、 $\Omega$  为周期激励信号的振幅和频率,  $\omega^2$  为势阱的固有频率,  $\gamma > 0$  为阻尼系数. 随机力  $Z(t)$  为固有频率  $\omega^2$  受到的随机扰动, 本文将其视为外噪声, 建模为对称双态噪声<sup>[17-19]</sup>:  $Z(t)$  能取两个离散值  $\{-a, a\}$ ,  $a > 0$ , 取值的概率满足  $P_s(-a) = P_s(a) = 1/2$ ,  $Z(t)$  的均值和方差为:

$$\langle Z(t) \rangle = 0, \langle Z(t)Z(s) \rangle = a^2 \exp(-\nu |t-s|) \quad (2)$$

其中,  $a^2$  为噪声强度,  $\nu$  为噪声相关率.

双态噪声是一种简单而常见的色噪声, 具有相对简单的性质, 并且在极限条件 (噪声相关率  $\nu \rightarrow +\infty$ ) 时, 双态噪声将退化为高斯白噪声. 此外, 将双态噪声以乘性方式引入线性系统可得到一个精确可解的色噪声模型, 故在双态噪声作用下, 系统的动力学性质的研究具有普适的理论和实际意义<sup>[18,20,21]</sup>.

(1) 式中的  $K(t)$  为系统阻尼核函数,  $F(t)$  为粒子受到的热噪声, 满足涨落耗散定理<sup>[9,22]</sup>:

$$\langle F(t)F(s) \rangle = k_B T \cdot K(t-s) \quad (3)$$

其中  $k_B$  为波尔兹曼常数,  $T$  是介质温度.

在均匀介质中,粒子的运动轨迹是一个马尔科夫过程,对应的随机力  $F(t)$  应建模为高斯白噪声:  $\langle F(t) \rangle = 0$ ,  $\langle F(t)F(s) \rangle = k_B T \cdot \delta(t-s)$ . 此时,  $K(t) = \delta(t)$ , 从而广义 Langevin 方程退化为经典 Langevin 方程;而在非均匀介质中,扩散过程具有记忆性,粒子的运动轨迹是一个非马尔科夫过程,此时随机力  $F(t)$  应建模为色噪声. 本文选取的内噪声  $F(t)$  为零均值、指数型高斯色噪声,即 Ornstein-Uhlenbeck(OU)噪声<sup>[9,13,14]</sup>:

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0, \\ \langle F(t)F(s) \rangle &= \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $D$  为噪声强度,  $\tau$  为噪声关联时间.

需要说明的是,本文将双态噪声  $Z(t)$  视为系统外噪声,OU 噪声  $F(t)$  视为系统内噪声,假设  $Z(t)$  和  $F(t)$  不相关,即

$$\langle F(t)Z(s) \rangle = 0 \quad (5)$$

### 3 系统响应的一阶稳态矩及稳态响应振幅

将(1)式两边取平均,得到一阶矩  $\langle x(t) \rangle$  所满足的方程:

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^t K(t-u) \langle \dot{x}(u) \rangle du + \omega_0^2 \langle x(t) \rangle + \\ \langle Z(t)x(t) \rangle = A_0 \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\langle x(t) \rangle$  和  $\langle \dot{x}(t) \rangle$  满足

$$\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = \langle \dot{x}(t) \rangle \quad (7)$$

由于(6)式中出现了新的耦合项  $\langle Z(t)x(t) \rangle$ , 需要对该项解耦. 利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[23]</sup> 可得  $\langle Z(t)x(t) \rangle$  所满足的微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Z(t)x(t) \rangle = \\ \langle Z(t) \dot{x}(t) \rangle - \nu \langle Z(t)x(t) \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

此时(8)式中又出现了新的耦合项  $\langle Z(t) \dot{x}(t) \rangle$ , 需要继续寻找其所满足的方程. 将(1)式两边同时乘以  $Z(t)$  再取平均,获得最后一个封闭方程:

$$\begin{aligned} \gamma e^{-\nu t} \int_0^t K(t-u) \langle Z(u) \dot{x}(u) \rangle e^{\nu u} du + \\ \omega_0^2 \langle Z(t)x(t) \rangle + a^2 \langle x(t) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

