2018 年 7 月 四川大学学报(自然科学版) Jul. 2018
第 55 卷 第 4 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 55 No. 4

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.004

带两个区域的平面分段光滑系统的非双曲极限环分岔

袁丽萍
（四川大学数学学院，成都 610064）

摘 要：本文讨论了一类含有两条切换线的平面分段光滑系统的非双曲极限环的分岔. 假设该系统的未扰系统含有一个非双曲极限环且它分别与每一条切换线横截相交一次，本文应用 Diliberto 定理和由此引出的变分引理导出了极限环的 Poincaré 映射，并讨论了极限环的稳定性及其在扰动下的分岔.

关键词：分段光滑系统；非双曲极限环；分岔；Poincaré 映射
中图分类号：O175.14 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)04-0678-05

Bifurcation of nonhyperbolic limit cycles in piecewise smooth planar systems with two zones

YUAN Li-Ping
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper we consider the bifurcation of nonhyperbolic limit cycles in a class of piecewise smooth planar systems with two zones. We assume that the unperturbed system has a nonhyperbolic limit cycle that crosses every switching line transversally exactly once. By using the Diliberto theorem and variation lemma we derive the Poincaré map. Then we discuss the stability and bifurcation of the limit cycle.

Keywords: Piecewise smooth system; Nonhyperbolic limit cycle; Bifurcation; Poincaré map
(2010 MSC 37G15)

1 引 言

应用科学和工程领域的许多问题往往归结为分段光滑动力系统(PWS 系统)，如控制理论中的继电反馈系统，电学中的开关电路系统[1]，汽车的刹车系统和工程力学中的碰撞系统[2]等. 非光滑性使得 PWS 系统的分岔现象比光滑系统更复杂，而经典的分岔理论又依赖于系统的光滑性，因而不适用于 PWS 系统. 近年来，关于非光滑动力系统的分岔理论研究越来越受到人们的重视[3-8].

与光滑动力系统一样，判别 PWS 系统的极限环个数和稳定性非常重要，近年来已成为一个研究热点问题. 在文献[9]中，Du，Li，Zhang 研究了一类带一条切换线的平面 Filippov 系统由周期环域分岔出极限环的问题，其中周期轨仅与切换线横截相交一次. 在文献[10]中，Du，Li 研究了当系统有一条切换线且闭轨与该切换线横截相交多次时平面 Filippov 系统的周期环域分岔问题. 在文献[11]中，Hu，Du 研究了一类有有限多条切换线的 PWS 系统由周期环域分岔出极限环的问题.

在现有的研究工作中，研究对向基本上都是双曲极限环. 文献[9]虽然也讨论了极限环为非双曲

收稿日期：2017-12-11
基金项目：国家自然科学基金(11371264)
作者简介：袁丽萍(1988－)，女，广西贺州人，硕士，主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail：haiylp@qq.com

时的情况，但切换线仅为一条直线. 本文在文献[9]的基础上进一步讨论了一类含有两条从原点出发的切换线的 PWS 系统的非双曲极限环的分岔. 我们用 Melnikov 函数法得到两个可判别极限环稳定性和个数的常数. 在本文中，两条切换线不一定共线，因而推广了文献[9]工作.

2　预备知识

令 I 表示 2 阶单位矩阵. 对于 $\mathbf{R}^2$ 中的任意两个向量 $a=(a_1,a_2)^T$ 和 $b=(b_1,b_2)^T$，定义 $a\wedge b=a_1b_2-a_2b_1$，$\langle a,b\rangle=a^Tb$，$\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}$，$a^{\perp}=(-a_2,a_1)^T$. 对二阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2)^T$（其中 α_1,α_2 是列向量），定义 $a\wedge A=(a\wedge\alpha_1,a\wedge\alpha_2)$. 另外，对于 $x\in\mathbf{R}^2$，光滑向量场 $X(x)$ 的散度和旋度分别记为 $\mathrm{div}X$ 和 $\mathrm{curl}X$.

假定 $\mathbf{R}^2$ 被从原点出发的两条射线 Σ_1,Σ_2 分成两个互不相交的区域，其中 $\Sigma_k=\{x\in\mathbf{R}^2:c_k^Tx=0\}(k=1,2)$，$c_k^T\in\mathbf{R}^2$ 是一个常向量且 $\|c_k\|=1$. 定义 θ_k 为直角坐标系中射线 Σ_k 与第一个坐标轴之间的夹角，且 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<2\pi$，并定义两条射线之间的夹角为 β_1，则有 $\theta_2=\theta_1+\beta_1$，$c_k^T=(\sin\theta_k,-\cos\theta_k)$ $(k=1,2)$. 令 Σ_1 与 Σ_2 之间夹角为 β_1 的开区域为 D_1，夹角为 $2\pi-\beta_1$ 的开区域为 D_2.