综上,(6)~(9)式构成关于  $x_1 = \langle x(t) \rangle$ ,  $x_2 = \langle \dot{x}(t) \rangle$ ,  $x_3 = \langle Z(t)x(t) \rangle$ ,  $x_4 = \langle Z(t) \dot{x}(t) \rangle$  的方程组. 由 Laplace 变换有

$$\begin{cases} \omega_0^2 X_1(s) + \gamma \tilde{K}(s) X_2(s) + X_3(s) = \frac{A_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2}, \\ s X_1(s) - X_2(s) = x_1(0), \\ (s + \nu) X_3(s) - X_4(s) = x_3(0), \\ a^2 X_1(s) + \omega_0^2 X_3(s) + \gamma \tilde{K}(s + \nu) X_4(s) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x_1(0), x_3(0)$  为初值条件,  $X_i(s) = \int_0^{+\infty} x_i(t) e^{-st} dt, i = 1, 2, 3, 4$ .

本文选取内噪声  $F(t)$  为 OU 噪声,利用涨落耗散定理(3)式,不难由 OU 噪声的自相关函数((4)式)推导出此时阻尼核函数  $K(t)$  的 Laplace 域表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s) = \int_0^{+\infty} K(t) e^{-st} dt = \\ \frac{D}{k_B T (1 + \tau s)} \triangleq \frac{\tilde{D}}{1 + \tau s} \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\tilde{D} = D/(k_B T)$  称为广义噪声强度.

由(10)式看出,系统响应的一阶矩所满足的方程在  $s$  域为一个四元非齐次线性方程组,解方程组可得  $X_i(s), i = 1, 2, 3, 4$  的解析表达式:

$$\begin{aligned} X_1(s) = \tilde{H}_{11}(s) \frac{A_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2} + [\tilde{H}_{12}(s) x_1(0) + \\ \tilde{H}_{13}(s) x_3(0)] \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)式作逆 Laplace 变换,得系统响应一阶矩  $x_1 = \langle x(t) \rangle, x_2 = \langle \dot{x}(t) \rangle, x_3 = \langle Z(t)x(t) \rangle, x_4 = \langle Z(t) \dot{x}(t) \rangle$  解析表达式为:

$$\begin{aligned} x_i(t) = A_0 \int_0^t H_{i1}(t-u) \sin(\Omega u) du + \\ [H_{i2}(t) x_1(0) + H_{i3}(t) x_3(0)] \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\hat{H}_k(s) = \int_0^\infty H_k(t) e^{-st} dt$  为  $H_k(t)$  的 Laplace 变换,而  $\tilde{H}_k(s)$  可以通过(10)式确定. 特别地,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{11}(s) = [(s + \nu) \gamma \tilde{K}(s + \nu) + \omega_0^2] \times \\ \{ [\gamma s \tilde{K}(s) + \omega_0^2] [(s + \nu) \gamma \tilde{K}(s + \nu) + \omega_0^2] - a^2 \}^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

为保证(13)式所给出的系统响应一阶矩的稳定性(意味着  $H_k(s) = 0, k = 1, 2, 3$  不能有正实根),系统参数需满足如下不等式<sup>[8]</sup>:

$$a^2 < a_{cr}^2 = \omega_0^2 [\gamma \nu \tilde{K}(\nu) + \omega_0^2] \quad (15)$$

本文的后续都是基于(15)式成立的情况进行讨论的. 当  $t \rightarrow \infty$  时,初始条件对系统响应的影响将逐渐消失,则系统响应的一阶稳态矩为:

$$(x(t))_{as} = (x(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty} = A_1 \sin(\Omega t + \bar{\omega}_1) \quad (16)$$