考虑如下平面分段光滑系统

$$\dot{x}=g_k(x)+\varepsilon f_k(x),x\in D_k,k=1,2 \tag{1}$$

其中我们假设存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll1$. 当 $\varepsilon=0$ 时，系统(1)的未扰动系统有如下形式

$$\dot{x}=g_k(x),x\in D_k,k=1,2 \tag{2}$$

由定义可知，系统(1)和(2)在切换线 Σ_1,Σ_2 上不一定连续. 对于 $\xi_k\in D_k\cup\Sigma_k(k=1,2)$，令 $x_\varepsilon^k(t;\xi_k)$（或者 $x_0^k(t;\xi_k)$）为系统(1)（或者(2)）满足初始条件 $x_\varepsilon^k(0;\xi_k)=\xi_k$（或者 $x_0^k(0;\xi_k)=\xi_k$）的解. 我们假设：

(H1) $g_k,f_k\in C^3(D_k\cup\Sigma_k\cup\Sigma_{k+1},\mathbf{R}^2)$ $(k=1,2)$，并且 $\Sigma_3=\Sigma_1$；

(H2) 假设未扰动系统(2)有一个极限环 Γ，Γ 依次与 Σ_1,Σ_2 横截相交并且只相交一次；

(H3) Γ 与切换线 Σ_1,Σ_2 逆时针相交. 对于 $k=1,2$，在区域 D_k 内，从 $\xi_\Gamma^k\in\Sigma_k$ 出发，经过时间 T_Γ^k 后极限环 Γ 与 Σ_{k+1} 相交于 $\xi_\Gamma^{k+1}\in\Sigma_{k+1}$，并令 Γ 在 D_k 内的分支记为 $\Gamma_k=\{x_0^k(t;\xi_\Gamma^k):0\leqslant t\leqslant T_\Gamma^k\}$. 这里我们假设 $\Sigma_3=\Sigma_1$，$\xi_\Gamma^3=\xi_\Gamma^1$.

由解对参数的连续依赖性，取切换线 Σ_1 上 Γ 的起始 ξ_Γ^1 的一个开邻域 Σ 和一个 $\bar{\varepsilon}\in(0,\varepsilon_0)$，使得对任意 $\varepsilon\in\Lambda:(-\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon})$，系统(1)和(2)的轨道从 Σ 出发逆时针地依次横截相交穿越切换线 Σ_1,Σ_2，且在轨道经过有限时间后首次返回 Σ 之前与 Σ_2 只相交一次. 我们取 Σ 作为 Poincaré 截面，定义系统(1)的 Poincaré 映射 $P:\Sigma\times\Lambda\to\Sigma$ 如下：选取 ξ_Γ^k 在 Σ_k 上的一个开邻域 $\Omega_k(k=1,2)$，使得任意 $\varepsilon\in\Lambda$，系统(1)在区域 D_k 内的子系统的流将 Ω_k 变换为 Ω_{k+1}，这里 $\Omega_3=\Omega_1=\Sigma$. 因此，对每个 $k(k=1,2)$ 和任意 $\varepsilon\in\Lambda$，可以定义一个映射 $P_{k,\varepsilon}:\Omega_k\to\Omega_{k+1}$. 显然，对于任意 $\varepsilon\in\Lambda$ 和 $\xi\in\Sigma$，有 $P(\xi,\varepsilon)=P_{2,\varepsilon_0}P_{1,\varepsilon}(\xi)$.

对于 Γ，我们引入

$$\delta_{\Gamma,k}:=\frac{c_k^Tg_k(\xi_\Gamma^k)}{c_k^Tg_{k-1}(\xi_\Gamma^k)},k=1,2.$$

当 $k=1,2$ 时，Γ 与 Σ_k 横截相交意味着 $c_k^Tg_k(\xi_\Gamma^k)$ 和 $c_k^Tg_{k-1}(\xi_\Gamma^k)$ 非零. 因此，$\delta_{\Gamma,k}$ 是有定义的而且不为零. 更进一步地，由于 Γ 逆时针与 Σ_1,Σ_2 横截相交，因此 $\delta_{\Gamma,k}>0(k=1,2)$.