其中  $A_1$  和  $\varphi_1$  为系统响应一阶稳态矩  $\langle x(t) \rangle_{as}$  的

振幅和相移,  $A_1$  又称为系统稳态响应振幅, 它们可根据  $\tilde{H}_{11}(s)$  的表达式获得:

$$A_1 = A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}} \tan \bar{\omega}_1 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{D}\gamma v + \omega_0^2(1 + \tau v) - \Omega^2(\tilde{D}\gamma\tau + \omega_0^2\tau^2), \\ f_2 &= \Omega[\tilde{D}\gamma(1 + \tau v) + \omega_0^2(2\tau + \tau^2 v)], \\ f_3 &= \tilde{D}\omega_0^2\gamma v + (\omega_0^4 - a^2)(1 + \tau v) - \\ &\quad \Omega^2[(\tilde{D}\gamma)^2 + 2\tilde{D}\omega_0^2\gamma\tau + (\omega_0^4 - a^2)\tau^2], \\ f_4 &= \Omega[(\tilde{D}\gamma)^2 v + 2\tilde{D}\omega_0^2\gamma(1 + \tau v) + \\ &\quad (\omega_0^4 - a^2)(2\tau + \tau^2 v)]. \end{aligned}$$

## 4 讨论

### 4.1 系统稳态响应振幅 $A_1$ 关于 OU 噪声 (内噪声) 参数的共振行为

根据推导获得的稳态响应振幅  $A_1$  ((17)式),

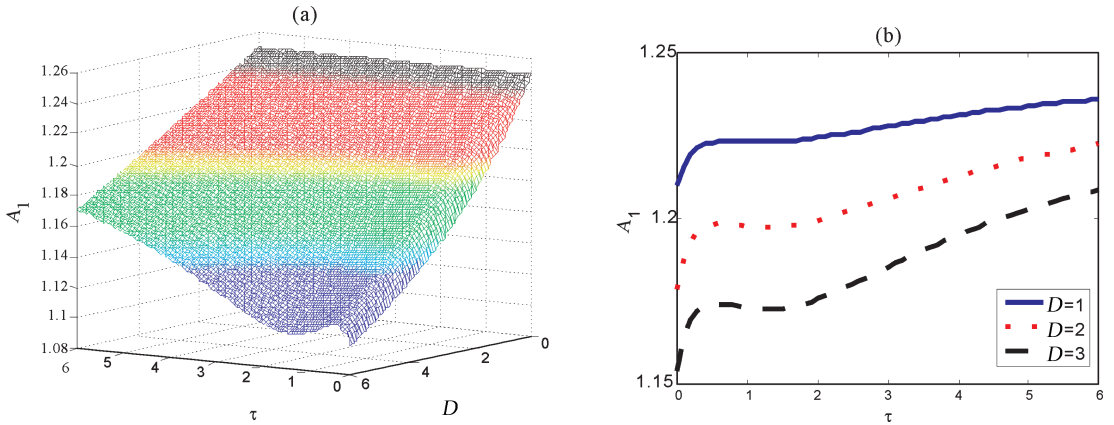


图 1 (a) 稳态响应振幅  $A_1$  作为 OU 噪声  $F(t)$  的噪声强度  $D$  和关联时间  $\tau$  的函数所对应的 3D 曲面图, 参数为  $A_0 = 1, \Omega = 0.5, \omega = 1, k_B T = 1, \gamma = 0.05, a^2 = 0.2, v = 3$ ; (b) 给定 OU 噪声强度  $D$  取值下稳态响应振幅  $A_1$  随 OU 噪声相关时间  $\tau$  的变化曲线, 其他参数同图 1(a).

Fig. 1 (a) The output amplitude  $A_1$  as the function of  $D$  and  $\tau$  of the internal OU noise  $F(t)$ , the other parameters are  $A_0 = 1, \Omega = 0.5, \omega = 1, k_B T = 1, \gamma = 0.05, a^2 = 0.2, v = 3$ ; (b) The output amplitude  $A_1$  as the function of  $\tau$  with different values of noise intensity  $D$ .