定义 $\lambda_\Gamma=\lambda_{\Gamma,1}\cdot\lambda_{\Gamma,2}$，其中

$$\lambda_{\Gamma,k}:=\delta_{\Gamma,k}\exp\left(\int_0^{T_\Gamma^k}\mathrm{div}\,g_k(x_0^k(t;\xi_\Gamma^k))\mathrm{d}t\right).$$

当 $k=1,2$ 时，由于 $\delta_{\Gamma,k}>0$，我们有 $\lambda_{\Gamma,k}>0$，从而 $\lambda_\Gamma>0$. 由文献[5,11]可知，λ_Γ 在判别 Γ 的稳定性时是很重要的：当 $\lambda_\Gamma<1$ 时，Γ 是渐近稳定的；当 $\lambda_\Gamma>1$ 时，Γ 是不稳定的. 更进一步地，当 $\lambda_\Gamma\neq1$ 时，对于充分小的 $|\varepsilon|$，系统(1)在 Γ 附近有唯一的极限环 Γ_ε，且稳定性和 Γ 保持一致. 当 $\lambda_\Gamma\neq1$ 时，我们称 Γ 是双曲的；当 $\lambda_\Gamma=1$ 时，我们称 Γ 是非双曲的. 在本文中，我们将讨论 $\lambda_\Gamma=1$ 时的情形，即当极限环 Γ 是非双曲时的稳定性和分岔情况.

引理 2.1（Diliberto 定理[12]）　假设 $F\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$，$F(p)\neq0$，$x(t;p)(x\in\mathbf{R}^2)$ 是方程 $\dot{x}=F(x)$ 满足初值条件 $x(0;p)=p(p\in\mathbf{R}^2)$ 的解. 则满足初始条件 $V(0)=0$ 的线性方程 $\dot{V}=DF(x(t;p))V$ 有一个如下形式的基解矩阵

$$\Psi(t;p)=$$

$$\left(F(x(t;p)),\frac{(F(x(t;p)))^{\perp}}{\|F(x(t;p))\|^2}\right)\begin{pmatrix}1&\alpha(t,p)\\0&\beta(t,p)\end{pmatrix},$$

其中

$$\beta(t,p)=\exp\left(\int_0^t divF(x(s;p))\mathrm{d}s\right),$$

$$\alpha(t,p)=$$

$$\int_0^t\left\{\frac{2\kappa(s,p)\|F(x(s;p))\|-\mathrm{curl}F(x(s;p))}{\|F(x(s;p))\|^2}\right\}\cdot\beta(s,p)\mathrm{d}s,$$

$$\kappa(t,p)=\frac{1}{\|F(x(t;p))\|^3}F(x(t;p))\wedge DF(x(t;p))F(x(t;p)).$$

对于 $k=1,2$, 令 $\Psi_k(t;\xi_\Gamma^k)$ 为 Diliberto 定理中变分方程 $\dot{x}=Dg_k(x_0^k(t;\xi_\Gamma^k))x$ 的基解矩阵. 则以下方程的解

$$\dot{\Phi}_{k,1}(0;\xi_\Gamma^k)=Dg_k(x_0^k(t;\xi_\Gamma^k))\Phi_{k,1}(0;\xi_\Gamma^k),\quad \Phi_{k,1}(0;\xi_\Gamma^k)=I \tag{3}$$

为 $\Phi_{k,1}(t;\xi_\Gamma^k)=\Psi_k(t;\xi_\Gamma^k)(\Psi_k(0;\xi_\Gamma^k))^{-1}$. 令 D^2g_1 (或 D^2g_2) 为 g_1 (或 g_2) 的二阶 Fréchet 导数. 对于 $k=1,2$, 令

$$\psi_k(t;\xi_\Gamma^k)=D^2g_k(x_0^k(t;\xi_\Gamma^k))[\Phi_{k,1}(t;\xi_\Gamma^k)c_k^\perp]^2,$$

$$V_k(T_\Gamma^k;\xi_\Gamma^k)=-\frac{c_{k+1}^T\Phi_{k,1}(T_\Gamma^k;\xi_\Gamma^k)c_k^\perp}{c_{k+1}^Tg_k(\xi_\Gamma^{k+1})}\cdot\{Dg_k(\xi_\Gamma^{k+1})[\lambda_{\Gamma,k}c_{k+1}^\perp+\Phi_{k,1}(T_\Gamma^k;\xi_\Gamma^k)c_k^\perp]\},$$

$$z_k(t;\xi_\Gamma^k)=\int_0^t g_k(x_0^k(s;\xi_\Gamma^k))\wedge\psi_k(s;\xi_\Gamma^k)\cdot\exp\left(\int_s^t\mathrm{div}\,g_k(x_0^k(\tau;\xi_\Gamma^k))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