### 4.2 系统稳态响应振幅 $A_1$ 关于双态噪声 (外噪声) 参数的共振行为

在分析了系统稳态响应振幅  $A_1$  关于系统内噪声  $F(t)$  参数  $D, \tau$  的共振行为后, 我们继续研究  $A_1$  关于系统外噪声  $Z(t)$  (双态噪声) 强度  $a^2$  和相关率  $v$  的共振行为. 图 2 (a)~(c) 分别给出了对应的 3D 曲面图和对应用于噪声强度  $a^2$  和相关率  $v$  的投影曲线图. 从图 2(a) 可以看出, 稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  和相关率  $v$  都能表现出明显的

我们在图 1(a)和(b)中分别给出了  $A_1$  作为 OU 噪声  $F(t)$  (内部噪声) 的噪声强度  $D$  和关联时间  $\tau$  的函数所对应的 3D 曲面图和对对应到不同噪声强度 ( $D = 1, D = 2, D = 3$ ) 下的投影曲线图  $A_1(\tau)$ . 从图 1 可以看出, 对于任意给定的内噪声强度  $D$ , 随着内噪声关联时间  $\tau$  的变化, 稳态响应振幅的曲线表现出了典型的非单调变化, 这意味着广义随机共振现象产生了. 具体地, 随着 OU 噪声相关时间  $\tau$  的增加, 稳态响应振幅  $A_1(\tau)$  增大到极大值 (波峰相) 随后又达到极小值 (波谷相), 这种现象被称为波峰-波谷共振行为. 进一步, 随着 OU 噪声强度  $D$  的增大, 这种波峰-波谷共振行为表现的更加明显. 同时, 随着 OU 噪声强度  $D$  的减小 (如  $D = 1$ ), 波峰-波谷共振行为逐渐退化为传统的单峰共振行为.

非单调变化曲线, 即系统能够出现广义随机共振现象. 进一步地, 根据图 2 (b)和(c)可以看出, 随着外噪声相关率  $v$  的增加 ( $v = 0.05, v = 0.1, v = 0.2$ ),  $A_1(a^2)$  的共振峰逐渐平缓, 直至消失. 这说明此时只有较小的噪声相关率能够诱导显著的单峰共振现象. 同时, 随着外噪声强度  $a^2$  的增加 ( $a^2 = 0.1, a^2 = 0.4, a^2 = 0.8$ ),  $A_1(v)$  的共振行为更加明显, 共振峰的峰值  $A_{1, \max}(v)$  增加, 对应峰值点位置右移.

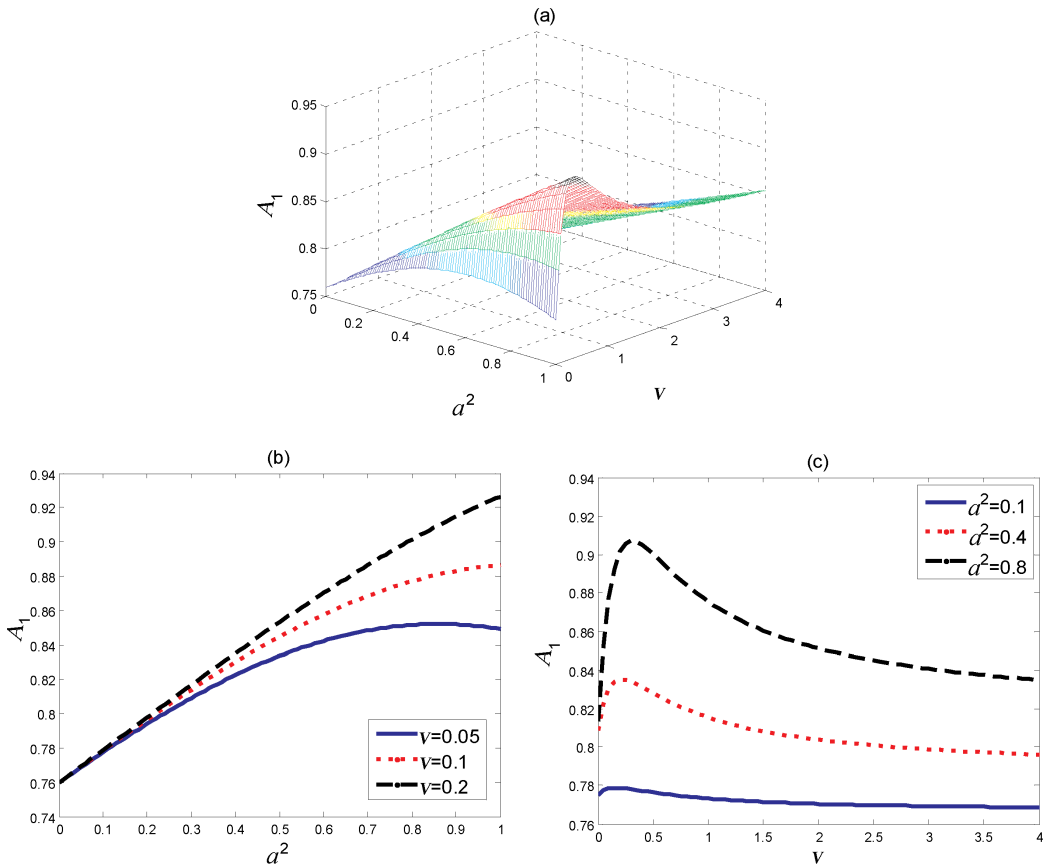


图 2 (a) 稳态响应振幅  $A_1$  作为双态噪声  $Z(t)$  的噪声强度  $a^2$  和相关率  $v$  的函数所对应的 3D 曲面图, 参数为  $A_0 = 1, \Omega = 0.2, \omega = 1, k_B T = 1, \gamma = 2.5, D = 1.5, \tau = 0.6$ ; (b) 给定  $Z(t)$  噪声相关率  $v$  取值下稳态响应振幅  $A_1(a^2)$  变化曲线, 其他参数同图 2(a); (c) 给定  $Z(t)$  噪声强度  $a^2$  取值下稳态响应振幅  $A_1(v)$  变化曲线, 其他参数同图 2(a).

Fig. 2 (a) The output amplitude  $A_1$  as the function of  $a^2$  and  $v$  of the external dichotomous noise  $Z(t)$ , the other parameters are:  $A_0 = 1, \Omega = 0.2, \omega = 1, k_B T = 1, \gamma = 2.5, D = 1.5, \tau = 0.6$ ; (b) The output amplitude  $A_1$  as the function of  $a^2$  with different values of noise correlation rate  $v$ ; (c) The output amplitude  $A_1$  as the function of  $v$  with different values of noise intensity  $a^2$ .

#### 4.3 系统稳态响应振幅 $A_1$ 关于双态噪声(外噪声)噪声强度 $a^2$ 共振行为的进一步分析

根据上面的讨论, 系统稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  的共振行为依赖于系统参数的选取. 同时, 考虑到本文所讨论的模型共振行为能够被控制的主要因素是调整噪声强度  $a^2$ , 因而在本节我们将根据(17)式所给出的系统稳态响应振幅  $A_1$  的表达式分析系统稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  能够诱导产生共振行为的充分必要条件.

根据(17)式, 系统稳态响应振幅  $A_1(a^2)$  在  $a_m^2$  处达到极大值,

$$a_m^2 = \frac{g_2 \tau \Omega (2 + \tau v) + g_1 (1 + \tau v - \Omega^2 \tau^2)}{(1 + \tau v - \Omega^2 \tau^2)^2 + \tau^2 \Omega^2 (2 + \tau v)^2} \quad (18)$$