定义

$$\omega_\Gamma=\lambda_{\Gamma,2}\frac{g_1(\xi_\Gamma^2)\wedge V_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)+z_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{c_2^Tg_1(\xi_\Gamma^2)}+\frac{g_2(\xi_\Gamma^3)\wedge V_2(T_\Gamma^2;\xi_\Gamma^2)+z_2(T_\Gamma^2;\xi_\Gamma^2)}{c_1^Tg_2(\xi_\Gamma^3)}(\lambda_{\Gamma,1})^2,$$

$$Y_\Gamma=\lambda_{\Gamma,2}Y_{\Gamma,1}+Y_{\Gamma,2},$$

其中

$$Y_{\Gamma,k}=\int_0^{T_\Gamma^k}g_k(x_0^k(s;\xi_\Gamma^k))\wedge f_k(x_0^k(s;\xi_\Gamma^k))\cdot\exp\left(\int_s^{T_\Gamma^k}\mathrm{div}\,g_k(x_0^k(\tau;\xi_\Gamma^k))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

3 主要结果

定理 3.1 令系统(2)满足条件(H1~H3),且极限环 Γ 是非双曲的,即 $\lambda_\Gamma=1$. 则当 $\omega_\Gamma\neq0$ 时,该极限环是半稳定的:当 $\omega_\Gamma<0$ (或 $\omega_\Gamma>0$)时,极限环 Γ 的外部是稳定(或不稳定)的,且它的内部是不稳定(或稳定)的. 更进一步地,如果 $\omega_\Gamma\neq0$,则对于充分小的 $|\varepsilon|$,系统(1)从 Γ 最多能分岔出两个极限环. 如果还有 $Y_\Gamma\neq0$,则 Γ 发生鞍—结分岔:若 $\omega_\Gamma\cdot Y_\Gamma\cdot c_1^Tg_2(\xi_\Gamma^1)<0$ (或者 $\omega_\Gamma\cdot Y_\Gamma\cdot c_1^Tg_2(\xi_\Gamma^1)>0$),对于充分小的 $|\varepsilon|$,当 $\varepsilon<0$ (或者 $\varepsilon>0$)时,系统(1)在 Γ 附近没有闭轨;当 $\varepsilon>0$ (或者 $\varepsilon<0$)时,该系统在 Γ 附近有两个极限环,这两个极限环是双曲的且稳定性相反.

引理 3.2(变分引理[12]) 设 $F,G\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$, $F(p)\neq0$, $x(t;p)(x\in\mathbf{R}^2)$ 是方程 $\dot{x}=F(x)$ 满足初值条件 $x(0;p)=p(p\in\mathbf{R}^2)$ 的解. 则满足初始条件 $V(0)=0$ 的线性方程 $\dot{V}=DF(x(t;p))V+G(x(t;p))$ 的解有下面的形式:

$$V(t)=[N(t,p)+\alpha(t,p)Q(t,p)]F(x(t;p))+\frac{\beta(t,p)Q(t,p)}{\|F(x(t;p))\|^2}F^\perp(x(t;p)),$$

其中 $\alpha(t,p)$, $\beta(t,p)$ 和 $\kappa(t,p)$ 由引理 2.1 给出,

$$N(t,p)=\int_0^t\left\{\frac{\langle F(x(s;p)),G(x(s;p))\rangle}{\|F(x(s;p))\|^2}-\frac{\alpha(s,p)}{\beta(s,p)}F(x(s;p))\wedge G(x(s;p))\right\}\mathrm{d}s,$$

$$Q(t,p)=\int_0^t\frac{F(x(s;p))\wedge G(x(s;p))}{\beta(s,p)}\mathrm{d}s.$$

注意到任意 $x\in\mathbf{R}^2$, 有 $F(x)\wedge F(x)=0$, $F(x)\wedge F^\perp(x)=\|F(x)\|^2$, 由引理 3.2 可得

引理 3.3 在引理 3.2 的条件下,对任意 $t\in\mathbf{R}$ 有下式成立:

$$F(x(t;p))\wedge V(t)=\int_0^tF(x(s;p))\wedge G(x(s;p))\exp\left(\int_s^t\mathrm{div}F(x(\tau;p))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

此外,如果 $W(t)$ 是满足初值条件 $W(0)=w_0$ 的方程 $\dot{W}=DF(x(t;p))W$ 的解,则有 $F(x(t;p))\wedge W(t)=\beta(t,p)F(p)\wedge w_0$ 成立.