其中

$$g_1 = \omega_0^2 \gamma \tilde{D} (v - 2\tau \Omega^2) - (\gamma \tilde{D} \Omega)^2 + \omega_0^4 (1 + \tau v - \Omega^2 \tau^2),$$

$$g_2 = 2\omega_0^2 \gamma \tilde{D} \Omega (1 + \tau v) + (\gamma \tilde{D})^2 \Omega v + \omega_0^4 \tau \Omega (2 + \tau v).$$

根据共振的稳定性条件((15)式)可推导得此时稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  能够诱导产生广义随机共振的充分必要条件为

$$0 < a_m^2 < a_{\sigma}^2 \quad (19)$$

图 3 给出的是根据共振的充分必要条件(19)式在参数空间  $\tau \gamma$  上做的相图. 图中灰色区域对应的参数  $\tau$  和  $\gamma$  取值能够诱导系统的稳态响应振幅  $A_1$  产生共振行为, 白色区域对应的参数  $\tau$  和  $\gamma$  取值组合无法诱导  $A_1$  产生随机共振行为. 从图 3 可以看出, 稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  能够产生随机共振现象非常依赖系统参数取值的选取.

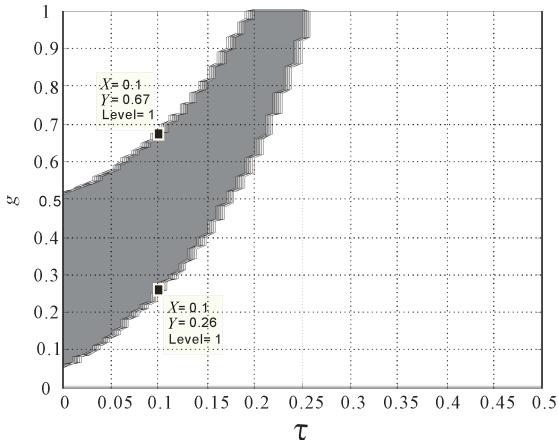


图 3 系统稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  能够诱导产生广义随机共振现象对应于  $\tau\gamma$  平面的相图, 参数  $\omega^2 = 1, k_B T = 1, \Omega = 2, D = 1, v = 0.1$ .

Fig. 3 The phase diagrams for SR phenomenon of  $A_1(a^2)$  in the  $\tau\gamma$  plane with the other parameters  $\omega^2 = 1, k_B T = 1, \Omega = 2, D = 1, v = 0.1$ .

图 4 给出的是其他参数同图 3 所取时稳态响应振幅  $A_1(a^2)$  针对不同阻尼系数  $\gamma$  取值下的曲线图. 此时, 根据图 3 给出的稳态响应振幅  $A_1(a^2)$  能够诱导共振行为的阻尼系数  $\gamma$  的取值范围为  $[0.26, 0.67]$ . 对应图 4 的模拟结果, 当阻尼系数  $\gamma = 0.3$  和  $\gamma = 0.4$  ( $\gamma$  的取值落入能够诱导共振行为的参数范围) 时, 对应的稳态相应振幅曲线  $A_1(a^2)$  表现出先增大后减小的非单调变换过程, 也即典型的随机共振行为. 此外, 当  $\gamma = 0.1$  和  $\gamma = 0.8$  ( $\gamma$  的取值未落入能够诱导共振行为的参数范围) 时, 从模拟结果看, 对应的稳态相应振幅曲线  $A_1(a^2)$  呈现出严格单调的变化趋势, 即此时系统不能诱导随机共振行为产生. 从模拟结果看来, 我们给出的稳态相应振幅曲线  $A_1(a^2)$  能够有诱导产生随机共振行为的相图是可靠的, 这也为后续产生和利用随机共振现象提供了坚实的理论基础.