引理 3.4[11] 令 $\bar{\Gamma}$ 为系统(2)从初始点 $\xi^1\in\Sigma$ 出发的轨道,该轨道与 Σ_1, Σ_2 逆时针横截相交且在第一次回到 Σ 前只相交一次. 令 $\xi_{\bar{\Gamma}}^1=\xi^1$, $\bar{\Gamma}$ 与 Σ_2, $\Sigma_3=\Sigma_1$ 相交的点分别为 $\xi_{\bar{\Gamma}}^2,\xi_{\bar{\Gamma}}^3$. 设 $T_{\bar{\Gamma}}^k$ 为 $\bar{\Gamma}$ 从 $\xi_{\bar{\Gamma}}^k$ 到 $\xi_{\bar{\Gamma}}^{k+1}$ 的时间 $(k=1,2)$. 则 Γ 的 Pioncaré 映射: $P:\Sigma\times\Lambda\to\Sigma$ 为

$$P(\xi^1,\varepsilon)=P(\xi_{\bar{\Gamma}}^1,\varepsilon)=\xi_{\bar{\Gamma}}^3+\frac{M(\xi_{\bar{\Gamma}}^1)c_1^\perp}{c_1^Tg_2(\xi_{\bar{\Gamma}}^3)}\varepsilon+O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

其中

$$M(\xi_{\bar{\Gamma}}^1)=\frac{c_2^Tg_2(\xi_{\bar{\Gamma}}^2)}{c_2^Tg_1(\xi_{\bar{\Gamma}}^2)}\exp\left(\int_0^{T_{\bar{\Gamma}}^2}\mathrm{div}\,g_2(x_0^2(s;\xi_{\bar{\Gamma}}^2))\mathrm{d}s\right)\cdot\triangle_1(\xi_{\bar{\Gamma}}^1)+\triangle_2(\xi_{\bar{\Gamma}}^2),$$

$$\triangle_k(\xi_{\bar{\Gamma}}^k)=\int_0^{T_{\bar{\Gamma}}^k}g_k(x_0^k(s;\xi_{\bar{\Gamma}}^k))\wedge f_k(x_0^k(s;\xi_{\bar{\Gamma}}^k))\cdot\exp\left(\int_s^{T_{\bar{\Gamma}}^k}\mathrm{div}\,g_k(x_0^k(\tau;\xi_{\bar{\Gamma}}^k))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

由引理 3.4 易知，

$$P(\xi_\Gamma^1,\varepsilon)=\xi_\Gamma^1+\frac{Y_\Gamma c_1^\perp}{c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)}\varepsilon+O(\varepsilon^2).$$

引理 3.5　假设系统(2)满足条件(H1～H3)，且该系统有一个非双曲的极限环 Γ(即 $\lambda_\Gamma=1$).令 $\xi_\Gamma^1=\chi_\Gamma^1 c_1^\perp,\xi_\Gamma^2=\chi_\Gamma^2 c_2^\perp$，其中 $\chi_\Gamma^1,\chi_\Gamma^2\in\mathbf{R}$. 如前定义 Γ 的 Poincaré 映射 $P:\Sigma\times\Lambda\to\Sigma$. 则对于任意 $\xi_{\bar\Gamma}^1=\xi^1=\chi^1 c_1^\perp\in\Sigma$(其中 $\chi^1\in\mathbf{R}$)，有

$$P(\xi^1,0)=\xi^1+\frac{1}{2}\omega_\Gamma c_1^\perp(\chi^1-\chi_\Gamma^1)^2+O(\|\chi^1-\chi_\Gamma^1\|^3)\tag{5}$$

证明　令 $\bar\Gamma$ 为引理 3.4 给出的系统(2)以 $\xi^1\in\Sigma$ 为初始点的轨道. 由引理 3.4，$P(\xi_{\bar\Gamma}^1,0)=\xi_{\bar\Gamma}^3$.

下面对 $\xi_{\bar\Gamma}^3$ 进行估计. 对于充分小的 $\|\xi^1-\xi_\Gamma^1\|$，令 $\xi^1=\chi^1 c_1^\perp,\xi_\Gamma^1=\chi_\Gamma^1 c_1^\perp$，其中 $\chi^1,\chi_\Gamma^1\in\mathbf{R}$. 由解对初值的 C^3 依赖性，我们有展开式

$$\begin{aligned}x_0^1(t;\xi_{\bar\Gamma}^1)&=x_0^1(t;\xi_\Gamma^1)+\\&\Phi_{1,1}(t;\xi_\Gamma^1)c_1^\perp(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)+\\&\frac{1}{2}\Phi_{1,2}(t;\xi_\Gamma^1)(c_1^\perp)^2(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)^2+\\&O(\|\xi^1-\xi_\Gamma^1\|^3)\end{aligned}\tag{6}$$

其中对任意固定的 t 和 $\xi_\Gamma^1,\Phi_{1,2}:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是对称的双线性形式. 令 $\varphi_1(t;\xi_\Gamma^1)=\Phi_{1,2}(t;\xi_\Gamma^1)(c_1^\perp)^2$. 将(6)式代入(2)式可知 $\varphi_1(t;\xi_\Gamma^1)$ 满足如下初值问题：

$$\begin{aligned}\dot\varphi_1(t;\xi_\Gamma^1)&=Dg_1(x_0^1(t;\xi_\Gamma^1))\varphi_1(t;\xi_\Gamma^1)+\\&\psi_1(t;\xi_\Gamma^1),\varphi_1(0;\xi_\Gamma^1)=0\end{aligned}\tag{7}$$

定义 $z_1(t;\xi_\Gamma^1):=g_1(x_0^1(t;\xi_\Gamma^1))\wedge\varphi_1(t;\xi_\Gamma^1)$，则由引理 3.3 可得

$$z_1(t;\xi_\Gamma^1)=\int_0^t g_1(x_0^1(s;\xi_\Gamma^1))\wedge\varphi_1(s;\xi_\Gamma^1)\cdot\exp\left(\int_s^t \operatorname{div} g_1(x_0^1(\tau;\xi_\Gamma^1))d\tau\right)ds.$$

再由 C^3 依赖性，我们有以下展开式：

$$\begin{aligned}T_{\bar\Gamma}^1&=T_\Gamma^1+\tau_1^1(\xi_\Gamma^1)(\chi^1-\chi_\Gamma^1)+\\&\frac{1}{2}\tau_2^1(\xi_\Gamma^1)(\chi^1-\chi_\Gamma^1)^2+O(\|\xi^1-\xi_\Gamma^1\|^3)\end{aligned}\tag{8}$$

由于 $x_0^1(T_{\bar\Gamma}^1;\xi_{\bar\Gamma}^1)=\xi_{\bar\Gamma}^2\in\Sigma_2,x_0^1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)=\xi_\Gamma^2\in\Sigma_2$，我们有

$$c_2^T\xi_{\bar\Gamma}^2=c_2^T\xi_\Gamma^2=0\tag{9}$$

由式(6)，(8)，(9)，简单计算后可得

$$\tau_1^1(\xi_\Gamma^1)=-\frac{c_2^T\Phi_{1,1}(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}c_1^\perp,\tau_2^1(\xi_\Gamma^1)=-\frac{c_2^T[V_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)+\varphi_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)]}{c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}\tag{10}$$

由于 $x_0^1(T_{\bar\Gamma}^1;\xi_{\bar\Gamma}^1)=\xi_{\bar\Gamma}^2$ 和 $x_0^1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)=\xi_\Gamma^2$，将(8)式代入(6)式计算可得

$$\begin{aligned}\xi_{\bar\Gamma}^2&=\xi_\Gamma^2+\\&\frac{g_1(x_0^1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1))\wedge\Phi_{1,1}(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}\cdot\\&(\xi_{\bar\Gamma}^1-\xi_\Gamma^1)c_2^\perp+\\&\frac{g_1(\xi_\Gamma^2)\wedge V_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)+z_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{2c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}\cdot\\&c_2^\perp(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)^2+O(|\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1|^3)\end{aligned}\tag{11}$$

又因为

$$\begin{aligned}&g_1(\xi_\Gamma^1)\wedge\Phi_{1,1}(0;\xi_\Gamma^1)=\\&g_1(\xi_\Gamma^1)\wedge I=(g_1^\perp(\xi_\Gamma^1))^T,\end{aligned}$$