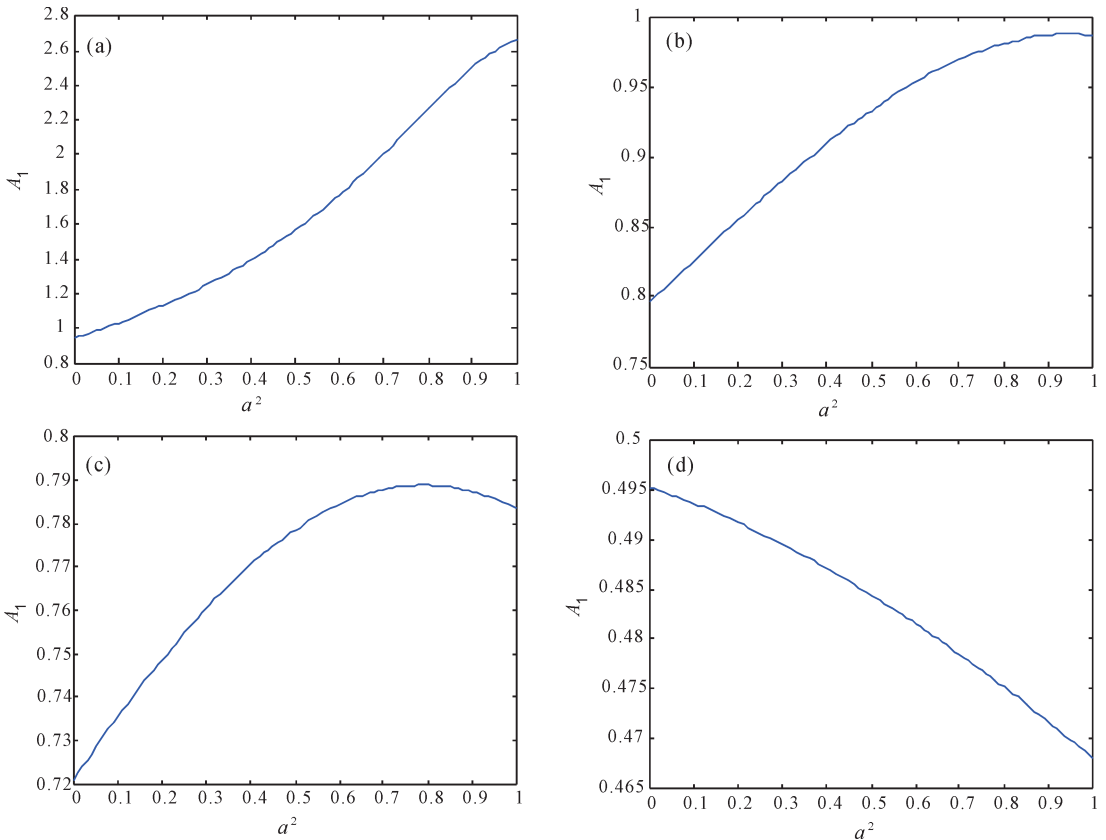


图 4 不同的阻尼系数  $\gamma$  取值下, 系统稳态响应振幅  $A_1$  关于外噪声强度  $a^2$  的变化曲线图, 对应参数为:  $\omega^2 = 1, k_B T = 1, \Omega = 2, D = 1, v = 0.1, \tau = 0.1$ , (a)  $\gamma = 0.1$ ; (b)  $\gamma = 0.3$ ; (c)  $\gamma = 0.4$ ; (d)  $\gamma = 0.8$ .

Fig. 4 The output amplitude  $A_1$  as the function of noise intensity  $a^2$  with different values of damping coefficient  $\gamma$ , the other parameters are:  $\omega^2 = 1, k_B T = 1, \Omega = 2, D = 1, v = 0.1, \tau = 0.1$ , (a)  $\gamma = 0.1$ ; (b)  $\gamma = 0.3$ ; (c)  $\gamma = 0.4$ ; (d)  $\gamma = 0.8$ .