由式(3)，变分引理(即引理 3.2)及 Diliberto 定理(即引理 2.1)可得

$$\begin{aligned}&g_1(x_0^1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1))\wedge\Phi_{1,1}(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)=\\&(g_1^\perp(\xi_\Gamma^1))^T\exp\left(\int_0^{T_\Gamma^1}\operatorname{div} g_1(x_0^1(s;\xi_\Gamma^1))ds\right)=\\&\frac{\lambda_{\Gamma,1}}{\delta_{\Gamma,1}}(g_1^\perp(\xi_\Gamma^1))^T\end{aligned}\tag{12}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&c_2^\perp=(\cos\theta_2,\sin\theta_2)^T=\\&(\cos(\theta_1+\beta_1),\sin(\theta_1+\beta_1))^T=R(\beta_1)c_1^\perp,\\&c_3=c_1,R^{-1}(\beta_1)=R(2\pi-\beta_1),\end{aligned}$$

其中 $R(\beta_1)$ 是旋转矩阵

$$R(\beta_1)=\begin{pmatrix}\cos\beta_1&-\sin\beta_1\\\sin\beta_1&\cos\beta_1\end{pmatrix}.$$

由于 $\xi_{\bar\Gamma}^1-\xi_\Gamma^1\in\Sigma_1$ 和 $c_1^\perp$ 是共线的，因而有

$$\begin{aligned}&(g_1^\perp(\xi_\Gamma^1))^T(\xi_{\bar\Gamma}^1-\xi_\Gamma^1)c_2^\perp=\\&c_1^T g_1(\xi_\Gamma^1)R(\beta_1)(\xi_{\bar\Gamma}^1-\xi_\Gamma^1).\end{aligned}$$

将(12)式代入到(11)式得

$$\begin{aligned}\xi_{\bar\Gamma}^2-\xi_\Gamma^2&=(\chi_{\bar\Gamma}^2-\chi_\Gamma^2)R(\beta_1)c_1^\perp=\\&R(\beta_1)c_1^\perp\Big[\lambda_{\Gamma,1}\frac{c_1^T g_0(\xi_\Gamma^1)}{c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)+\\&\frac{g_1(\xi_\Gamma^2)\wedge V_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)+z_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{2c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}\cdot\\&(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)^2\Big]+O(|\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1|^3)\end{aligned}\tag{13}$$

从而

$$\begin{aligned}\chi_{\bar\Gamma}^2-\chi_\Gamma^2&=\lambda_{\Gamma,1}\frac{c_1^T g_0(\xi_\Gamma^1)}{c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)+\\&\frac{g_1(\xi_\Gamma^2)\wedge V_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)+z_1(T_\Gamma^1;\xi_\Gamma^1)}{2c_2^T g_1(\xi_\Gamma^2)}\cdot\\&(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)^2+O(|\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1|^3)\end{aligned}\tag{14}$$

同理，对 $\chi_{\bar\Gamma}^3-\chi_\Gamma^3$，将(14)式代入整理可得

$$\chi_{\bar\Gamma}^3=\chi_\Gamma^1+\lambda_\Gamma\frac{c_1^T g_0(\xi_\Gamma^1)}{c_3^T g_2(\xi_\Gamma^3)}(\chi_{\bar\Gamma}^1-\chi_\Gamma^1)+$$

$$\frac{1}{2}\lambda_\Gamma\omega_\Gamma(\chi_\Gamma^1-\chi_\Gamma^1)^2+O(|\chi_\Gamma^1-\chi_\Gamma^1|^3).$$

已知有 $\lambda_\Gamma=1$，$\chi_\Gamma^1=\chi^1$，$\xi_\Gamma^3=\chi_\Gamma^3 c_1^\perp$ 以及 $\xi_\Gamma^1=\chi_\Gamma^1 c_1^\perp$，则式(5)得证. 证毕.

定理 3.1 的证明　令 Γ 为满足条件(H1～H3)的系统(2)的非双曲极限环，则 $\lambda_\Gamma=1$. 取 Poincaré 截面 Σ 并定义 Poincaré 映射 $P:\Sigma\times\Lambda\to\Sigma$ 如前，令 $\xi^1=\chi^1 c_1^\perp$，$\xi_\Gamma^1=\chi_\Gamma^1 c_1^\perp$，其中 $\chi^1,\chi_\Gamma^1\in\mathbf{R}$. 则由定理 3.1 和引理 3.2 有

$$P(\xi^1,0)=\xi^1+\frac{1}{2}\omega_\Gamma c_1^\perp(\chi^1-\chi_\Gamma^1)^2+$$

$$O(\|\xi^1-\xi_\Gamma^1\|^3),\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}P(\xi_\Gamma^1,0)=\frac{Y_\Gamma}{c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)}c_1^\perp \quad (15)$$