## 5 结 论

本文研究了周期激励信号作用下的线性过阻尼广义 Langevin 方程受 Ornstein-Uhlenbeck 噪声激励下的共振行为,通过随机平均法和积分变换算法本文推导了系统响应一阶稳态矩和稳态响应振幅的精确表达式(17)式,讨论了稳态响应振幅关于噪声强度能够诱导共振行为的充分必要条件(19)式,并验证了其有效性,从而为后续将该随机共振现象用于工程实际应用提供基础。

### 参考文献:

- [1] Benzi R, Suter A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance [J]. *J Phys A: Math Theor*, 1981, 14: 453.
- [2] Benzi R, Parisi G, Suter A, *et al.* Stochastic resonance in climatic change [J]. *Tellus*, 1982, 34: 10.
- [3] Nicolis C. Stochastic aspects of climatic transitions response to a periodic forcing [J]. *Tellus*, 1982, 34: 1.
- [4] 王传毅,任芮彬,邓科,周期调制噪声驱动的具质量涨落的欠阻尼谐振子的随机共振[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2016, 53: 1183.
- [5] Berdichevsky V, Gitterman M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise [J]. *Phys Rev E*, 1999, 60: 1494.
- [6] Li J H, Han Y X. Phenomenon of stochastic resonance caused by multiplicative asymmetric dichotomous noise [J]. *Phys Rev E*, 2006, 74: 051115.
- [7] Gitterman M. Harmonic oscillator with fluctuating damping parameter [J]. *Phys Rev E*, 2004, 69: 041101.
- [8] Gitterman M. Classical harmonic oscillator with multiplicative noise [J]. *Physica A*, 2005, 352: 309.
- [9] 包景东. 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [10] 龚玉兵, 侯中怀, 辛厚文. 色噪声性质对一氧化氮还原反应体系随机共振的影响 [J]. *高等学校化学学报*, 2005, 26: 2331.
- [11] Klafter J, Sokolov I M. Anomalous diffusion spreads its wings [J]. *Phys World*, 2005, 18: 29.
- [12] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach [J]. *Phys Rep*, 2000, 339: 1.
- [13] Peter R. Thermally activated escape with potential fluctuations driven by an Ornstein-Uhlenbeck process [J]. *Phys Rev E*, 1995, 1579: 1.
- [14] Cabrera J L, Gorrongoitia J, de la Rubia F J. Coherence enhancement in nonlinear systems subject to multiplicative Ornstein-Uhlenbeck noise [J]. *Phys Rev E*, 2002, 66, 022101.
- [15] Kou S C. Stochastic modeling in nanoscale biophysics: subdiffusion within proteins [J]. *Ann Appl Stat*, 2008, 2: 501.
- [16] Kou S C, Xie X S. Generalized Langevin equation with fractional gaussian noise: subdiffusion within a single protein molecule [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 180603.
- [17] Gitterman M. Harmonic oscillator with multiplicative noise: nonmonotonic dependence on the strength and the rate of dichotomous noise [J]. *Phys Rev E*, 2003, 67: 057103.
- [18] Laio F, Ridolfi L, D'Odorico P. Noise-induced transitions in state-dependent dichotomous processes [J]. *Phys Rev E*, 2008, 78: 031137.
- [19] Xu Y, Wu J, Zhang H Q, *et al.* Stochastic resonance phenomenon in an underdamped bistable system driven by weak asymmetric dichotomous noise [J]. *Nonlinear Dynam*, 2012, 70: 531.
- [20] Bena I, Van den Broeck C, Kawai R, *et al.* Nonlinear response with dichotomous noise [J]. *Phys Rev E*, 2002, 66: 045603.
- [21] Bena I. Dichotomous markov noise: exact results for out-of-equilibrium systems [J]. *Int J Mod Phys B*, 2006, 20: 2825.
- [22] 张季谦, 辛厚文. 噪声在非线化学体系中作用的研究现状 [J]. *化学进展*, 2001, 13: 241.
- [23] Shapiro V E, Loginov V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations [J]. *Physica A*, 1978, 91: 563.

### 引用本文格式:

中文: 钟苏川, 彭皓, 张路. 过阻尼广义 Langevin 方程的共振 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2018, 55: 698.

英文: Zhong S C, Peng H, Zhang L. Resonance of an over-damped generalized Langevin equation driven by Ornstein-Uhlenbeck noise [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2018, 55: 698.