若 $\omega_\Gamma<0$，由式(15)可知，对于充分小的 $\|\xi^1-\xi_\Gamma^1\|$，当 ξ^1 在 Γ 的外部时，向量 $P(\xi^1,0)-\xi^1$ 和 $\xi^1-\xi_\Gamma^1=(\chi^1-\chi_\Gamma^1)c_1^\perp$ 在 Σ_1 两边有不同的方向；当 ξ^1 处于 Γ 的内部时，该两向量有相同的方向. 因此 $\omega_\Gamma<0$ 时极限环 Γ 的外部是稳定的，内部是不稳定的. 当 $\omega_\Gamma>0$ 时，证明类似.

因为 $c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)\neq 0$，由式(15) 我们可将后继函数 $d(\xi^1,\varepsilon)=P(\xi^1,\varepsilon)-\xi^1$ 写成 $d(\xi^1,\varepsilon)=\tilde{d}(\chi^1,\varepsilon)c_1^\perp$，从而有

$$\tilde{d}(\chi_\Gamma^1,0)=\frac{\partial}{\partial\chi^1}\tilde{d}(\chi_\Gamma^1,0)=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(\chi^1)^2}\tilde{d}(\chi_\Gamma^1,0)=\omega_\Gamma\neq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\tilde{d}(\chi_\Gamma^1,0)=\frac{Y_\Gamma}{c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)}\neq 0.$$

由鞍-结分岔定理，若 $\omega_\Gamma\cdot Y_\Gamma\cdot c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)<0$，则对于充分小的 $|\varepsilon|$，当 $\varepsilon<0$ 时，在 ξ_Γ^1 的邻域内 $d(\xi^1,\varepsilon)=0$ 无解；当 $\varepsilon>0$ 时，在 ξ_Γ^1 的邻域内 $d(\xi^1,\varepsilon)=0$ 有两个解. 因此，Γ 出现鞍结分岔并且最多出现两个极限环：对于充分小的 $|\varepsilon|$，当 $\varepsilon<0$ 时，系统(1)在 Γ 附近无闭轨；当 $\varepsilon>0$ 时，系统(1)在 Γ 附近有两个极限环，这两个极限环都是双曲的且稳定性相反. 当 $\omega_\Gamma Y_\Gamma c_1^T g_2(\xi_\Gamma^1)>0$ 时证明类似. 证毕.

参考文献：

[1] Banerjee S, Verghese G. Nonlinear phenomena in power electronics: attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control [M]. New York: Wiley-IEEE Press, 2001.

[2] Dankowicz H, Jerrelind J. Control of near-grazing dynamics in impact oscillators [J]. P Lond Math Soc, 2005, 461: 3365.

[3] Akhmet M U, Arugalan D. Bifurcation of a nonsmooth planar limit cycle from a vertex [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 2723.

[4] 付宏睿，史红涛，张建刚. 基于新四翼混沌系统的复杂网络的混沌同步及其在保密通信中的应用[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：965.

[5] 胡楠. 带多个切换的 Filippov 系统极限环在扰动下的保持性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2013，50：698.

[6] Leine R I, van Campen D H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems [J]. European J Mech A-Solid, 2006, 25: 595.

[7] Li F, Liu Y, Yu P. Bifurcation of limit cycles at infinity in a class of switching systems [J]. Nonlinear Dynam, 2017, 88: 403.

[8] Sheng L, Han M, Romanovsky V G. On the number of limit cycles by perturbing a piecewise smooth Liénard model [J]. Int J Bifurcat Chaos, 2016, 26: 1650168.

[9] Du Z, Li Y, Zhang W. Bifurcation of periodic orbits in a class of planar Filippov systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 69: 3610.

[10] Du Z, Li Y. Bifurcation of periodic orbits with multiple crossings in a class of Filippov systems[J]. Math Comp Model Dyn, 2012, 55: 1072.

[11] Hu N, Du Z. Bifurcation of periodic orbits emanated from a vertex in discontinuous planar systems [J]. Nonlinear Sci Numer Simul, 2013, 18: 3436.

[12] Chicone C. Bifurcation of nonlinear oscillations and frequency entrainment near reasonance [J]. SIAM J Math Anal, 1992, 23: 1577.

引用本文格式：

中　文：袁丽萍. 带两个区域的平面分段光滑系统的非双曲极限环分岔[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：678.

英　文：Yuan L P. Bifurcation of nonhyperbolic limit cycles in piecewise smooth planar systems with two zones [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 678.